Gabarito da Segunda Prova

MAT0111 – Cálculo Diferencial e Integral I

Prof. Daniel Victor Tausk

17/05/2013

Questão 1. (valor 2,0 pontos) Calcule a derivada da função $f : \,]0, +\infty[\, \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = (x+1)^2 \operatorname{arctg}(\ln x),$$

para todo $x > 0$.

Solução. Temos:

$$f'(x) = 2(x+1)\operatorname{arctg}(\ln x) + (x+1)^2 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(\operatorname{arctg}(\ln x)\big),$$

onde:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(\operatorname{arctg}(\ln x)\big) = \frac{1}{\big(1 + (\ln x)^2\big)x}\ .$$

Portanto:

$$f'(x) = 2(x+1)\operatorname{arctg}(\ln x) + \frac{(x+1)^2}{\big(1 + (\ln x)^2\big)x}\ ,$$

para todo $x > 0$.

Questão 2. Considere a função $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \frac{\ln x}{x},$$

para todo $x > 0$.

(a) (valor 1,0 ponto) Estude o sinal de f' e determine os pontos de máximo e mínimo local e global de f.

(b) (valor 1,0 ponto) Estude o sinal de f'' e determine os pontos de inflexão de f.

(c) (valor 0,5 ponto) Calcule os limites $\lim_{x\to 0} f(x)$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

(d) (valor 0,5 ponto) Esboce o gráfico de f, levando em conta crescimento/decrescimento, concavidade, interseção com os eixos coordenados e assíntotas horizontais e verticais.

Solução.

(a) Temos:

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}\,x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2},$$

para todo $x > 0$. Logo, para todo $x > 0$, temos:

$$f'(x) > 0 \iff \ln x < 1 \iff x < e,$$

e:

$$f'(x) < 0 \iff x > e.$$

Assim, f é estritamente crescente no intervalo $]0, e]$ e estritamente decrescente no intervalo $[e, +\infty[$. Segue que $x = e$ é um ponto de máximo global estrito para f e que f não possui outros pontos de máximo ou mínimo local.

(b) Temos:

$$f''(x) = \frac{-\frac{1}{x}\,x^2 - (1 - \ln x)(2x)}{x^4} = \frac{-3x + 2x\ln x}{x^4} = \frac{2\ln x - 3}{x^3},$$

para todo $x > 0$. Assim:

$$f''(x) > 0 \iff 2\ln x > 3 \iff x > e^{\frac{3}{2}},$$

e:

$$f''(x) < 0 \iff 2\ln x < 3 \iff x < e^{\frac{3}{2}},$$

para todo $x > 0$. Portanto f é côncava para baixo no intervalo $]0, e^{\frac{3}{2}}]$ e côncava para cima no intervalo $[e^{\frac{3}{2}}, +\infty[$, donde $e^{\frac{3}{2}}$ é o único ponto de inflexão de f.

(c) Temos:

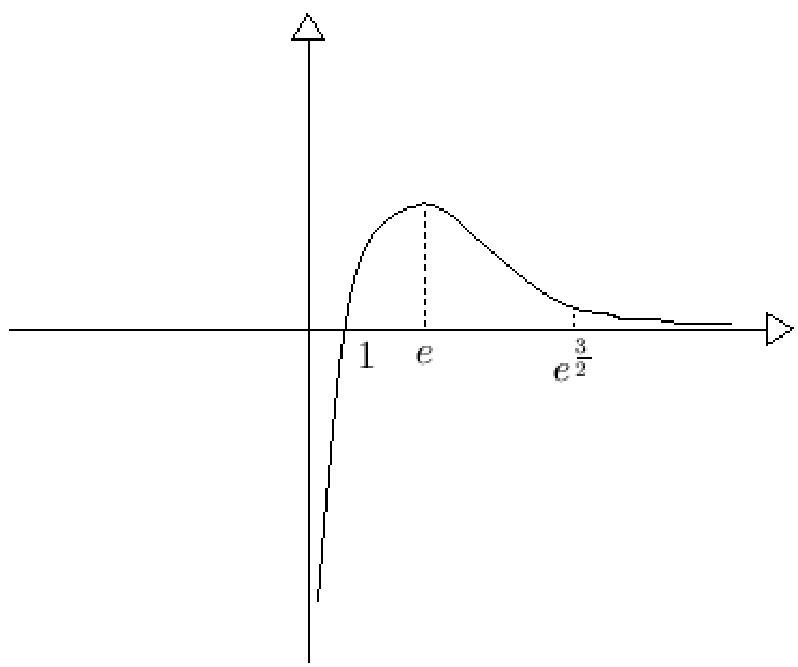
$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x} = -\infty,$$

já que $\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$ e $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$. Também:

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{y\to +\infty} \frac{y}{e^y} = 0,$$

onde utilizamos a mudança de variável $y = \ln x$.

(d) O gráfico de f não corta o eixo das ordenadas, já que 0 não pertence ao domínio de f e corta o eixo das abscissas apenas no ponto $(1,0)$, já que $x = 1$ é a única solução da equação $f(x) = 0$. O eixo das ordenadas é uma assíntota vertical ao gráfico de f e o eixo das abscissas é uma assíntota horizontal. O esboço do gráfico (fora de escala) fica assim:



Questão 3. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \sqrt[3]{1+x},$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Denote por p_n o polinômio de Taylor de ordem n de f em torno da origem.

(a) (valor 1,0 ponto) Determine p_2.

(b) (valor 1,0 ponto) Mostre que:

$$p_2(x) < f(x) < p_2(x) + \frac{5}{81}\,x^3,$$

para todo $x > 0$.

Solução.

(a) Temos:

$$f(x) = (1+x)^{\frac{1}{3}}, \quad f'(x) = \frac{1}{3}(1+x)^{-\frac{2}{3}}, \quad f''(x) = -\frac{2}{9}(1+x)^{-\frac{5}{3}},$$

para todo $x \neq -1$. Assim:

$$p_2(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 = 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9}.$$

(b) Dado $x > 0$, sabemos que:

$$f(x) = p_2(x) + \frac{f^{(3)}(c)x^3}{3!},$$

para algum $c \in \,]0, x[$. Temos:

$$f^{(3)}(c) = \frac{10}{27}\,(1+c)^{-\frac{8}{3}}.$$

Como:

$$0 < (1+c)^{-\frac{8}{3}} < 1,$$

concluímos que:

$$0 < \frac{f^{(3)}(c)x^3}{3!} < \frac{10}{27 \cdot 6}\,x^3 = \frac{5}{81}\,x^3,$$

e portanto:

$$p_2(x) < f(x) < p_2(x) + \frac{5}{81}\,x^3.$$

Questão 4.

(a) (valor 1,5 pontos) Mostre que:

$$x < (1+x)\ln(1+x),$$

para todo $x > 0$.

(b) (valor 1,5 pontos) Mostre que para todo $k \in \,]1, e[$ a equação:

$$(1+x)^{\frac{1}{x}} = k$$

possui exatamente uma solução $x > 0$.

Solução.

(a) Considere a função $f : \,]-1, +\infty[\to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = x - (1+x)\ln(1+x),$$

para todo $x > -1$. Temos:

$$f'(x) = 1 - \ln(1+x) - \frac{1+x}{1+x} = -\ln(1+x),$$

para todo $x > -1$. Para $x > 0$ temos que $\ln(1+x) > 0$ e portanto $f'(x) < 0$. Assim, f é estritamente decrescente no intervalo $[0, +\infty[$. Como $f(0) = 0$, segue que $f(x) < 0$ para todo $x > 0$, o que nos dá a desigualdade desejada.

(b) Considere a função $g : \,]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ definida por:

$$g(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}},$$

para todo $x > 0$. Temos:

$$g(x) = e^{\frac{\ln(1+x)}{x}},$$

e portanto:

$$g'(x) = e^{\frac{\ln(1+x)}{x}} \, \frac{\frac{1}{1+x}\,x - \ln(1+x)}{x^2},$$

para todo $x > 0$. Segue do resultado do item (a) que:

$$\frac{x}{1+x} < \ln(1+x),$$

para todo $x > 0$ e portanto que $g'(x) < 0$, para todo $x > 0$. Assim, g é estritamente decrescente e em particular injetora, de modo que a equação $g(x) = k$ possui no máximo uma solução. Vamos agora demonstrar a existência de uma solução $x > 0$ para essa equação. Como g é contínua e seu domínio é um intervalo, em vista do Teorema do Valor Intermediário, é suficiente mostrar que existem $x_1, x_2 > 0$ tais que $g(x_1) > k$ e $g(x_2) < k$. Note que:

$$\lim_{x \to 0} g(x) = e > k,$$

de modo que deve existir $x_1 > 0$ com $g(x_1) > k$. Temos também:

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} e^{\frac{\ln(1+x)}{x}} = e^0 = 1 < k;$$

de fato:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{y \to +\infty} \frac{y}{e^y - 1} = \lim_{y \to +\infty} \left[\left(\frac{e^y}{y} - \frac{1}{y} \right)^{-1} \right] = 0,$$

onde utilizamos a mudança de variável $y = \ln(1+x)$. Assim, deve existir $x_2 > 0$ tal que $g(x_2) < k$. A conclusão segue.