Gabarito da Segunda Prova
MAT0206 – Análise Real
MAP0216 – Introdução à Análise Real

Prof. Daniel Victor Tausk

18/05/2012

Questão 1. (valor 2,5 pontos) Seja $(x_n)_{n\geq 1}$ uma seqüência de números reais tal que $x_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}^*$ e tal que $\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$. Mostre que $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{x_n} = +\infty$.

Solução. Devemos mostrar que para todo $M \in \mathbb{R}$, existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tal que $\sqrt{x_n} > M$ para todo $n \geq n_0$. Seja dado $M \in \mathbb{R}$. Como $\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$, temos que existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tal que $x_n > M^2$, para todo $n \geq n_0$. Tomando um n_0 como esse, temos que, para todo $n \geq n_0$, vale que $x_n > M^2$ e portanto:

$$\sqrt{x_n} > \sqrt{M^2} = |M| \geq M.$$

Questão 2. (valor 2,5 pontos) Sejam $(x_n)_{n\geq 1}$ uma seqüência de números reais e $L \in \mathbb{R}$. Mostre que as duas seguintes condições são equivalentes:

(i) para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$, tal que para todo $n \geq n_0$, vale que $|x_n - L| < \varepsilon$;

(ii) para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$, tal que para todo $n \geq n_0$, vale que $|x_n - L| \leq \varepsilon$.

Solução. Assuma (i) e vamos provar (ii). Seja dado $\varepsilon > 0$. Por (i), existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tal que $|x_n - L| < \varepsilon$, para todo $n \geq n_0$. Tomando um n_0 como esse obtemos que $|x_n - L| < \varepsilon$ e portanto $|x_n - L| \leq \varepsilon$, para todo $n \geq n_0$. Isso prova (ii). Agora assuma (ii) e vamos provar (i). Seja dado $\varepsilon > 0$. Por (ii), existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tal que $|x_n - L| \leq \frac{\varepsilon}{2}$, para todo $n \geq n_0$. Tomando um n_0 como esse obtemos que $|x_n - L| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ e portanto $|x_n - L| < \varepsilon$, para todo $n \geq n_0$. Isso prova (i).

Questão 3.

(a) (valor 1,5 pontos) Mostre que se $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ é uma série absolutamente convergente de números reais então a série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2$ é convergente.

(b) (valor 1,0 ponto) Encontre um exemplo de uma série condicionalmente convergente de números reais $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ tal que a série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2$ seja divergente.

Solução. Suponha que $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ seja uma série absolutamente convergente de números reais. Em particular, essa série é convergente e portanto $\lim_{n\to+\infty} x_n = 0$. Daí, dado $\varepsilon = 1$, existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tal que $|x_n| < 1$, para todo $n \geq n_0$. Tome um n_0 como esse. Daí, para todo $n \geq n_0$ temos que $x_n^2 \leq |x_n|$ e, como a série $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$ converge, o critério de comparação nos diz que a série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2$ também converge. Isso completa a resolução do item (a). Para o item (b), tome:

$$x_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

Temos que a seqüência $\big(|x_n|\big)_{n\geq 1}$ é decrescente e converge para zero, donde o critério da série alternada nos diz que a série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ é convergente. Mas $x_n^2 = \frac{1}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}^*$ e portanto $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2$ é a série harmônica, que diverge. (Pelo resultado do item (a), a série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ não pode ser absolutamente convergente e portanto é condicionalmente convergente.)

Questão 4. (valor 2,5 pontos) Sejam $(x_n)_{n\geq 1}$ uma seqüência limitada de números reais e $(y_n)_{n\geq 1}$ uma seqüência convergente de números reais. Mostre que:

$$\limsup_{n\to+\infty}(x_n+y_n)=\limsup_{n\to+\infty}x_n+\lim_{n\to+\infty}y_n.$$

Solução 1. O resultado do Exercício 3 da lista 5 nos diz que:

$$\limsup_{n\to+\infty}(x_n+y_n)\leq\limsup_{n\to+\infty}x_n+\limsup_{n\to+\infty}y_n=\limsup_{n\to+\infty}x_n+\lim_{n\to+\infty}y_n.$$

Resta estabelecer a desigualdade oposta. Como $x_n=(x_n+y_n)+(-y_n)$ para todo $n\in\mathbb{N}^*$, usando novamente o resultado do Exercício 3 da lista 5 obtemos:

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to+\infty}x_n&\leq\limsup_{n\to+\infty}(x_n+y_n)+\limsup_{n\to+\infty}(-y_n)\\&=\limsup_{n\to+\infty}(x_n+y_n)+\lim_{n\to+\infty}(-y_n)\\&=\limsup_{n\to+\infty}(x_n+y_n)-\lim_{n\to+\infty}y_n.\end{aligned}$$

Daí:

$$\limsup_{n\to+\infty}x_n+\lim_{n\to+\infty}y_n\leq\limsup_{n\to+\infty}(x_n+y_n).$$

Solução 2. Sejam $a=\limsup_{n\to+\infty}x_n$ e $b=\lim_{n\to+\infty}y_n$. Basta mostrar que $a+b$ é o maior valor de aderência da seqüência $(x_n+y_n)_{n\geq 1}$. Como a é um valor de aderência de $(x_n)_{n\geq 1}$, existe uma subseqüência $(x_{n_k})_{k\geq 1}$ de $(x_n)_{n\geq 1}$ que converge para a. Mas $(y_{n_k})_{k\geq 1}$ converge para b e portanto $(x_{n_k}+y_{n_k})_{k\geq 1}$ é uma subseqüência de $(x_n+y_n)_{n\geq 1}$ que converge para $a+b$. Logo $a+b$ é um valor de aderência de $(x_n+y_n)_{n\geq 1}$. Seja agora $c\in\mathbb{R}$ um valor de aderência de $(x_n+y_n)_{n\geq 1}$ e vamos mostrar que $c\leq a+b$. Temos que existe uma subseqüência $(x_{n_k}+y_{n_k})_{k\geq 1}$ de $(x_n+y_n)_{n\geq 1}$ que converge para c. Mas $(y_{n_k})_{k\geq 1}$ converge para b e, como $x_{n_k}=(x_{n_k}+y_{n_k})-y_{n_k}$ para todo $k\in\mathbb{N}^*$, segue que $(x_{n_k})_{k\geq 1}$ converge para $c-b$. Então $c-b$ é um valor de aderência de $(x_n)_{n\geq 1}$ e portanto $c-b\leq a$. Daí $c\leq a+b$.