Em todas as questões da prova, considera-se fixada uma orientação do espaço.

Q1. Seja $\mathcal{B}$ uma base ortonormal positiva de V^3. Considere os vetores
$$\vec{v} = (1,0,1)_{\mathcal{B}} \quad \text{e} \quad \vec{w} = (-1,2,0)_{\mathcal{B}}$$
e seja $\mathcal{C} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ uma base ortonormal positiva de V^3 tal que $\vec{e}_1$ tenha a mesma direção e sentido que $\vec{v}$, $\vec{e}_2$ seja uma combinação linear de $\vec{v}$ e $\vec{w}$ e tal que a primeira coordenada de $\vec{e}_2$ na base $\mathcal{B}$ seja positiva. A soma das coordenadas do vetor $\vec{e}_3$ na base $\mathcal{B}$ é igual a:

(a) $-\frac{1}{3}$;
(b) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$;
(c) $\frac{1}{3}$;
(d) $\frac{\sqrt{2}}{2}$;
(e) 0.

Q2. Sejam $A, B, C \in E^3$ os vértices de um triângulo equilátero de lado unitário e sejam $\vec{e}_1 = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{e}_2 = \overrightarrow{AC}$. Seja $\vec{e}_3$ um vetor ortogonal a $\vec{e}_1$ e a $\vec{e}_2$ tal que $\|\vec{e}_3\| = 2$. Se $\vec{v} = (1,3,2)_{\mathcal{B}}$, em que $\mathcal{B}$ é a base definida por $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, então $\|\vec{v}\|$ será igual a:

(a) $\sqrt{10}$;
(b) $3\sqrt{2}$;
(c) $\sqrt{14}$;
(d) 4;
(e) $\sqrt{29}$.

Q3. Seja $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ um sistema de coordenadas em E^3. Considere a reta r cuja equação vetorial é:
$$r : X = (-1,2,1)_{\Sigma} + \lambda(1,3,2)_{\mathcal{B}}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$
Assinale a alternativa correspondente a um ponto Q que pertença à reta r:

(a) $Q = (1,8,5)_{\Sigma}$;
(b) $Q = (2,8,5)_{\Sigma}$;
(c) $Q = (0,5,2)_{\Sigma}$;
(d) $Q = (1,-2,-1)_{\Sigma}$;
(e) $Q = (1,3,2)_{\Sigma}$.

Q4. Seja $\mathcal{B}$ uma base ortonormal de V^3 e considere os vetores:

$$\vec{v} = (1,0,1)_{\mathcal{B}}, \quad \vec{w} = (1,1,1)_{\mathcal{B}} \quad \text{e} \quad \vec{z} = (1,1,-2)_{\mathcal{B}}.$$

Seja π um plano paralelo a $\vec{v}$ e a $\vec{w}$ e suponha que $\vec{z}_1, \vec{z}_2 \in V^3$ sejam tais que $\vec{z} = \vec{z}_1 + \vec{z}_2$, $\vec{z}_1$ seja paralelo a π e $\vec{z}_2$ seja ortogonal a π. Temos que a soma das coordenadas de $\vec{z}_1$ na base $\mathcal{B}$ é igual a:

(a) -2;
(b) $\frac{1}{3}$;
(c) -1;
(d) 1;
(e) 0.

Q5. Considere as seguintes afirmações:

(I) se $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ for uma base de V^3, então $\mathcal{C} = \{\vec{e}_2, \vec{e}_1, -2\vec{e}_3\}$ será uma base de V^3 com a mesma orientação que $\mathcal{B}$;
(II) para quaisquer vetores não nulos $\vec{v}, \vec{w} \in V^3$, existe um vetor $\vec{x} \in V^3$ tal que $\vec{v} \wedge \vec{x} = \vec{w}$;
(III) para quaisquer vetores não nulos $\vec{v}, \vec{x}, \vec{y} \in V^3$, se $\vec{v} \wedge \vec{x} = \vec{v} \wedge \vec{y}$, então $\vec{x} = \vec{y}$.

Assinale a alternativa correta:

(a) todas as afirmações são verdadeiras;
(b) apenas a afirmação (II) é verdadeira;
(c) todas as afirmações são falsas;
(d) apenas a afirmação (I) é verdadeira;
(e) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

Q6. Sejam $\vec{v}, \vec{w}, \vec{z} \in V^3$ tais que $[\vec{v}, \vec{w}, \vec{z}] = 3$. Temos que o produto misto

$$[\vec{v} + \vec{w} + \vec{z}, \vec{w} - 2\vec{z}, 2\vec{v} + \vec{z}]$$

é igual a:

(a) 15;
(b) -5;
(c) -15;
(d) 5;
(e) -6.

Q7. Considere as seguintes afirmações:

(I) se $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ for uma base de V^3 tal que $[\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3] = 1$, então $\mathcal{B}$ será ortonormal;

(II) para quaisquer vetores $\vec{v}, \vec{w} \in V^3$, vale que $\vec{v} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = \vec{0}$;

(III) para quaisquer vetores $\vec{v}, \vec{w} \in V^3$ e qualquer $\lambda \in \mathbb{R}$, se $\lambda\vec{w} \neq \vec{0}$, então $\operatorname{proj}_{\vec{w}} \vec{v} = \operatorname{proj}_{\lambda\vec{w}} \vec{v}$.

Assinale a alternativa correta:

(a) todas as afirmações são falsas;
(b) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras;
(c) todas as afirmações são verdadeiras;
(d) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras;
(e) apenas a afirmação (III) é verdadeira.

Q8. Seja $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ um sistema de coordenadas em E^3, em que $\mathcal{B}$ é uma base ortonormal de V^3. Considere os pontos:

$$A = (1,0,1)_\Sigma, \quad B = (-1,0,2)_\Sigma, \quad C = (0,1,1)_\Sigma \quad \text{e} \quad D = (1,2,1)_\Sigma.$$

Temos que o volume do tetraedro de vértices A, B, C e D é igual a:

(a) $\frac{1}{3}$;
(b) $\frac{1}{2}$;
(c) 1;
(d) $\frac{1}{4}$;
(e) 2.

Q9. Seja $\mathcal{B}$ uma base ortonormal de V^3 e sejam $A, B, C \in E^3$ pontos tais que:

$$\overrightarrow{AB} = (1,3,2)_\mathcal{B} \quad \text{e} \quad \overrightarrow{AC} = (-1,2,1)_\mathcal{B}.$$

Temos que a área do triângulo de vértices A, B e C é igual a:

(a) $\frac{1}{2}\sqrt{35}$;
(b) 3;
(c) $\frac{1}{2}\sqrt{17}$;
(d) $\sqrt{62}$;
(e) $\frac{1}{2}\sqrt{13}$.

Q10. Seja $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ um sistema de coordenadas em E^3. Seja $a \in \mathbb{R}$ e considere as retas r e s cujas equações vetoriais são:

$$r : X = (1, a, 1)_\Sigma + \lambda(-1, 0, 2)_\mathcal{B}, \quad \lambda \in \mathbb{R} \qquad \text{e}$$
$$s : X = (0, 1, a)_\Sigma + \lambda(1, 0, 1)_\mathcal{B}, \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Temos que as retas r e s serão reversas se, e somente se:

(a) $a > 1$;
(b) $a \neq 0$;
(c) $a \neq 3$;
(d) $a \neq 1$;
(e) $a = 1$.