

**Em todas as questões da prova, considera-se fixada uma orientação do espaço.**

**Q1.** Seja  $\Sigma = (O, \mathcal{B})$  um sistema de coordenadas em  $E^3$ , em que  $\mathcal{B}$  é uma base ortonormal de  $V^3$ . Considere os pontos:

$$A = (1, 0, 1)_\Sigma, \quad B = (-1, 0, 2)_\Sigma, \quad C = (0, 1, 1)_\Sigma \quad \text{e} \quad D = (1, 2, 1)_\Sigma.$$

Temos que o volume do tetraedro de vértices  $A, B, C$  e  $D$  é igual a:

- (a)  $\frac{1}{2}$ ;
- (b) 2;
- (c) 1;
- (d)  $\frac{1}{3}$ ;
- (e)  $\frac{1}{4}$ .

**Q2.** Seja  $\mathcal{B}$  uma base ortonormal de  $V^3$  e sejam  $A, B, C \in E^3$  pontos tais que:

$$\overrightarrow{AB} = (1, 3, 2)_\mathcal{B} \quad \text{e} \quad \overrightarrow{AC} = (-1, 2, 1)_\mathcal{B}.$$

Temos que a área do triângulo de vértices  $A, B$  e  $C$  é igual a:

- (a) 3;
- (b)  $\sqrt{62}$ ;
- (c)  $\frac{1}{2}\sqrt{13}$ ;
- (d)  $\frac{1}{2}\sqrt{17}$ ;
- (e)  $\frac{1}{2}\sqrt{35}$ .

**Q3.** Seja  $\mathcal{B}$  uma base ortonormal positiva de  $V^3$ . Considere os vetores

$$\vec{v} = (1, 0, 1)_\mathcal{B} \quad \text{e} \quad \vec{w} = (-1, 2, 0)_\mathcal{B}$$

e seja  $\mathcal{C} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$  uma base ortonormal positiva de  $V^3$  tal que  $\vec{e}_1$  tenha a mesma direção e sentido que  $\vec{v}$ ,  $\vec{e}_2$  seja uma combinação linear de  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$  e tal que a primeira coordenada de  $\vec{e}_2$  na base  $\mathcal{B}$  seja positiva. A soma das coordenadas do vetor  $\vec{e}_3$  na base  $\mathcal{B}$  é igual a:

- (a)  $-\frac{1}{3}$ ;
- (b) 0;
- (c)  $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ;
- (d)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ;
- (e)  $\frac{1}{3}$ .

**Q4.** Sejam  $\vec{v}, \vec{w}, \vec{z} \in V^3$  tais que  $[\vec{v}, \vec{w}, \vec{z}] = 3$ . Temos que o produto misto  $[\vec{v} + \vec{w} + \vec{z}, \vec{w} - 2\vec{z}, 2\vec{v} + \vec{z}]$

é igual a:

- (a) 5;
- (b) 15;
- (c) -6;
- (d) -5;
- (e) -15.

**Q5.** Sejam  $A, B, C \in E^3$  os vértices de um triângulo equilátero de lado unitário e sejam  $\vec{e}_1 = \overrightarrow{AB}$  e  $\vec{e}_2 = \overrightarrow{AC}$ . Seja  $\vec{e}_3$  um vetor ortogonal a  $\vec{e}_1$  e a  $\vec{e}_2$  tal que  $\|\vec{e}_3\| = 2$ . Se  $\vec{v} = (1, 3, 2)_{\mathcal{B}}$ , em que  $\mathcal{B}$  é a base definida por  $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ , então  $\|\vec{v}\|$  será igual a:

- (a) 4;
- (b)  $\sqrt{10}$ ;
- (c)  $\sqrt{29}$ ;
- (d)  $3\sqrt{2}$ ;
- (e)  $\sqrt{14}$ .

**Q6.** Seja  $\Sigma = (O, \mathcal{B})$  um sistema de coordenadas em  $E^3$ . Considere a reta  $r$  cuja equação vetorial é:

$$r : X = (-1, 2, 1)_{\Sigma} + \lambda(1, 3, 2)_{\mathcal{B}}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Assinale a alternativa correspondente a um ponto  $Q$  que pertença à reta  $r$ :

- (a)  $Q = (1, -2, -1)_{\Sigma}$ ;
- (b)  $Q = (1, 3, 2)_{\Sigma}$ ;
- (c)  $Q = (2, 8, 5)_{\Sigma}$ ;
- (d)  $Q = (1, 8, 5)_{\Sigma}$ ;
- (e)  $Q = (0, 5, 2)_{\Sigma}$ .

**Q7.** Considere as seguintes afirmações:

- (I) se  $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$  for uma base de  $V^3$ , então  $\mathcal{C} = \{\vec{e}_2, \vec{e}_1, -2\vec{e}_3\}$  será uma base de  $V^3$  com a mesma orientação que  $\mathcal{B}$ ;
- (II) para quaisquer vetores não nulos  $\vec{v}, \vec{w} \in V^3$ , existe um vetor  $\vec{x} \in V^3$  tal que  $\vec{v} \wedge \vec{x} = \vec{w}$ ;
- (III) para quaisquer vetores não nulos  $\vec{v}, \vec{x}, \vec{y} \in V^3$ , se  $\vec{v} \wedge \vec{x} = \vec{v} \wedge \vec{y}$ , então  $\vec{x} = \vec{y}$ .

Assinale a alternativa correta:

- (a) apenas a afirmação (II) é verdadeira;
- (b) todas as afirmações são falsas;
- (c) todas as afirmações são verdadeiras;
- (d) apenas a afirmação (I) é verdadeira;
- (e) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

**Q8.** Seja  $\Sigma = (O, \mathcal{B})$  um sistema de coordenadas em  $E^3$ . Seja  $a \in \mathbb{R}$  e considere as retas  $r$  e  $s$  cujas equações vetoriais são:

$$\begin{aligned} r : X &= (1, a, 1)_{\Sigma} + \lambda(-1, 0, 2)_{\mathcal{B}}, \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad \text{e} \\ s : X &= (0, 1, a)_{\Sigma} + \lambda(1, 0, 1)_{\mathcal{B}}, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Temos que as retas  $r$  e  $s$  serão reversas se, e somente se:

- (a)  $a \neq 1$ ;
- (b)  $a \neq 3$ ;
- (c)  $a > 1$ ;
- (d)  $a \neq 0$ ;
- (e)  $a = 1$ .

**Q9.** Considere as seguintes afirmações:

- (I) se  $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$  for uma base de  $V^3$  tal que  $[\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3] = 1$ , então  $\mathcal{B}$  será ortonormal;
- (II) para quaisquer vetores  $\vec{v}, \vec{w} \in V^3$ , vale que  $\vec{v} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = \vec{0}$ ;
- (III) para quaisquer vetores  $\vec{v}, \vec{w} \in V^3$  e qualquer  $\lambda \in \mathbb{R}$ , se  $\lambda\vec{w} \neq \vec{0}$ , então  $\text{proj}_{\vec{w}} \vec{v} = \text{proj}_{\lambda\vec{w}} \vec{v}$ .

Assinale a alternativa correta:

- (a) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras;
- (b) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras;
- (c) apenas a afirmação (III) é verdadeira;
- (d) todas as afirmações são verdadeiras;
- (e) todas as afirmações são falsas.

**Q10.** Seja  $\mathcal{B}$  uma base ortonormal de  $V^3$  e considere os vetores:

$$\vec{v} = (1, 0, 1)_{\mathcal{B}}, \quad \vec{w} = (1, 1, 1)_{\mathcal{B}} \quad \text{e} \quad \vec{z} = (1, 1, -2)_{\mathcal{B}}.$$

Seja  $\pi$  um plano paralelo a  $\vec{v}$  e a  $\vec{w}$  e suponha que  $\vec{z}_1, \vec{z}_2 \in V^3$  sejam tais que  $\vec{z} = \vec{z}_1 + \vec{z}_2$ ,  $\vec{z}_1$  seja paralelo a  $\pi$  e  $\vec{z}_2$  seja ortogonal a  $\pi$ . Temos que a soma das coordenadas de  $\vec{z}_1$  na base  $\mathcal{B}$  é igual a:

- (a) 0;
- (b) 1;
- (c)  $-1$ ;
- (d)  $\frac{1}{3}$ ;
- (e)  $-2$ .