Gabarito da Primeira Prova
MAT5798 – Medida e Integração

Prof. Daniel Victor Tausk

24/04/2018

Questão 1. (valor 2,5 pontos) Seja $\mathcal{C}$ uma classe compacta e seja $\mathcal{C}'$ a coleção formada pelas interseções enumeráveis de elementos de $\mathcal{C}$, i.e.:

$$\mathcal{C}' = \Big\{ \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n : (C_n)_{n\geq 1} \text{ uma sequência em } \mathcal{C} \Big\}.$$

Mostre que $\mathcal{C}'$ é uma classe compacta.

Solução. Seja $(C'_n)_{n\geq 1}$ uma sequência em $\mathcal{C}'$ com $\bigcap_{n=1}^{\infty} C'_n = \emptyset$. Para cada $n \geq 1$, escolha uma sequência $(C_{nm})_{m\geq 1}$ em $\mathcal{C}$ tal que:

$$C'_n = \bigcap_{m=1}^{\infty} C_{nm}.$$

Daí $(C_{nm})_{n,m\geq 1}$ é uma família enumerável em $\mathcal{C}$ com interseção vazia. Como $\mathcal{C}$ é uma classe compacta, essa família possui uma subfamília finita com interseção vazia, i.e., existem pares (n_1, m_1), …, (n_k, m_k) de inteiros positivos tais que:

$$\bigcap_{i=1}^{k} C_{n_i m_i} = \emptyset.$$

Como $C'_{n_i} \subset C_{n_i m_i}$, segue que a interseção $\bigcap_{i=1}^{k} C'_{n_i}$ também é vazia, o que completa a demonstração.

Questão 2. Sejam $\mathcal{A}$ um σ-anel, $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ uma medida σ-aditiva e Y um conjunto. Suponha que $\mu(A) = 0$ para todo $A \in \mathcal{A}$ tal que $A \cap Y = \emptyset$. Denote por $\mathcal{A}|_Y$ o σ-anel definido por:

$$\mathcal{A}|_Y = \big\{ A \cap Y : A \in \mathcal{A} \big\}.$$

(a) (valor 1,0 ponto) Mostre que existe uma (automaticamente única) função $\nu : \mathcal{A}|_Y \to [0, +\infty]$ tal que

$$\nu(A \cap Y) = \mu(A),$$

para todo $A \in \mathcal{A}$.

(b) (valor 1,5 pontos) Mostre que a função ν definida no item (a) é uma medida σ-aditiva.

Solução. Para mostrar que a função ν existe, devemos verificar que para quaisquer $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$, se $A_1 \cap Y = A_2 \cap Y$, então $\mu(A_1) = \mu(A_2)$. Para ver isso, note que $A_1 \cap Y = A_2 \cap Y$ implica que a diferença simétrica $A_1 \triangle A_2$ é disjunta de Y e portanto $\mu(A_1 \triangle A_2) = 0$. Segue então do resultado do item (b) do Exercício 3 da segunda lista que $\mu(A_1) = \mu(A_2)$. A unicidade de ν é óbvia, já que a condição dada no enunciado dá o valor de ν em qualquer elemento do seu domínio. Isso completa a resolução do item (a). Para o item (b), note primeiro que:

$$\nu(\emptyset) = \nu(\emptyset \cap Y) = \mu(\emptyset) = 0.$$

Seja agora dada uma sequência $(C_n)_{n \geq 1}$ em $\mathcal{A}|_Y$ de conjuntos dois a dois disjuntos. Para cada $n \geq 1$, escolha $A_n \in \mathcal{A}$ com $C_n = A_n \cap Y$ e defina

$$B_n = A_n \setminus \bigcup_{1 \leq i < n} A_i \in \mathcal{A},$$

para todo $n \geq 1$, de modo que os conjuntos $(B_n)_{n \geq 1}$ são dois a dois disjuntos e $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Temos

$$B_n \cap Y = (A_n \cap Y) \setminus \bigcup_{1 \leq i < n} (A_i \cap Y) = C_n \setminus \bigcup_{1 \leq i < n} C_i = C_n,$$

para todo $n \geq 1$ e portanto:

$$\nu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n\Big) = \nu\Big(\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) \cap Y\Big) = \mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \nu(B_n \cap Y) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(C_n).$$

Questão 3. (valor 2,5 pontos) Sejam X um conjunto, $\mathcal{A}$ uma σ-álgebra de subconjuntos de X e $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência em $\mathcal{A}$ tal que $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$. Para cada $n \geq 1$, seja $\mu_n : \mathcal{A} \cap \wp(X_n) \to [0, +\infty]$ uma medida σ-aditiva e suponha que

$$\mu_n(A) = \mu_m(A),$$

para todo $A \in \mathcal{A}$ com $A \subset X_n \cap X_m$ e para todos $n, m \geq 1$. Mostre que existe uma única medida σ-aditiva $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ tal que $\mu(A) = \mu_n(A)$, para todo $A \in \mathcal{A}$ com $A \subset X_n$ e para todo $n \geq 1$.

Solução. Para cada $n \geq 1$, seja

$$Y_n = X_n \setminus \bigcup_{1 \leq i < n} X_i \in \mathcal{A},$$

de modo que os conjuntos $(Y_n)_{n\geq 1}$ são dois a dois disjuntos e $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n$. Note que se $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ é uma medida σ-aditiva que satisfaz a condição dada no enunciado, então:

$$\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A \cap Y_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(A \cap Y_n),$$

para todo $A \in \mathcal{A}$. Isso mostra que, se μ existir, então é única. Defina agora $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ fazendo

$$\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(A \cap Y_n),$$

para todo $A \in \mathcal{A}$ e vamos mostrar que μ é uma medida σ-aditiva que satisfaz a condição dada no enunciado. Em primeiro lugar:

$$\mu(\emptyset) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(\emptyset \cap Y_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(\emptyset) = 0.$$

Seja agora $(A_k)_{k\geq 1}$ uma sequência em $\mathcal{A}$ de conjuntos dois a dois disjuntos e seja $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$. Temos:

$$\begin{aligned}\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(A \cap Y_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} (A_k \cap Y_n)\Big) &= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} \mu_n(A_k \cap Y_n) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(A_k \cap Y_n) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k),\end{aligned}$$

o que mostra que μ é uma medida σ-aditiva. Finalmente, seja $n \geq 1$ fixado e seja $A \in \mathcal{A}$ contido em X_n. Vamos verificar que $\mu(A) = \mu_n(A)$. Temos:

$$\mu(A) = \sum_{m=1}^{\infty} \mu_m(A \cap Y_m) = \sum_{m=1}^{\infty} \mu_n(A \cap Y_m) = \mu_n(A),$$

em que a segunda igualdade segue do fato que $A \cap Y_m \subset X_n \cap X_m$.

Questão 4. (valor 2,5 pontos) Seja X um espaço topológico e denote por $\mathfrak{F}(X,\mathbb{R})$ o espaço vetorial de todas as funções $f : X \to \mathbb{R}$ munido das operações usuais. Dado um subconjunto A de X, denote por $\chi_A \in \mathfrak{F}(X,\mathbb{R})$ a função característica de A, i.e., a função que vale 1 em A e 0 em $X \setminus A$. Seja S um subespaço vetorial de $\mathfrak{F}(X,\mathbb{R})$ que seja fechado por limites pontuais, i.e., se $(f_n)_{n\geq 1}$ é uma sequência em S que converge pontualmente para uma função $f \in \mathfrak{F}(X,\mathbb{R})$, então $f \in S$. Se $\chi_U \in S$ para todo aberto U de X, mostre que $\chi_B \in S$, para todo Boreleano B de X.

Solução. Começamos mostrando que a coleção de conjuntos

$$\mathcal{C} = \big\{B \in \wp(X) : \chi_B \in S\big\}$$

é uma classe σ-aditiva. Obviamente $\emptyset \in \mathcal{C}$, já que $\chi_\emptyset$ é a função nula, que está em S. Se $B_1, B_2 \in \mathcal{C}$ são disjuntos, então

$$\chi_{B_1 \cup B_2} = \chi_{B_1} + \chi_{B_2} \in S,$$

já que $\chi_{B_1}, \chi_{B_2} \in S$. Daí $B_1 \cup B_2 \in \mathcal{C}$. Se $B_1, B_2 \in \mathcal{C}$ e $B_2 \subset B_1$, então

$$\chi_{B_1 \setminus B_2} = \chi_{B_1} - \chi_{B_2} \in S,$$

já que $\chi_{B_1}, \chi_{B_2} \in S$. Daí $B_1 \setminus B_2 \in \mathcal{C}$. Seja agora $(B_n)_{n\geq 1}$ uma sequência crescente em $\mathcal{C}$ e seja $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$. Temos que a sequência de funções $(\chi_{B_n})_{n\geq 1}$ converge pontualmente para a função χ_B. De fato, se $x \in B$, então $\chi_B(x) = 1$ e $\chi_{B_n}(x) = 1$, para todo n suficientemente grande. Por outro lado, se $x \in X$ não está em B, então $\chi_B(x) = 0$ e $\chi_{B_n}(x) = 0$, para todo $n \geq 1$. Dado que $\chi_{B_n} \in S$ para todo $n \geq 1$, concluímos então que $\chi_B \in S$ e portanto que $B \in \mathcal{C}$. Isso completa a demonstração de que $\mathcal{C}$ é uma classe σ-aditiva. Como $\mathcal{C}$ contém a coleção τ de todos os abertos de X e τ é fechada por interseções finitas, segue do Lema da Classe σ-aditiva que $\mathcal{C}$ contém o σ-anel gerado por τ. Mas o σ-anel gerado por τ (que coincide com a σ-álgebra gerada por τ, já que $X \in \tau$) é precisamente a σ-álgebra de Borel de X. Logo $\chi_B \in S$, para todo Boreleano B de X.

Questão 5. Seja $\mu^* : \mathcal{H} \to [0, +\infty]$ uma medida exterior definida num σ-anel $\mathcal{H}$ e seja $\mathfrak{M} \subset \mathcal{H}$ o σ-anel formado pelos conjuntos μ^*-mensuráveis.

(a) (valor 1,5 pontos) Seja $\mathcal{R}$ um subconjunto de $\mathcal{H}$ tal que para todo $B \in \mathcal{H}$ e todo $\varepsilon > 0$ exista $A \in \mathcal{R}$ com $B \subset A$ e $\mu^*(A) \leq \mu^*(B) + \varepsilon$. Mostre que um conjunto $E \in \mathcal{H}$ é μ^*-mensurável se, e somente se

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \setminus E),$$

para todo $A \in \mathcal{R}$.

(b) (valor 1,0 ponto) Seja $\mathcal{C}$ uma coleção de conjuntos com $\emptyset \in \mathcal{C}$ e seja $\mu : \mathcal{C} \to [0, +\infty]$ uma função tal que $\mu(\emptyset) = 0$. Suponha que $\mathcal{H}$ seja o σ-anel hereditário gerado por $\mathcal{C}$ e que μ^* seja a medida exterior associada a μ, i.e., para todo $A \in \mathcal{H}$, vale que $\mu^*(A)$ é o ínfimo das somas $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$, em que $(A_n)_{n \geq 1}$ é uma sequência em $\mathcal{C}$ com $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Seja $\mathcal{R} \subset \mathcal{H}$ um anel que contenha todas as uniões enumeráveis de elementos de $\mathcal{C}$ e tal que a restrição $\mu^*|_{\mathcal{R}}$ seja uma medida finitamente aditiva. Mostre que $\mathcal{R}$ está contido em $\mathfrak{M}$.

Solução. Por definição, temos que $E \in \mathcal{H}$ é μ^*-mensurável se, e somente se

$$\mu^*(B) = \mu^*(B \cap E) + \mu^*(B \setminus E), \tag{1}$$

para todo $B \in \mathcal{H}$. Para demonstrar o item (a), é suficiente então mostrar que se (1) vale para todo $B \in \mathcal{R}$, então (1) vale para todo $B \in \mathcal{H}$. Seja dado $B \in \mathcal{H}$. Dado $\varepsilon > 0$, temos por hipótese que existe $A \in \mathcal{R}$ com $B \subset A$ e $\mu^*(A) \leq \mu^*(B) + \varepsilon$. Daí

$$\mu^*(B) \leq \mu^*(B \cap E) + \mu^*(B \setminus E) \leq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \setminus E) = \mu^*(A) \leq \mu^*(B) + \varepsilon$$

e portanto

$$\mu^*(B) \leq \mu^*(B \cap E) + \mu^*(B \setminus E) \leq \mu^*(B) + \varepsilon,$$

para todo $\varepsilon > 0$, o que mostra que a igualdade (1) vale. Isso completa a resolução do item (a). Para o item (b), mostramos primeiro que o anel $\mathcal{R}$ satisfaz a hipótese que aparece no item (a). Dado $B \in \mathcal{H}$ e dado $\varepsilon > 0$, da definição de $\mu^*(B)$ segue que existe uma sequência $(A_n)_{n \geq 1}$ em $\mathcal{C}$ tal que $B \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ e:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \leq \mu^*(B) + \varepsilon.$$

Note que como $(A_n)_{n \geq 1}$ é uma sequência em $\mathcal{C}$ cuja união contém o conjunto $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, segue da definição de μ^* que:

$$\mu^*(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Portanto $\mu^*(A) \leq \mu^*(B) + \varepsilon$ e $A \in \mathcal{R}$, já que $\mathcal{R}$ contém todas as uniões enumeráveis de elementos de $\mathcal{C}$.

Seja agora $E \in \mathcal{R}$ e vamos mostrar que $E \in \mathfrak{M}$. Pelo resultado do item (a), basta verificar que (1) vale para todo $B \in \mathcal{R}$. Mas para $B \in \mathcal{R}$, a igualdade (1) segue da aditividade de $\mu^*|_{\mathcal{R}}$, já que $B = (B \cap E) \cup (B \setminus E)$ é uma união disjunta e $B \cap E, B \setminus E \in \mathcal{R}$.