Gabarito da Segunda Prova
MAT0122 – Álgebra Linear I

Prof. Daniel Victor Tausk
08/05/2014

Questão 1. (valor 2,5 pontos) Considere as bases:

$$\mathcal{B} = \{2x^2, 1 + x^3, 1 - x, x + x^2\}, \quad \mathcal{C} = \big\{(1, 1), (1, 2)\big\}$$

de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ e de $\mathbb{R}^2$, respectivamente. Seja $T : \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear definida por:

$$T(p) = \big(p(1), p'(0)\big),$$

para todo $p \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$. Determine a matriz $[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$.

Solução. Temos:

$$T(2x^2) = (2, 0), \quad T(1 + x^3) = (2, 0),$$
$$T(1 - x) = (0, -1), \quad T(x + x^2) = (2, 1),$$

e portanto, se $\mathcal{C}'$ denota a base canônica de $\mathbb{R}^2$, segue que:

$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}'} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

A matriz $[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$ é dada por:

$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = [I]_{\mathcal{C}'\mathcal{C}}[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}'},$$

sendo que:

$$[I]_{\mathcal{C}\mathcal{C}'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad [I]_{\mathcal{C}'\mathcal{C}} = \big([I]_{\mathcal{C}\mathcal{C}'}\big)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Concluímos então que:

$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 & 3 \\ -2 & -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Questão 2. (valor 1,0 ponto cada item) Sejam $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ e $S : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ as transformações lineares definidas por:

$$T(x, y, z, t) = (x + 2y + t, 2x + 4y + z + 3t, x + 2y + z + 2t),$$
$$S(x, y, z, t) = x + y + z + t,$$

para todo $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$.

(a) Determine uma base para $\mathrm{Im}(T)$.

(b) Determine a dimensão de $\mathrm{Ker}(T)$.

(c) Determine a dimensão de $\mathrm{Ker}(S)$.

(d) Determine uma base de $\mathrm{Ker}(T) \cap \mathrm{Ker}(S)$.

(e) Determine a dimensão de $\mathrm{Ker}(T) + \mathrm{Ker}(S)$.

Solução.

(a) A matriz que representa T nas bases canônicas é:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

A imagem de T é gerada pelas colunas de A. Escalonando A, obtemos:

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

As colunas de A' que contêm pivôs são a primeira e a terceira; assim, uma base para o espaço gerado pelas colunas de A é obtida tomando a primeira e a terceira colunas de A. Vemos então que uma base para $\mathrm{Im}(T)$ é:

$$\big\{(1, 2, 1), (0, 1, 1)\big\}.$$

(b) Temos:

$$4 = \dim(\mathbb{R}^4) = \dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) + \dim\big(\mathrm{Im}(T)\big).$$

Pelo item (a), $\dim\big(\mathrm{Im}(T)\big) = 2$ e portanto também $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) = 2$.

(c) A imagem de S é um subespaço não nulo de $\mathbb{R}$, já que a transformação linear S não é nula. Mas o único subespaço não nulo de $\mathbb{R}$ é $\mathbb{R}$, ou seja $\mathrm{Im}(S) = \mathbb{R}$. Temos:

$$4 = \dim(\mathbb{R}^4) = \dim\big(\mathrm{Ker}(S)\big) + \dim\big(\mathrm{Im}(S)\big),$$

e como $\dim\big(\mathrm{Im}(S)\big) = 1$, segue que $\dim\big(\mathrm{Ker}(S)\big) = 3$.

(d) Temos que $\operatorname{Ker}(T) \cap \operatorname{Ker}(S)$ é o conjunto solução do sistema linear homogêneo:

$$\begin{cases} x + 2y + 0z + t = 0, \\ 2x + 4y + z + 3t = 0, \\ x + 2y + z + 2t = 0, \\ x + y + z + t = 0. \end{cases}$$

Escalonando esse sistema, obtemos:

$$\begin{cases} x + 2y + 0z + t = 0, \\ -y + z + 0t = 0, \\ z + t = 0, \\ 0 = 0. \end{cases}$$

A solução geral do sistema é obtida deixando t percorrer livremente os números reais e fazendo:

$$z = -t, \quad y = -t, \quad x = t.$$

Assim:

$$\operatorname{Ker}(T) \cap \operatorname{Ker}(S) = \big\{(t, -t, -t, t) : t \in \mathbb{R}\big\} = [(1, -1, -1, 1)]$$

e uma base para $\operatorname{Ker}(T) \cap \operatorname{Ker}(S)$ é $\big\{(1, -1, -1, 1)\big\}$.

(e) Temos:

$$\dim\big(\operatorname{Ker}(T) + \operatorname{Ker}(S)\big) = \dim\big(\operatorname{Ker}(T)\big) + \dim\big(\operatorname{Ker}(S)\big) - \dim\big(\operatorname{Ker}(T) \cap \operatorname{Ker}(S)\big).$$

Usando os resultados dos itens anteriores, obtemos então:

$$\dim\big(\operatorname{Ker}(T) + \operatorname{Ker}(S)\big) = 2 + 3 - 1 = 4.$$

Questão 3. (valor 2,5 pontos) Seja V um espaço vetorial de dimensão 2. Sejam $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ bases de V e sejam $T : V \to V$ e $S : V \to V$ transformações lineares. Suponha que:

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad [I]_{\mathcal{CB}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad [S]_{\mathcal{BB}} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Determine a matriz $[T \circ S]_{\mathcal{CC}}$.

Solução. Temos:

$$[T \circ S]_{\mathcal{CC}} = [T]_{\mathcal{BC}}[S]_{\mathcal{BB}}[I]_{\mathcal{CB}}.$$

Logo:

$$[T \circ S]_{\mathcal{CC}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 32 \\ 4 & 16 \end{pmatrix}.$$