Gabarito da Segunda Prova

MAT0121 – Cálculo Diferencial e Integral II

Prof. Daniel Victor Tausk

17/10/2018

Questão 1. Considere a curva parametrizada $\gamma : [1, T] \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$\gamma(t) = \Big(\frac{1}{2}\,t^2, \frac{2\sqrt{2}}{3}\,t^{\frac{3}{2}}, t\Big),$$

para todo $t \in [1, T]$, em que $T > 1$ é fixado.

(a) (valor 2,0 pontos) Escreva uma integral cujo resultado seja o comprimento de γ.

(b) (valor 0,5 ponto) Calcule a integral que você escreveu no item (a).

Solução do item (a). Temos

$$\gamma'(t) = \big(t, \sqrt{2}\,\sqrt{t}, 1\big),$$

e portanto:

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{t^2 + 2t + 1} = t + 1,$$

para todo $t \in [1, T]$. Assim o comprimento de γ é igual à integral:

$$\int_1^T \|\gamma'(t)\| \,\mathrm{d}t = \int_1^T (t+1)\,\mathrm{d}t.$$

Solução do item (b). Temos:

$$\int_1^T (t+1)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}(t+1)^2\Big|_1^T = \frac{1}{2}(T+1)^2 - 2 = \frac{1}{2}\,T^2 + T - \frac{3}{2}\,\cdot$$

Questão 2. (valor 2,0 pontos) Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função duas vezes derivável num intervalo $I \subset \mathbb{R}$. Escreva uma fórmula para a curvatura do gráfico de f num ponto $\big(x, f(x)\big)$ em termos da primeira e da segunda derivada de f no ponto $x \in I$.

Solução. Uma parametrização para o gráfico de f é dada pela curva parametrizada $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$\gamma(x) = \big(x, f(x)\big),$$

para todo $x \in I$. A curvatura $k(x)$ de γ no ponto $\gamma(x) = \big(x, f(x)\big)$ é dada pela fórmula

$$k(x) = \frac{\|\gamma'(x) \wedge \gamma''(x)\|}{\|\gamma'(x)\|^3},$$

em que o produto vetorial é calculado identificando elementos de $\mathbb{R}^2$ com elementos de $\mathbb{R}^3$ que possuem a terceira coordenada nula. Temos

$$\gamma'(x) = \big(1, f'(x)\big), \quad \gamma''(x) = \big(0, f''(x)\big), \quad \gamma'(x) \wedge \gamma''(x) = \big(0, 0, f''(x)\big),$$

para todo $x \in I$ e portanto:

$$\|\gamma'(x) \wedge \gamma''(x)\| = |f''(x)| \quad \text{e} \quad \|\gamma'(x)\| = \big(1 + f'(x)^2\big)^{\frac{1}{2}}.$$

Assim

$$k(x) = \frac{|f''(x)|}{\big(1 + f'(x)^2\big)^{\frac{3}{2}}},$$

para todo $x \in I$.

Questão 3. Calcule os limites abaixo, caso existam.

(a) (valor 1,5 pontos) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y - xy^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$;

(b) (valor 1,5 pontos) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x \operatorname{sen}^2 x \cos y}{x^2+y^2}$.

Solução do item (a). Denote por $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x,y) = \frac{x^2y - xy^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}},$$

para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Considere as curvas

$$\gamma :]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \quad \text{e} \quad \mu :]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$$

definidas por

$$\gamma(t) = (t,0) \quad \text{e} \quad \mu(t) = (t,2t),$$

para todo $t > 0$. Como $\lim_{t\to 0} \gamma(t) = (0,0)$ e $\lim_{t\to 0} \mu(t) = (0,0)$, teríamos:

$$\lim_{t\to 0} f\big(\gamma(t)\big) = \lim_{t\to 0} f\big(\mu(t)\big) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y),$$

caso o limite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ existisse. Mas

$$f\big(\gamma(t)\big) = 0 \quad \text{e} \quad f\big(\mu(t)\big) = \frac{2t^3 - 4t^3}{(t^2+4t^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{2}{5^{\frac{3}{2}}},$$

para todo $t > 0$ e portanto:

$$\lim_{t\to 0} f\big(\gamma(t)\big) = 0 \neq -\frac{2}{5^{\frac{3}{2}}} = \lim_{t\to 0} f\big(\mu(t)\big).$$

Isso mostra que o limite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ não existe.

Solução do item (b). Temos:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\,\mathrm{sen}^2\,x\cos y}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left[x\Big(\frac{\mathrm{sen}\,x}{x}\Big)^2(\cos y)\frac{x^2}{x^2+y^2}\right].$$

Como

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left[x\Big(\frac{\mathrm{sen}\,x}{x}\Big)^2(\cos y)\right] = 0\cdot 1^2\cdot 1 = 0$$

e

$$0 \le \frac{x^2}{x^2+y^2} \le 1$$

para todo $(x,y)\neq(0,0)$, segue que:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\,\mathrm{sen}^2\,x\cos y}{x^2+y^2} = 0.$$

Observação. Na verdade, a solução acima não está exatamente correta porque não podemos dividir por x quando $x=0$ (podemos supor no cálculo do limite que $(x,y)\neq(0,0)$, mas isso não implica $x\neq 0$). Uma solução rigorosa pode ser obtida assim: consideramos a função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\frac{\mathrm{sen}\,x}{x}$, se $x\neq 0$ e $f(0)=1$. Daí $\mathrm{sen}\,x = xf(x)$ para todo $x\in\mathbb{R}$ e portanto:

$$\frac{x\,\mathrm{sen}^2\,x\cos y}{x^2+y^2} = x\big(f(x)\big)^2(\cos y)\frac{x^2}{x^2+y^2},$$

para todo $(x,y)\neq(0,0)$. Como f é contínua, temos:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x) = f(0) = 1.$$

O resto do argumento é igual.

Questão 4. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(a) (valor 2,0 pontos) Decida se f é diferenciável na origem.

(b) (valor 0,5 ponto) Calcule todas as derivadas direcionais de f na origem, caso existam.

Solução do item (a). Temos:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0} 0 = 0 \quad \text{e}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y} = \lim_{y\to 0} 0 = 0.$$

Segue então que f será diferenciável na origem se, e somente se:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0.$$

Mas

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left[x \, \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \, \frac{y^2}{x^2+y^2} \right] = 0,$$

já que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} x = 0$,

$$-1 \leq \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq 1 \quad \text{e} \quad 0 \leq \frac{y^2}{x^2+y^2} \leq 1,$$

para todo $(x,y) \neq (0,0)$. Isso mostra que f é diferenciável na origem.

Solução do item (b). Como f é diferenciável na origem, segue que para todo $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ a derivada direcional $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0)$ existe e é dada por

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0) = \nabla f(0,0) \cdot \vec{v} = 0,$$

já que o vetor gradiente $\nabla f(0,0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,0), \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right)$ é nulo.