Gabarito da Primeira Prova

MAT0311 – Cálculo Diferencial e Integral V
MAP0217 – Cálculo Diferencial

Prof. Daniel Victor Tausk
09/09/2013

Questão 1. (valor 2,5 pontos) Sejam (M, d) um espaço métrico e A um subconjunto de M. Mostre que $\partial A = A$ se e somente se A é fechado e possui interior vazio.

Solução. Os itens (d) e (e) do Exercício 2 da Terceira Lista dizem, respectivamente, que:

$$\operatorname{int}(A) = A \setminus \partial A, \quad \overline{A} = A \cup \partial A,$$

para qualquer subconjunto A de M. Assim, assumindo que $\partial A = A$, obtemos $\operatorname{int}(A) = A \setminus A = \emptyset$ e $\overline{A} = A \cup A = A$, isto é, A é fechado e possui interior vazio. Reciprocamente, assumindo que A seja fechado e possua interior vazio, obtemos $\operatorname{int}(A) = A \setminus \partial A = \emptyset$, o que nos dá $A \subset \partial A$. Além do mais, como A é fechado, temos $A = \overline{A} = A \cup \partial A$, o que nos dá $\partial A \subset A$. Segue então que $\partial A = A$.

Questão 2. (valor 2,5 pontos) Seja V um espaço vetorial real munido de uma norma $\|\cdot\|$ (e da métrica correspondente). Mostre que a bola fechada $\mathrm{B}[0,1]$ (de centro na origem e raio unitário) é igual ao fecho da bola aberta $\mathrm{B}(0,1)$.

Solução. Temos que a bola fechada $\mathrm{B}[0,1]$ é fechada e contém a bola aberta $\mathrm{B}(0,1)$; assim, $\mathrm{B}[0,1]$ contém o fecho de $\mathrm{B}(0,1)$. Resta mostrar então que se $x \in \mathrm{B}[0,1]$ então x pertence ao fecho de $\mathrm{B}(0,1)$. Seja $x \in \mathrm{B}[0,1]$. Para todo $n \geq 1$, defina:

$$x_n = \Big(1 - \frac{1}{n}\Big)x.$$

Daí:

$$\|x_n\| = \Big(1 - \frac{1}{n}\Big)\|x\| \leq 1 - \frac{1}{n} < 1,$$

para todo $n \geq 1$, já que $\|x\| \leq 1$. Além do mais:

$$\|x_n - x\| = \frac{1}{n}\,\|x\| \leq \frac{1}{n} \longrightarrow 0.$$

Concluímos então que $(x_n)_{n\geq 1}$ é uma seqüência em $\mathrm{B}(0,1)$ que converge para x, o que prova que x pertence ao fecho de $\mathrm{B}(0,1)$.

Questão 3. (valor 2,5 pontos) Sejam $f : M \to \mathbb{R}$, $g : M \to \mathbb{R}$ funções uniformemente contínuas e limitadas, onde (M, d) é um espaço métrico (e $\mathbb{R}$ está munido da sua métrica usual). Mostre que o produto $fg : M \to \mathbb{R}$ (definido por $(fg)(x) = f(x)g(x)$, para todo $x \in M$) é uma função uniformemente contínua.

Solução. Como f e g são limitadas, existe $k > 0$ tal que:

$$|f(x)| \leq k, \quad |g(x)| \leq k,$$

para todo $x \in M$. Seja dado $\varepsilon > 0$. Devemos obter $\delta > 0$ tal que, se $x, y \in M$ e $d(x, y) < \delta$, então:

$$|f(x)g(x) - f(y)g(y)| < \varepsilon.$$

Como f e g são uniformemente contínuas, a partir de ε obtemos $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$ tais que:

$$d(x, y) < \delta_1 \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2k}, \quad d(x, y) < \delta_2 \Longrightarrow |g(x) - g(y)| < \frac{\varepsilon}{2k},$$

para todos $x, y \in M$. Tome $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$. Dados $x, y \in M$ com $d(x, y) < \delta$, vale que $d(x, y) < \delta_1$ e $d(x, y) < \delta_2$. Temos então:

$$\begin{aligned} |f(x)g(x) - f(y)g(y)| &= |f(x)g(x) - f(y)g(x) + f(y)g(x) - f(y)g(y)| \\ &\leq |g(x)||f(x) - f(y)| + |f(y)||g(x) - g(y)| < k\frac{\varepsilon}{2k} + k\frac{\varepsilon}{2k} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Questão 4. (valor 2,5 pontos) Seja $M = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ o conjunto de todas as seqüências $(x_n)_{n\ge 1}$ com $x_n \in \{0,1\}$, para todo $n \ge 1$. Temos que a função $d : M \times M \to \mathbb{R}$ definida por:

$$d(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}|x_n - y_n|, \quad x = (x_n)_{n\ge 1},\ y = (y_n)_{n\ge 1} \in M,$$

é uma métrica em M. Dado $z = (z_1, \ldots, z_k) \in \{0,1\}^k$, onde $k \ge 1$ é um inteiro, definimos $A_z \subset M$ fazendo:

$$A_z = \big\{(x_n)_{n\ge 1} \in M : x_n = z_n,\ n = 1, 2, \ldots, k\big\}.$$

Mostre que o conjunto A_z é aberto e fechado.

Solução 1. Comecemos mostrando que A_z é aberto. Seja $x = (x_n)_{n\ge 1}$ um ponto de A_z. Vamos mostrar que a bola aberta $\mathrm{B}\big(x, \frac{1}{2^k}\big)$ está contida em A_z. Seja $y = (y_n)_{n\ge 1} \in M$ com $d(y,x) < \frac{1}{2^k}$. Supondo por absurdo que $y \notin A_z$, então existe $n \in \{1, \ldots, k\}$ tal que $y_n \ne z_n = x_n$. Daí $|x_n - y_n| = 1$ e:

$$d(y,x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^m}|x_m - y_m| \ge \frac{1}{2^n}|x_n - y_n| = \frac{1}{2^n} \ge \frac{1}{2^k},$$

o que nos dá uma contradição. Isso completa a demonstração de que A_z é aberto. Vamos agora mostrar que A_z é fechado. Para isso, seja $x \in M \setminus A_z$ e mostremos que x não é ponto de aderência de A_z. Seja:

$$z' = (x_1, \ldots, x_k) \in \{0,1\}^k.$$

Obviamente, $x \in A_{z'}$ e, em vista do que já demonstramos, $A_{z'}$ é aberto. Como $x \notin A_z$, temos que $z' \ne z$ e segue daí que $A_{z'} \cap A_z = \emptyset$. Assim, $x \in A_{z'} \subset M \setminus A_z$, sendo que $A_{z'}$ é aberto. Isso mostra que x é um ponto interior do complementar de A_z, isto é, x não é um ponto de aderência de A_z. Isso completa a demonstração de que A_z é fechado.

Solução 2. Dado $m \geq 1$, considere a m-ésima projeção $\pi_m : M \to \{0,1\}$, definida por $\pi_m(x) = x_m$, para todo $x = (x_n)_{n\geq 1} \in M$. Dados $x, y \in M$, temos:

$$\begin{aligned} |\pi_m(x) - \pi_m(y)| = |x_m - y_m| = 2^m \frac{1}{2^m}|x_m - y_m| \leq 2^m \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}|x_n - y_n| \\ = 2^m d(x,y). \end{aligned}$$

Assim, se $\{0,1\}$ está munido da sua métrica usual (restrição da métrica usual de $\mathbb{R}$), então π_m é Lipschitziana (com constante 2^m) e, em particular, contínua. Evidentemente os conjuntos unitários $\{0\}$, $\{1\}$ são abertos e fechados no espaço métrico $\{0,1\}$ e, portanto, para todo inteiro $m \geq 1$, os conjuntos $\pi_m^{-1}(0)$ e $\pi_m^{-1}(1)$ são abertos e fechados em M. Mas:

$$A_z = \bigcap_{m=1}^{k} \pi_m^{-1}(z_m),$$

donde segue que A_z é aberto e fechado.