

Em todas as questões da prova, considera-se fixada uma orientação do espaço.

Q1. Sejam $\vec{v}, \vec{w}, \vec{z} \in V^3$ tais que $[\vec{v}, \vec{w}, \vec{z}] = 3$. Temos que o produto misto $[\vec{v} + \vec{w} + \vec{z}, \vec{w} - 2\vec{z}, 2\vec{v} + \vec{z}]$

é igual a:

- (a) -15 ;
- (b) 15 ;
- (c) -6 ;
- (d) 5 ;
- (e) -5 .

Q2. Seja $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ um sistema de coordenadas em E^3 . Seja $a \in \mathbb{R}$ e considere as retas r e s cujas equações vetoriais são:

$$\begin{aligned} r : X &= (1, a, 1)_{\Sigma} + \lambda(-1, 0, 2)_{\mathcal{B}}, \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad \text{e} \\ s : X &= (0, 1, a)_{\Sigma} + \lambda(1, 0, 1)_{\mathcal{B}}, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Temos que as retas r e s serão reversas se, e somente se:

- (a) $a > 1$;
- (b) $a \neq 3$;
- (c) $a \neq 1$;
- (d) $a = 1$;
- (e) $a \neq 0$.

Q3. Sejam $A, B, C \in E^3$ os vértices de um triângulo equilátero de lado unitário e sejam $\vec{e}_1 = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{e}_2 = \overrightarrow{AC}$. Seja \vec{e}_3 um vetor ortogonal a \vec{e}_1 e a \vec{e}_2 tal que $\|\vec{e}_3\| = 2$. Se $\vec{v} = (1, 3, 2)_{\mathcal{B}}$, em que \mathcal{B} é a base definida por $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, então $\|\vec{v}\|$ será igual a:

- (a) $\sqrt{14}$;
- (b) $3\sqrt{2}$;
- (c) $\sqrt{10}$;
- (d) $\sqrt{29}$;
- (e) 4 .

Q4. Seja \mathcal{B} uma base ortonormal de V^3 e considere os vetores:

$$\vec{v} = (1, 0, 1)_{\mathcal{B}}, \quad \vec{w} = (1, 1, 1)_{\mathcal{B}} \quad \text{e} \quad \vec{z} = (1, 1, -2)_{\mathcal{B}}.$$

Seja π um plano paralelo a \vec{v} e a \vec{w} e suponha que $\vec{z}_1, \vec{z}_2 \in V^3$ sejam tais que $\vec{z} = \vec{z}_1 + \vec{z}_2$, \vec{z}_1 seja paralelo a π e \vec{z}_2 seja ortogonal a π . Temos que a soma das coordenadas de \vec{z}_1 na base \mathcal{B} é igual a:

- (a) 1;
- (b) -2;
- (c) -1;
- (d) $\frac{1}{3}$;
- (e) 0.

Q5. Considere as seguintes afirmações:

- (I) se $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ for uma base de V^3 , então $\mathcal{C} = \{\vec{e}_2, \vec{e}_1, -2\vec{e}_3\}$ será uma base de V^3 com a mesma orientação que \mathcal{B} ;
- (II) para quaisquer vetores não nulos $\vec{v}, \vec{w} \in V^3$, existe um vetor $\vec{x} \in V^3$ tal que $\vec{v} \wedge \vec{x} = \vec{w}$;
- (III) para quaisquer vetores não nulos $\vec{v}, \vec{x}, \vec{y} \in V^3$, se $\vec{v} \wedge \vec{x} = \vec{v} \wedge \vec{y}$, então $\vec{x} = \vec{y}$.

Assinale a alternativa correta:

- (a) apenas a afirmação (I) é verdadeira;
- (b) todas as afirmações são verdadeiras;
- (c) apenas a afirmação (II) é verdadeira;
- (d) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras;
- (e) todas as afirmações são falsas.

Q6. Seja \mathcal{B} uma base ortonormal de V^3 e sejam $A, B, C \in E^3$ pontos tais que:

$$\overrightarrow{AB} = (1, 3, 2)_{\mathcal{B}} \quad \text{e} \quad \overrightarrow{AC} = (-1, 2, 1)_{\mathcal{B}}.$$

Temos que a área do triângulo de vértices A, B e C é igual a:

- (a) $\sqrt{62}$;
- (b) $\frac{1}{2}\sqrt{35}$;
- (c) $\frac{1}{2}\sqrt{17}$;
- (d) 3;
- (e) $\frac{1}{2}\sqrt{13}$.

Q7. Seja \mathcal{B} uma base ortonormal positiva de V^3 . Considere os vetores

$$\vec{v} = (1, 0, 1)_{\mathcal{B}} \quad \text{e} \quad \vec{w} = (-1, 2, 0)_{\mathcal{B}}$$

e seja $\mathcal{C} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ uma base ortonormal positiva de V^3 tal que \vec{e}_1 tenha a mesma direção e sentido que \vec{v} , \vec{e}_2 seja uma combinação linear de \vec{v} e \vec{w} e tal que a primeira coordenada de \vec{e}_2 na base \mathcal{B} seja positiva. A soma das coordenadas do vetor \vec{e}_3 na base \mathcal{B} é igual a:

- (a) 0;
- (b) $\frac{1}{3}$;
- (c) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$;
- (d) $-\frac{1}{3}$;
- (e) $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Q8. Seja $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ um sistema de coordenadas em E^3 . Considere a reta r cuja equação vetorial é:

$$r : X = (-1, 2, 1)_{\Sigma} + \lambda(1, 3, 2)_{\mathcal{B}}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Assinale a alternativa correspondente a um ponto Q que pertença à reta r :

- (a) $Q = (1, 8, 5)_{\Sigma}$;
- (b) $Q = (1, -2, -1)_{\Sigma}$;
- (c) $Q = (1, 3, 2)_{\Sigma}$;
- (d) $Q = (2, 8, 5)_{\Sigma}$;
- (e) $Q = (0, 5, 2)_{\Sigma}$.

Q9. Seja $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ um sistema de coordenadas em E^3 , em que \mathcal{B} é uma base ortonormal de V^3 . Considere os pontos:

$$A = (1, 0, 1)_{\Sigma}, \quad B = (-1, 0, 2)_{\Sigma}, \quad C = (0, 1, 1)_{\Sigma} \quad \text{e} \quad D = (1, 2, 1)_{\Sigma}.$$

Temos que o volume do tetraedro de vértices A, B, C e D é igual a:

- (a) 2;
- (b) $\frac{1}{4}$;
- (c) $\frac{1}{2}$;
- (d) 1;
- (e) $\frac{1}{3}$.

Q10. Considere as seguintes afirmações:

- (I) se $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ for uma base de V^3 tal que $[\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3] = 1$, então \mathcal{B} será ortonormal;
- (II) para quaisquer vetores $\vec{v}, \vec{w} \in V^3$, vale que $\vec{v} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = \vec{0}$;
- (III) para quaisquer vetores $\vec{v}, \vec{w} \in V^3$ e qualquer $\lambda \in \mathbb{R}$, se $\lambda \vec{w} \neq \vec{0}$, então $\text{proj}_{\vec{w}} \vec{v} = \text{proj}_{\lambda \vec{w}} \vec{v}$.

Assinale a alternativa correta:

- (a) apenas a afirmação (III) é verdadeira;
- (b) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras;
- (c) todas as afirmações são falsas;
- (d) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras;
- (e) todas as afirmações são verdadeiras.