Gabarito da Primeira Prova

MAT5798 – Medida e Integração

Prof. Daniel Victor Tausk

29/04/2011

Questão 1. (valor 2,5 pontos) Seja $\mu : \mathcal{R} \to [0, +\infty[$ uma medida finitamente aditiva finita definida num anel $\mathcal{R}$. Mostre que:

(a) se $A, B \in \mathcal{R}$ então:

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B);$$

(b) se $A, B, C \in \mathcal{R}$ então:

$$\mu(A \cup B \cup C) = \mu(A) + \mu(B) + \mu(C) - \mu(A \cap B) - \mu(A \cap C) - \mu(B \cap C) + \mu(A \cap B \cap C).$$

(sugestão para o item (b): use o item (a).)

Solução. Note que $A \cup B = A \cup (B \setminus A)$, sendo que A e $B \setminus A$ são elementos disjuntos do anel $\mathcal{R}$. Logo:

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A). \tag{1}$$

Mas $B \setminus A = B \setminus (A \cap B)$ e como $\mu(A \cap B) < +\infty$ e $A \cap B \subset B$, temos:

$$\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A \cap B). \tag{2}$$

A tese do item (a) segue imediatamente de (1) e (2). Para o item (b), note que $A \cup B \cup C = (A \cup B) \cup C$ e daí, usando o item (a), obtemos:

$$\mu(A \cup B \cup C) = \mu(A \cup B) + \mu(C) - \mu\big((A \cup B) \cap C\big). \tag{3}$$

Usando novamente o item (a) obtemos:

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B), \tag{4}$$

e:

$$\mu\big((A \cup B) \cap C\big) = \mu\big((A \cap C) \cup (B \cap C)\big) = \mu(A \cap C) + \mu(B \cap C) - \mu(A \cap B \cap C). \tag{5}$$

A tese do item (b) segue imediatamente de (3), (4) e (5).

Questão 2. (valor 2,5 pontos) Seja $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty[$ uma medida σ-aditiva finita definida num σ-anel $\mathcal{A}$. Seja $(E_i)_{i\in I}$ uma família de elementos de $\mathcal{A}$ tais que $E_i \cap E_j = \emptyset$, para todos $i, j \in I$ com $i \neq j$. Mostre que o conjunto:

$$\big\{ i \in I : \mu(E_i) > 0 \big\}$$

é enumerável. (sugestão: para cada inteiro positivo n, considere o conjunto $\big\{ i \in I : \mu(E_i) > \frac{1}{n} \big\}$.)

Solução. Dado um inteiro positivo n, observamos que o conjunto:

$$I_n = \big\{ i \in I : \mu(E_i) > \tfrac{1}{n} \big\}$$

é finito. De fato, caso contrário, ele possuiria um subconjunto infinito enumerável J e daí:

$$\mu\Big(\bigcup_{i\in J} E_i \Big) = \sum_{i\in J} \mu(E_i) = +\infty,$$

contradizendo a finitude de μ. Mas, obviamente, $\mu(E_i) > 0$ se e somente se existe um inteiro positivo n tal que $\mu(E_i) > \frac{1}{n}$, ou seja:

$$\big\{ i \in I : \mu(E_i) > 0 \big\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n,$$

o que prova que $\big\{ i \in I : \mu(E_i) > 0 \big\}$ é enumerável.

Questão 3. (valor 2,5 pontos) Seja $(\mathcal{C}_i)_{i\in I}$ uma família de classes compactas. Considere a coleção $\mathcal{C}$ definida por:

$$\mathcal{C} = \Big\{ \prod_{i\in I} C_i : C_i \in \mathcal{C}_i,\ i \in I \Big\}.$$

Mostre que $\mathcal{C}$ é uma classe compacta.

Solução. Seja $(C^n)_{n\geq 1}$ uma seqüência em $\mathcal{C}$ tal que $\bigcap_{n=1}^{\infty} C^n = \emptyset$. Devemos mostrar que existe $N \geq 1$ tal que $\bigcap_{n=1}^{N} C^n = \emptyset$. Como $C^n \in \mathcal{C}$, podemos escrever:

$$C^n = \prod_{i\in I} C_i^n,$$

para todo $n \geq 1$, onde $C_i^n \in \mathcal{C}_i$, para todo $i \in I$. Evidentemente:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} C^n = \prod_{i\in I} \bigcap_{n=1}^{\infty} C_i^n,$$

e como um produto cartesiano é vazio se e somente se um de seus fatores é vazio, concluímos que existe $i_0 \in I$ tal que:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} C_{i_0}^n = \emptyset.$$

Como $\mathcal{C}_{i_0}$ é uma classe compacta, segue que existe $N \geq 1$ tal que:

$$\bigcap_{n=1}^{N} C_{i_0}^n = \emptyset.$$

Daí:

$$\bigcap_{n=1}^{N} C^n = \prod_{i\in I} \bigcap_{n=1}^{N} C_i^n = \emptyset.$$

Questão 4. (valor 2,5 pontos) Seja X um espaço topológico e denote por $\mathcal{B}(X)$ a sua σ-álgebra de Borel. Seja $\mu : \mathcal{B}(X) \to [0, +\infty[$ uma medida σ-aditiva finita. Seja $\mathcal{G}$ a coleção formada pelos Boreleanos $B \in \mathcal{B}(X)$ tais que para todo $\varepsilon > 0$ existem um aberto $U \subset X$ e um fechado $F \subset X$ tais que $F \subset B \subset U$, $\mu(B \setminus F) < \varepsilon$ e $\mu(U \setminus B) < \varepsilon$.

(a) Mostre que $\mathcal{G}$ é uma σ-álgebra de partes de X.

(b) Suponha que todo aberto de X seja uma união enumerável de fechados[1]. Mostre que todo aberto de X pertence a $\mathcal{G}$ e conclua que $\mathcal{G} = \mathcal{B}(X)$.

Solução. Note que $B = \emptyset$ pertence a $\mathcal{G}$, pois para todo $\varepsilon > 0$ podemos tomar $U = F = \emptyset$. Logo $\mathcal{G} \neq \emptyset$. Seja $(B_n)_{n\geq 1}$ uma seqüência em $\mathcal{G}$. Dado $\varepsilon > 0$, como $B_n \in \mathcal{G}$, existem um aberto U_n em X e um fechado F_n em X tais que $F_n \subset B_n \subset U_n$ e:

$$\mu(B_n \setminus F_n) < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}, \quad \mu(U_n \setminus B_n) < \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

Sejam $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$, $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$ e $F' = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$. Temos $F' \subset B \subset U$ e:

$$U \setminus B \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (U_n \setminus B_n), \quad B \setminus F' \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (B_n \setminus F_n),$$

donde:

$$\mu(U \setminus B) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(U_n \setminus B_n) < \varepsilon, \quad \mu(B \setminus F') \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n \setminus F_n) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Temos que U é aberto, mas F' não é necessariamente fechado. Note, no entanto, que a seqüência:

$$F' \setminus \bigcup_{n=1}^{N} F_n, \quad N = 1, 2, \ldots,$$

é decrescente e tem interseção vazia. Como a medida μ é finita, segue que:

$$\lim_{N \to +\infty} \mu\Big(F' \setminus \bigcup_{n=1}^{N} F_n\Big) = 0,$$

donde existe $N \geq 1$ tal que $\mu(F' \setminus F) < \frac{\varepsilon}{2}$, onde $F = \bigcup_{n=1}^{N} F_n$. Daí $F \subset B$, F é fechado e:

$$B \setminus F = (B \setminus F') \cup (F' \setminus F).$$

Segue que:

$$\mu(B \setminus F) \leq \mu(B \setminus F') + \mu(F' \setminus F) < \varepsilon.$$

Mostramos então que $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{G}$. Vamos mostrar agora que $\mathcal{G}$ é fechada por complementação. Dado $B \in \mathcal{G}$ e $\varepsilon > 0$, obtemos um fechado F

[1] Isso vale, por exemplo, se X for um espaço métrico.

e um aberto U tais que $F \subset B \subset U$ e $\mu(U \setminus B) < \varepsilon$, $\mu(B \setminus F) < \varepsilon$. Note que $U^{\mathrm{c}} \subset B^{\mathrm{c}} \subset F^{\mathrm{c}}$, U^{c} é fechado, F^{c} é aberto e:

$$B^{\mathrm{c}} \setminus U^{\mathrm{c}} = U \setminus B, \quad F^{\mathrm{c}} \setminus B^{\mathrm{c}} = B \setminus F,$$

donde:

$$\mu(B^{\mathrm{c}} \setminus U^{\mathrm{c}}) < \varepsilon, \quad \mu(F^{\mathrm{c}} \setminus B^{\mathrm{c}}) < \varepsilon.$$

Logo $B^{\mathrm{c}} \in \mathcal{G}$. Isso completa a solução do item (a). Supondo agora que todo aberto seja uma união enumerável de fechados[2], vamos mostrar que todo aberto pertence a $\mathcal{G}$. Seguirá imediatamente então que $\mathcal{G}$ contém (e portanto é igual a) $\mathcal{B}(X)$, a σ-álgebra gerada pela coleção de todos os abertos. Se B é um aberto de X então, dado $\varepsilon > 0$, podemos tomar simplesmente $U = B$. Escreva agora:

$$B = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n,$$

sendo cada F_n fechado e note que a seqüência:

$$B \setminus \bigcup_{n=1}^{N} F_n, \quad N = 1, 2, \ldots,$$

é decrescente e possui interseção vazia. Como a medida μ é finita, segue que:

$$\lim_{N \to +\infty} \mu\Big(B \setminus \bigcup_{n=1}^{N} F_n\Big) = 0,$$

donde existe $N \geq 1$ tal que $\mu(B \setminus F) < \varepsilon$, onde $F = \bigcup_{n=1}^{N} F_n$. Obviamente, F é fechado e $F \subset B$. Logo $B \in \mathcal{G}$.

[2]Num espaço métrico, todo aberto U é união enumerável dos conjuntos fechados definidos por $\big\{x \in X : d(x, U^{\mathrm{c}}) \geq \frac{1}{n}\big\}$, $n = 1, 2, \ldots$.

Questão 5. (valor 2,5 pontos) Sejam X um espaço mensurável e Y um espaço topológico munido de sua σ-álgebra de Borel. Assuma que Y seja Hausdorff e possua base enumerável de abertos. Se $f : X \to Y$, $g : X \to Y$ são funções mensuráveis, mostre que o conjunto:

$$\big\{x \in X : f(x) = g(x)\big\}$$

é mensurável. (sugestão: esse conjunto é $(f, g)^{-1}(\Delta)$, onde Δ é a diagonal de $Y \times Y$. Use o fato que $\mathcal{B}(Y) \otimes \mathcal{B}(Y) = \mathcal{B}(Y \times Y)$.)

Solução. A função:

$$(f, g) : X \longrightarrow Y \times Y$$

(cujas funções coordenadas são f e g) é mensurável se $Y \times Y$ estiver munido da σ-álgebra produto $\mathcal{B}(Y) \otimes \mathcal{B}(Y)$; de fato, uma função a valores num produto cartesiano de espaços mensuráveis (munido da σ-álgebra produto) é mensurável se e somente se cada coordenada o for. Como Y tem base enumerável de abertos, temos $\mathcal{B}(Y) \otimes \mathcal{B}(Y) = \mathcal{B}(Y \times Y)$. Dado que Y é Hausdorff, temos que a diagonal Δ de $Y \times Y$ é fechada e portanto pertence a $\mathcal{B}(Y \times Y)$. Daí:

$$(f, g)^{-1}(\Delta) = \big\{x \in X : f(x) = g(x)\big\}$$

é mensurável, sendo a imagem inversa de um conjunto mensurável por uma função mensurável.

Questão 6. (valor 2,5 pontos) Sejam X um espaço mensurável e M um espaço topológico com base enumerável de abertos. Nos itens abaixo, tanto M como a reta real $\mathbb{R}$ estão munidos das suas respectivas σ-álgebras de Borel.

(a) Sejam $f : X \to M$, $g : X \to M$ funções mensuráveis. Dada uma função contínua $d : M \times M \to \mathbb{R}$, mostre que a função:

$$d(f,g) : X \ni x \longmapsto d\big(f(x), g(x)\big) \in \mathbb{R}$$

é mensurável. (sugestão: recorde que $\mathcal{B}(M) \otimes \mathcal{B}(M) = \mathcal{B}(M \times M)$.)

(b) Se a topologia de M é induzida por uma métrica d e se $(f_n)_{n\geq 1}$ é uma seqüência de funções mensuráveis $f_n : X \to M$, mostre que o conjunto:

$$\big\{x \in X : \big(f_n(x)\big)_{n\geq 1} \text{ é uma seqüência de Cauchy em } M\big\}$$

é mensurável. (sugestão: x está nesse conjunto se e somente se para todo inteiro $k \geq 1$ existe um inteiro $n_0 \geq 1$ tal que para quaisquer inteiros $m, n \geq n_0$ vale que $d\big(f_n(x), f_m(x)\big) < \frac{1}{k}$. Reescreva essa sentença usando uniões e interseções de conjuntos.)

Solução. A função:

$$(f,g) : X \longrightarrow M \times M$$

(cujas funções coordenadas são f e g) é mensurável se $M \times M$ é munido da σ-álgebra produto $\mathcal{B}(M) \otimes \mathcal{B}(M)$; de fato, uma função a valores num produto cartesiano de espaços mensuráveis (munido da σ-álgebra produto) é mensurável se e somente se cada coordenada o for. Como M tem base enumerável de abertos, temos $\mathcal{B}(M) \otimes \mathcal{B}(M) = \mathcal{B}(M \times M)$. Assim (f,g) também é mensurável se $M \times M$ é munido da sua σ-álgebra de Borel. Mas, como d é contínua, ela é mensurável se tanto $M \times M$ como $\mathbb{R}$ estiverem munidos das suas respectivas σ-álgebras de Borel. Assim a função:

$$d(f,g) = d \circ (f,g)$$

é mensurável, sendo uma composição de funções mensuráveis. Isso completa a solução do item (a). Quanto ao item (b), note que o conjunto dos pontos $x \in X$ tais que a seqüência $\big(f_n(x)\big)_{n\geq 1}$ é de Cauchy é igual a:

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n_0=1}^{\infty} \bigcap_{m,n=n_0}^{\infty} C_{mn},$$

onde:

$$C_{mn} = \big\{x \in X : d\big(f_n(x), f_m(x)\big) < \tfrac{1}{k}\big\}.$$

Resta então verificar que C_{mn} é mensurável. Mas C_{mn} é a imagem inversa do intervalo aberto (um Boreleano) $\big]-\infty, \frac{1}{k}\big[$ pela função $d(f_n, f_m)$ que é, de acordo com o item (a), mensurável (já que a métrica d é uma função contínua).

Questão 7. (valor 2,5 pontos) Se $\mathcal{C}$ é uma coleção de conjuntos, defina:

$$\mathcal{C}' = \big\{A \cup B : A, B \in \mathcal{C}\big\} \cup \big\{A \setminus B : A, B \in \mathcal{C}\big\} \cup \{\emptyset\}.$$

(a) Mostre que $\mathcal{C} \subset \mathcal{C}'$ e que $\mathcal{C}'$ é enumerável se $\mathcal{C}$ o for.

(b) Defina uma seqüência $(\mathcal{C}_n)_{n\geq 0}$ fazendo $\mathcal{C}_0 = \mathcal{C}$ e $\mathcal{C}_{n+1} = (\mathcal{C}_n)'$, para todo $n \geq 0$. Mostre que:

$$\mathcal{R} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{C}_n$$

é o anel gerado por $\mathcal{C}$. Conclua que $\mathcal{R}$ é enumerável se $\mathcal{C}$ o for.

(c) Sejam $\mathcal{A}$ um σ-anel e $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty[$ uma medida σ-aditiva finita definida em $\mathcal{A}$. Considere a pseudo-métrica[3] $d : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ definida por $d(A, B) = \mu(A \triangle B)$, para todos $A, B \in \mathcal{A}$. Se $\mathcal{A}$ é o σ-anel gerado por uma coleção enumerável $\mathcal{C}$, mostre que o espaço pseudo-métrico $(\mathcal{A}, d)$ é separável (i.e., possui um subconjunto enumerável denso).

Solução. Note que se $A \in \mathcal{C}$ então $A = A \cup A \in \mathcal{C}'$, donde $\mathcal{C} \subset \mathcal{C}'$. Os conjuntos:

$$\big\{A \cup B : A, B \in \mathcal{C}\big\} \tag{6}$$

e:

$$\big\{A \setminus B : A, B \in \mathcal{C}\big\} \tag{7}$$

são, respectivamente, imagem direta do conjunto $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$ pelas aplicações $(A, B) \mapsto A \cup B$ e $(A, B) \mapsto A \setminus B$. Se $\mathcal{C}$ é enumerável então $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$ também é enumerável e portanto (6) e (7) também o são. Daí $\mathcal{C}'$ é também enumerável, sendo união de três conjuntos enumeráveis. Isso completa a solução do item (a). Para o item (b), note que se uma coleção $\mathcal{C}$ estiver contida num anel então $\mathcal{C}'$ também estará contida nesse anel; segue então diretamente por indução que $\mathcal{C}_n$ está contido no anel gerado por $\mathcal{C}$, para todo $n \geq 0$. Logo $\mathcal{R}$ está contido no anel gerado por $\mathcal{C}$. Como obviamente $\mathcal{C} \subset \mathcal{R}$, para mostrar que $\mathcal{R}$ contém o (e portanto é igual ao) anel gerado por $\mathcal{C}$, é suficiente verificar que $\mathcal{R}$ é um anel. Temos que $\mathcal{R} \neq \emptyset$, pois $\emptyset \in \mathcal{C}_1$. Dados $A, B \in \mathcal{R}$, como a seqüência $(\mathcal{C}_n)_{n\geq 0}$ é crescente, temos que existe um $n \geq 0$ tal que $A, B \in \mathcal{C}_n$ (tome $n = \max\{n_1, n_2\}$, onde n_1 é tal que $A \in \mathcal{C}_{n_1}$ e n_2 é tal que $B \in \mathcal{C}_{n_2}$). Daí $A \cup B$ e $A \setminus B$ pertencem a $\mathcal{C}_{n+1} = (\mathcal{C}_n)'$ e portanto pertencem a $\mathcal{R}$. Obviamente, $\mathcal{R}$ é enumerável se $\mathcal{C}$ o for, sendo uma união enumerável dos conjuntos enumeráveis $\mathcal{C}_n$. Isso completa a solução do item (b). Quanto ao item (c), observe que se $\mathcal{R}$ é o anel gerado por $\mathcal{C}$ então $\mathcal{C} \subset \mathcal{R} \subset \mathcal{A}$. Como $\mathcal{A}$ é o σ-anel gerado por $\mathcal{C}$, segue que também $\mathcal{A}$ é o σ-anel gerado pelo anel $\mathcal{R}$. Como μ é finita, em vista do Lema 5.2.7 (pg. 166) da apostila, temos que para todo $A \in \mathcal{A}$ e todo $\varepsilon > 0$ existe $B \in \mathcal{R}$ tal

[3] Isso significa que d satisfaz as condições usuais satisfeitas por uma métrica, exceto pelo fato que a distância entre pontos distintos pode ser nula.

que $d(A, B) = \mu(A \triangle B) < \varepsilon$. Isso significa que $\mathcal{R}$ é denso em $\mathcal{A}$. Mas, em virtude do item (b), $\mathcal{R}$ é enumerável. Logo $(\mathcal{A}, d)$ é separável.