**Em todas as questões da prova, considera-se fixada uma orientação do espaço.**

**Q1.** Considere as seguintes afirmações:

(I) se $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ for uma base de $V^3$ tal que $[\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3] = 1$, então $\mathcal{B}$ será ortonormal;

(II) para quaisquer vetores $\vec{v}, \vec{w} \in V^3$, vale que $\vec{v} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = \vec{0}$;

(III) para quaisquer vetores $\vec{v}, \vec{w} \in V^3$ e qualquer $\lambda \in \mathbb{R}$, se $\lambda\vec{w} \neq \vec{0}$, então $\operatorname{proj}_{\vec{w}} \vec{v} = \operatorname{proj}_{\lambda\vec{w}} \vec{v}$.

Assinale a alternativa correta:

(a) todas as afirmações são falsas;
(b) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras;
(c) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras;
(d) todas as afirmações são verdadeiras;
(e) apenas a afirmação (III) é verdadeira.

**Q2.** Seja $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ um sistema de coordenadas em $E^3$. Seja $a \in \mathbb{R}$ e considere as retas $r$ e $s$ cujas equações vetoriais são:

$$r : X = (1, a, 1)_\Sigma + \lambda(-1, 0, 2)_\mathcal{B}, \quad \lambda \in \mathbb{R} \qquad \text{e}$$
$$s : X = (0, 1, a)_\Sigma + \lambda(1, 0, 1)_\mathcal{B}, \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Temos que as retas $r$ e $s$ serão reversas se, e somente se:

(a) $a \neq 3$;
(b) $a = 1$;
(c) $a \neq 1$;
(d) $a \neq 0$;
(e) $a > 1$.

**Q3.** Considere as seguintes afirmações:

(I) se $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ for uma base de $V^3$, então $\mathcal{C} = \{\vec{e}_2, \vec{e}_1, -2\vec{e}_3\}$ será uma base de $V^3$ com a mesma orientação que $\mathcal{B}$;

(II) para quaisquer vetores não nulos $\vec{v}, \vec{w} \in V^3$, existe um vetor $\vec{x} \in V^3$ tal que $\vec{v} \wedge \vec{x} = \vec{w}$;

(III) para quaisquer vetores não nulos $\vec{v}, \vec{x}, \vec{y} \in V^3$, se $\vec{v} \wedge \vec{x} = \vec{v} \wedge \vec{y}$, então $\vec{x} = \vec{y}$.

Assinale a alternativa correta:

(a) todas as afirmações são verdadeiras;
(b) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras;
(c) apenas a afirmação (I) é verdadeira;
(d) todas as afirmações são falsas;
(e) apenas a afirmação (II) é verdadeira.

**Q4.** Seja $\mathcal{B}$ uma base ortonormal de $V^3$ e considere os vetores:

$$\vec{v} = (1, 0, 1)_{\mathcal{B}}, \quad \vec{w} = (1, 1, 1)_{\mathcal{B}} \quad \text{e} \quad \vec{z} = (1, 1, -2)_{\mathcal{B}}.$$

Seja $\pi$ um plano paralelo a $\vec{v}$ e a $\vec{w}$ e suponha que $\vec{z}_1, \vec{z}_2 \in V^3$ sejam tais que $\vec{z} = \vec{z}_1 + \vec{z}_2$, $\vec{z}_1$ seja paralelo a $\pi$ e $\vec{z}_2$ seja ortogonal a $\pi$. Temos que a soma das coordenadas de $\vec{z}_1$ na base $\mathcal{B}$ é igual a:

(a) $\frac{1}{3}$;
(b) 0;
(c) $-1$;
(d) $-2$;
(e) 1.

**Q5.** Seja $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ um sistema de coordenadas em $E^3$. Considere a reta $r$ cuja equação vetorial é:

$$r : X = (-1, 2, 1)_\Sigma + \lambda(1, 3, 2)_{\mathcal{B}}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Assinale a alternativa correspondente a um ponto $Q$ que pertença à reta $r$:

(a) $Q = (0, 5, 2)_\Sigma$;
(b) $Q = (1, -2, -1)_\Sigma$;
(c) $Q = (1, 8, 5)_\Sigma$;
(d) $Q = (2, 8, 5)_\Sigma$;
(e) $Q = (1, 3, 2)_\Sigma$.

**Q6.** Seja $\mathcal{B}$ uma base ortonormal positiva de $V^3$. Considere os vetores

$$\vec{v} = (1,0,1)_{\mathcal{B}} \quad \text{e} \quad \vec{w} = (-1,2,0)_{\mathcal{B}}$$

e seja $\mathcal{C} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ uma base ortonormal positiva de $V^3$ tal que $\vec{e}_1$ tenha a mesma direção e sentido que $\vec{v}$, $\vec{e}_2$ seja uma combinação linear de $\vec{v}$ e $\vec{w}$ e tal que a primeira coordenada de $\vec{e}_2$ na base $\mathcal{B}$ seja positiva. A soma das coordenadas do vetor $\vec{e}_3$ na base $\mathcal{B}$ é igual a:

(a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$;
(b) $\frac{1}{3}$;
(c) $0$;
(d) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$;
(e) $-\frac{1}{3}$.

**Q7.** Seja $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ um sistema de coordenadas em $E^3$, em que $\mathcal{B}$ é uma base ortonormal de $V^3$. Considere os pontos:

$$A = (1,0,1)_\Sigma, \quad B = (-1,0,2)_\Sigma, \quad C = (0,1,1)_\Sigma \quad \text{e} \quad D = (1,2,1)_\Sigma.$$

Temos que o volume do tetraedro de vértices $A$, $B$, $C$ e $D$ é igual a:

(a) $\frac{1}{4}$;
(b) $1$;
(c) $2$;
(d) $\frac{1}{2}$;
(e) $\frac{1}{3}$.

**Q8.** Sejam $A, B, C \in E^3$ os vértices de um triângulo equilátero de lado unitário e sejam $\vec{e}_1 = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{e}_2 = \overrightarrow{AC}$. Seja $\vec{e}_3$ um vetor ortogonal a $\vec{e}_1$ e a $\vec{e}_2$ tal que $\|\vec{e}_3\| = 2$. Se $\vec{v} = (1,3,2)_{\mathcal{B}}$, em que $\mathcal{B}$ é a base definida por $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, então $\|\vec{v}\|$ será igual a:

(a) $\sqrt{29}$;
(b) $3\sqrt{2}$;
(c) $\sqrt{14}$;
(d) $4$;
(e) $\sqrt{10}$.

**Q9.** Seja $\mathcal{B}$ uma base ortonormal de $V^3$ e sejam $A, B, C \in E^3$ pontos tais que:

$$\overrightarrow{AB} = (1,3,2)_{\mathcal{B}} \quad \text{e} \quad \overrightarrow{AC} = (-1,2,1)_{\mathcal{B}}.$$

Temos que a área do triângulo de vértices $A$, $B$ e $C$ é igual a:

(a) $3$;
(b) $\frac{1}{2}\sqrt{35}$;
(c) $\sqrt{62}$;
(d) $\frac{1}{2}\sqrt{13}$;
(e) $\frac{1}{2}\sqrt{17}$.

**Q10.** Sejam $\vec{v}, \vec{w}, \vec{z} \in V^3$ tais que $[\vec{v}, \vec{w}, \vec{z}] = 3$. Temos que o produto misto

$$[\vec{v} + \vec{w} + \vec{z}, \vec{w} - 2\vec{z}, 2\vec{v} + \vec{z}]$$

é igual a:

(a) $-5$;
(b) $5$;
(c) $-6$;
(d) $-15$;
(e) $15$.