Gabarito da Segunda Prova

MAT0216 – Cálculo Diferencial e Integral III

Prof. Daniel Victor Tausk

13/05/2019

Questão 1. (valor 2,5 pontos) Seja $T \subset \mathbb{R}^2$ a região triangular de vértices $(0,0)$, $(1,0)$ e $(1,1)$. Calcule a integral dupla $\iint_T f$ da função $f : T \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = (x+y)^3$, para todo $(x,y) \in T$.

Solução. Temos

$$T = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1 \text{ e } 0 \le y \le x\big\}$$

e portanto, usando o Teorema de Fubini, obtemos:

$$\iint_T f = \int_0^1 \Big(\int_0^x (x+y)^3 \,\mathrm{d}y\Big)\,\mathrm{d}x.$$

O Teorema de Fubini pode ser usado aqui, já que f é contínua, limitada e T é Jordan mensurável e limitado. Calculamos agora a integral iterada usando o Teorema Fudamental do Cálculo, como segue:

$$\int_0^x (x+y)^3 \,\mathrm{d}y = \frac{1}{4}(x+y)^4\Big|_{y=0}^{x} = 4x^4 - \frac{1}{4}\,x^4 = \frac{15}{4}\,x^4,$$

$$\iint_T f = \int_0^1 \frac{15}{4}\,x^4 \,\mathrm{d}x = \frac{3}{4}\,x^5\Big|_{x=0}^{1} = \frac{3}{4}\,\cdot$$

Questão 2. (valor 2,5 pontos) Calcule a integral tripla:

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} e^{-\left[(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}\right]}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

Solução. Fazemos uma substituição de variáveis usando coordenadas esféricas

$$x=\rho\cos\theta\operatorname{sen}\phi,\quad y=\rho\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi,\quad z=\rho\cos\phi,$$
$$\rho\in\,]0,+\infty[\,,\quad \theta\in\,]0,2\pi[\,,\quad \phi\in\,]0,\pi[\,,$$
$$\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\rho^2\operatorname{sen}\phi\;\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi,$$

obtendo:

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} e^{-\left[(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}\right]}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint_A e^{-\rho^3}\rho^2\operatorname{sen}\phi\;\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi,$$

em que $A=\,]0,+\infty[\,\times\,]0,2\pi[\,\times\,]0,\pi[$. Como A é Jordan mensurável e o integrando é contínuo e não negativo, podemos usar o Teorema de Fubini (para integrais impróprias), obtendo:

$$\iiint_A e^{-\rho^3}\rho^2\operatorname{sen}\phi\;\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi=\int_0^{+\infty}\Big(\int_0^{2\pi}\Big(\int_0^{\pi}e^{-\rho^3}\rho^2\operatorname{sen}\phi\;\mathrm{d}\phi\Big)\,\mathrm{d}\theta\Big)\,\mathrm{d}\rho.$$

Temos

$$\int_0^{\pi}\operatorname{sen}\phi\;\mathrm{d}\phi=-\cos\phi\,\Big|_{\phi=0}^{\pi}=2$$

e portanto:

$$\iiint_A e^{-\rho^3}\rho^2\operatorname{sen}\phi\;\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi=4\pi\int_0^{+\infty}e^{-\rho^3}\rho^2\,\mathrm{d}\rho=-\frac{4\pi}{3}e^{-\rho^3}\Big|_{\rho=0}^{+\infty}=\frac{4\pi}{3}\cdot$$

Assim:

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} e^{-\left[(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}\right]}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\frac{4\pi}{3}\cdot$$

Questão 3. (valor 2,5 pontos) Considere a função $\Psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$\Psi(x, y) = \big(x + \tfrac{1}{2}\cos y, y + \tfrac{1}{2}\operatorname{sen} x\big),$$

para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Se A denota o retângulo $\big[0, \frac{\pi}{2}\big] \times [0, \pi]$, calcule a área da imagem direta $\Psi[A]$ de A por Ψ. Você pode usar sem justificar o fato que a função Ψ é injetora.

Solução. Temos que a função Ψ é de classe C^∞ e a sua matriz Jacobiana num ponto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ é dada por:

$$J\Psi(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2}\operatorname{sen} y \\ \frac{1}{2}\cos x & 1 \end{pmatrix}.$$

Temos

$$\det\big(J\Psi(x, y)\big) = 1 + \tfrac{1}{4}\operatorname{sen} y \cos x \geq 1 - \tfrac{1}{4} = \tfrac{3}{4}\,,$$

já que $\operatorname{sen} y \cos x \geq -1$, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Segue daí que

$$\det\big(J\Psi(x, y)\big) \neq 0,$$

para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Como Ψ é injetora, o Teorema da Função Inversa implica que a imagem de Ψ é um subconjunto[1] aberto V de $\mathbb{R}^2$ e que a função $\Psi : \mathbb{R}^2 \to V$ é um difeomorfismo. Podemos então usar a substituição de variáveis $(x', y') = \Psi(x, y)$ para calcular a integral

$$\iint_{\Psi[A]} 1 \,\mathrm{d}x'\mathrm{d}y',$$

cujo resultado nos dará a área de $\Psi[A]$. Temos:

$$\begin{aligned}
\text{área}\big(\Psi[A]\big) &= \iint_{\Psi[A]} 1 \,\mathrm{d}x'\mathrm{d}y' = \iint_A \big|\det\big(J\Psi(x, y)\big)\big| \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \iint_A \big(1 + \tfrac{1}{4}\operatorname{sen} y \cos x\big) \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \iint_A 1 \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \frac{1}{4}\Big(\int_0^\pi \operatorname{sen} y \,\mathrm{d}y\Big)\Big(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \,\mathrm{d}x\Big) \\
&= \text{área}(A) + \frac{1}{4}(-\cos\pi + \cos 0)\big(\operatorname{sen}\tfrac{\pi}{2} - \operatorname{sen} 0\big) \\
&= \frac{\pi^2}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(\pi^2 + 1).
\end{aligned}$$

[1] Na verdade é possível mostrar que a imagem de Ψ é todo o $\mathbb{R}^2$, mas isso não é relevante para a resolução da questão. Uma forma de fazer isso é usar o chamado *Teorema do Ponto Fixo de Banach* (ou, mais especificamente, uma consequência dele que é às vezes chamada de *Lema da Perturbação da Identidade*).

Demonstração de que Ψ é injetora. Considere a função $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$\phi(x, y) = (\cos y, \operatorname{sen} x),$$

para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Temos que $\Psi(p) = p + \frac{1}{2}\phi(p)$, para todo $p \in \mathbb{R}^2$. Vamos primeiro mostrar que

$$\|\phi(p) - \phi(q)\| \leq \|p - q\|, \tag{1}$$

para todo $p, q \in \mathbb{R}^2$. Se $p = (x, y)$, $q = (x', y')$, então

$$\phi(p) - \phi(q) = (\cos y - \cos y', \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x'),$$

e aplicando o Teorema do Valor Médio para as funções sen e cos, obtemos as desigualdades:

$$|\cos y - \cos y'| \leq |y - y'| \quad \text{e} \quad |\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x'| \leq |x - x'|.$$

Daí

$$\begin{aligned} \|\phi(p) - \phi(q)\|^2 &= (\cos y - \cos y')^2 + (\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x')^2 \leq (y - y')^2 + (x - x')^2 \\ &= \|p - q\|^2, \end{aligned}$$

o que prova (1). Agora se $p, q \in \mathbb{R}^2$ são tais que $\Psi(p) = \Psi(q)$, então

$$\begin{aligned} p + \frac{1}{2}\phi(p) = q + \frac{1}{2}\phi(q) &\Longrightarrow p - q = \frac{1}{2}\big(\phi(q) - \phi(p)\big) \\ &\Longrightarrow \|p - q\| = \frac{1}{2}\|\phi(q) - \phi(p)\| \leq \frac{1}{2}\|p - q\| \\ &\Longrightarrow \frac{1}{2}\|p - q\| \leq 0 \Longrightarrow \|p - q\| = 0 \Longrightarrow p = q. \end{aligned}$$

Questão 4. (valor 2,5 pontos) Calcule a área do pedaço de parabolóide circular definido por:

$$S = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2 \text{ e } x^2 + y^2 \leq 2\big\}.$$

Solução. Esse parabolóide circular pode ser parametrizado pela função injetora $\sigma : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ de classe C^1 definida por

$$\sigma(x,y) = (x, y, x^2 + y^2),$$

para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Temos:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x}(x,y) = (1,0,2x), \quad \frac{\partial \sigma}{\partial y}(x,y) = (0,1,2y)$$

e:

$$\Big\| \frac{\partial \sigma}{\partial x}(x,y) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial y}(x,y) \Big\| = \|(-2x,-2y,1)\| = \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2},$$

para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Se $D = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2\big\}$ denota o disco de centro na origem e raio $\sqrt{2}$, então $S = \sigma[D]$ e portanto:

$$\text{área}(S) = \iint_D \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Usando coordenadas polares

$$\begin{gathered} x = r\cos\theta, \quad y = r \operatorname{sen}\theta, \\ r \in \,]0, +\infty[\,, \quad \theta \in \,]0, 2\pi[\,, \\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y = r\, \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \end{gathered}$$

e o Teorema de Fubini, obtemos

$$\begin{aligned} \text{área}(S) = \iint_D \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_0^{\sqrt{2}} \Big(\int_0^{2\pi} \sqrt{1 + 4r^2}\; r\, \mathrm{d}\theta \Big)\, \mathrm{d}r \\ &= 2\pi \int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{1 + 4r^2}\; r\, \mathrm{d}r \\ &= \frac{2\pi}{12} (1 + 4r^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_{r=0}^{\sqrt{2}} \\ &= \frac{13\pi}{3} \cdot \end{aligned}$$