Gabarito da Primeira Prova

MAT0234 – Análise Matemática I

Prof. Daniel Victor Tausk

13/09/2011

Questão 1. Sejam X, X' conjuntos e $\phi : X \to X'$ uma função.

(a) (valor 1,25 pontos) Mostre que se $\mathcal{A}$ é uma σ-álgebra de partes de X então:
$$\mathcal{A}' = \big\{E \in \wp(X') : \phi^{-1}(E) \in \mathcal{A}\big\}$$
é uma σ-álgebra de partes de X'.

(b) (valor 1,25 pontos) Mostre que se $\mathcal{A}$ é uma σ-álgebra de partes de X e $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ é uma medida então a função $\mu' : \mathcal{A}' \to [0, +\infty]$ definida por:
$$\mu'(E) = \mu\big(\phi^{-1}(E)\big), \quad E \in \mathcal{A}',$$
é uma medida, onde $\mathcal{A}'$ é a σ-álgebra definida no item (a).

Solução. Se $(E_k)_{k\ge1}$ é uma seqüência em $\mathcal{A}'$ então $\phi^{-1}(E_k) \in \mathcal{A}$ para todo $k \ge 1$ e portanto:
$$\phi^{-1}\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\Big) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \phi^{-1}(E_k) \in \mathcal{A},$$
já que $\mathcal{A}$ é uma σ-álgebra. Logo $\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \in \mathcal{A}'$. Além do mais, se $E \in \mathcal{A}'$ então $\phi^{-1}(E) \in \mathcal{A}$ e portanto, usando novamente que $\mathcal{A}$ é uma σ-álgebra, obtemos:
$$\phi^{-1}(X' \setminus E) = X \setminus \phi^{-1}(E) \in \mathcal{A},$$
donde $X' \setminus E \in \mathcal{A}'$. Finalmente, note que $\mathcal{A}' \ne \emptyset$, já que $\phi^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \mathcal{A}$ e portanto $\emptyset \in \mathcal{A}'$. Isso mostra que $\mathcal{A}'$ é uma σ-álgebra de partes de X' e completa a resolução do item (a). Quanto ao item (b), note primeiramente que:
$$\mu'(\emptyset) = \mu\big(\phi^{-1}(\emptyset)\big) = \mu(\emptyset) = 0.$$
Além do mais, se $(E_k)_{k\ge1}$ é uma seqüência em $\mathcal{A}'$ de conjuntos dois a dois disjuntos então $\big(\phi^{-1}(E_k)\big)_{k\ge1}$ é uma seqüência em $\mathcal{A}$ de conjuntos dois a dois disjuntos e portanto:
$$\mu'\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\Big) = \mu\left(\phi^{-1}\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\Big)\right) = \mu\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} \phi^{-1}(E_k)\Big) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu\big(\phi^{-1}(E_k)\big)$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} \mu'(E_k),$$
o que prova que μ' é uma medida e completa a resolução do item (b).

Questão 2.

(a) (valor 1,5 pontos) Mostre que se um subconjunto A de $\mathbb{R}^n$ tem medida de Lebesgue nula então ele tem interior vazio.

(b) (valor 1,0 ponto) Dê um exemplo de um subconjunto mensurável de $\mathbb{R}$ que tenha interior vazio e medida de Lebesgue infinita. Justifique a sua resposta.

Solução. Se um subconjunto A de $\mathbb{R}^n$ não tem interior vazio então ele contém uma bola aberta que por sua vez contém um bloco retangular B de volume positivo. Daí $\mathfrak{m}^*(A) \geq \mathfrak{m}^*(B) = |B| > 0$. Logo, se $\mathfrak{m}^*(A) = 0$ então A deve ter interior vazio. Isso completa a resolução do item (a). Afirmamos que o conjunto $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dos números irracionais é um subconjunto mensurável de $\mathbb{R}$ de medida infinita e interior vazio. O fato que $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tem interior vazio segue do fato que todo intervalo aberto não vazio contém números racionais. Agora temos que $\mathbb{Q}$ é enumerável e portanto é mensurável com medida de Lebesgue nula. Daí $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ também é mensurável e:

$$\mathfrak{m}(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = \mathfrak{m}(\mathbb{R}) - \mathfrak{m}(\mathbb{Q}) = +\infty - 0 = +\infty.$$

Questão 3. (valor 2,5 pontos) Seja $\mathcal{A}$ a σ-álgebra de partes de $\mathbb{R}$ gerada pela coleção de todos os subconjuntos unitários de $\mathbb{R}$, i.e., $\mathcal{A} = \sigma[\mathcal{C}]$, onde:

$$\mathcal{C} = \big\{\{x\} : x \in \mathbb{R}\big\}.$$

Exiba um subconjunto de $\mathbb{R}$ que não pertence a $\mathcal{A}$ e justifique a sua resposta. (sugestão: para justificar, encontre uma descrição para a σ-álgebra $\mathcal{A}$.)

Solução. Todo subconjunto enumerável de $\mathbb{R}$ é uma união enumerável de subconjuntos unitários de $\mathbb{R}$ e portanto está em $\mathcal{A}$. Segue daí que o complementar em $\mathbb{R}$ de um subconjunto enumerável de $\mathbb{R}$ também está em $\mathcal{A}$. Seja:

$$\mathcal{A}_0 = \big\{E \in \wp(\mathbb{R}) : E \text{ é enumerável ou } \mathbb{R} \setminus E \text{ é enumerável}\big\}.$$

Vimos que $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}$. Como $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}_0$, se verificarmos que $\mathcal{A}_0$ é uma σ-álgebra concluiremos que $\mathcal{A} = \sigma[\mathcal{C}]$ está contida em $\mathcal{A}_0$, donde $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0$. Evidentemente $\mathcal{A}_0$ é não vazia e se $E \in \mathcal{A}_0$ então $\mathbb{R} \setminus E \in \mathcal{A}_0$. (Se E é enumerável então $\mathbb{R} \setminus E$ tem complementar enumerável e se E tem complementar enumerável então $R \setminus E$ é enumerável.) Seja $(E_k)_{k \geq 1}$ uma seqüência em $\mathcal{A}_0$. Se E_k for enumerável para todo $k \geq 1$ então a união $\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ será enumerável e portanto estará em $\mathcal{A}_0$. Senão, existe um índice $i \geq 1$ tal que E_i não é enumerável e, já que $E_i \in \mathcal{A}_0$, temos que $\mathbb{R} \setminus E_i$ é enumerável. Mas aí:

$$\mathbb{R} \setminus \Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\Big) \subset \mathbb{R} \setminus E_i,$$

donde $\mathbb{R} \setminus \big(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\big)$ é enumerável e também $\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \in \mathcal{A}_0$. Isso completa a demonstração de que $\mathcal{A}_0$ é uma σ-álgebra e de que $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0$. Note agora que, por exemplo, o intervalo $[0, 1]$ não está em $\mathcal{A}$, já que ele não é enumerável e não tem complementar enumerável.

Questão 4. A *medida exterior de Jordan* de um subconjunto A de $\mathbb{R}^n$, denotada por $\mathfrak{j}^*(A)$, é definida por:

$$\mathfrak{j}^*(A) = \inf\Big\{\textstyle\sum_{k=1}^t |B_k| : t \text{ inteiro positivo}, \ B_1, \ \ldots, \ B_t \text{ blocos}$$
$$\text{retangulares } n\text{-dimensionais tais que } A \subset \textstyle\bigcup_{k=1}^t B_k\Big\}.$$

(a) (valor 0,5 ponto) Mostre que $\mathfrak{m}^*(A) \le \mathfrak{j}^*(A)$, para qualquer subconjunto A de $\mathbb{R}^n$.

(b) (valor 2,0 pontos) Mostre que $\mathfrak{m}^*(K) = \mathfrak{j}^*(K)$, para qualquer subconjunto compacto K de $\mathbb{R}^n$. (sugestão: note que um bloco retangular B está contido no interior de um bloco retangular B' cujo volume é um pouquinho maior que o de B.)

Solução. Se $B_1, \ \ldots, \ B_t$ são blocos retangulares tais que $A \subset \bigcup_{k=1}^t B_k$ então:

$$\mathfrak{m}^*(A) \le \mathfrak{m}^*\Big(\bigcup_{k=1}^t B_k\Big) \le \sum_{k=1}^t \mathfrak{m}^*(B_k) = \sum_{k=1}^t |B_k|.$$

Daí $\mathfrak{m}^*(A)$ é uma cota inferior do conjunto cujo ínfimo é $\mathfrak{j}^*(A)$, o que mostra que $\mathfrak{m}^*(A) \le \mathfrak{j}^*(A)$. Isso completa a resolução do item (a). Seja agora K um subconjunto compacto de $\mathbb{R}^n$. Resta mostrar que $\mathfrak{j}^*(K) \le \mathfrak{m}^*(K)$. Seja $(B_r)_{r\ge1}$ uma seqüência de blocos retangulares tal que $K \subset \bigcup_{r=1}^\infty B_r$. Se mostrarmos que:

$$\mathfrak{j}^*(K) \le \sum_{r=1}^\infty |B_r|, \tag{1}$$

concluiremos que $\mathfrak{j}^*(K)$ é uma cota inferior do conjunto cujo ínfimo é $\mathfrak{m}^*(K)$ e portanto que $\mathfrak{j}^*(K) \le \mathfrak{m}^*(K)$. Seja dado $\varepsilon > 0$ e seja, para cada $r \ge 1$, B'_r um bloco retangular cujo interior contém B_r e tal que:

$$|B'_r| \le |B_r| + \frac{\varepsilon}{2^r}.$$

Daí os interiores dos blocos B'_r constituem uma cobertura aberta do compacto K, da qual podemos extrair uma subcobertura finita. Existe portanto $t \ge 1$ tal que $K \subset \bigcup_{r=1}^t B'_r$. Segue daí que:

$$\mathfrak{j}^*(K) \le \sum_{r=1}^t |B'_r| \le \sum_{r=1}^t \Big(|B_r| + \frac{\varepsilon}{2^r}\Big) \le \Big(\sum_{r=1}^\infty |B_r|\Big) + \varepsilon.$$

Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, obtemos (1).

Questão 5. (valor 2,5 pontos) Mostre que existe um subconjunto denso de $\mathbb{R}$ que seja de tipo G_δ e que tenha medida nula.

Solução. Vimos que todo subconjunto de $\mathbb{R}^n$ admite um envelope mensurável de tipo G_δ, i.e., se A é um subconjunto arbitrário de $\mathbb{R}^n$ então existe um subconjunto E de $\mathbb{R}^n$, de tipo G_δ, tal que $A \subset E$ e $\mathfrak{m}^*(A) = \mathfrak{m}(E)$. Usando esse resultado com $A = \mathbb{Q}$, obtemos um subconjunto E de $\mathbb{R}$ de tipo G_δ tal que $\mathbb{Q} \subset E$ e $\mathfrak{m}(E) = \mathfrak{m}^*(\mathbb{Q}) = 0$. Mas E é denso em $\mathbb{R}$, já que E contém $\mathbb{Q}$.

Questão 6.

(a) (valor 1,0 ponto) Sejam A um subconjunto qualquer de $\mathbb{R}^n$ e E um subconjunto mensurável de $\mathbb{R}^n$ tais que $A \subset E$ e $\mathfrak{m}(E) < +\infty$. Mostre que se Z é um subconjunto mensurável de $E \setminus A$ então:

$$\mathfrak{m}(Z) \leq \mathfrak{m}(E) - \mathfrak{m}^*(A).$$

(b) (valor 1,5 pontos) Dados um subconjunto qualquer A de $\mathbb{R}^n$ e $\varepsilon > 0$, mostre que existe um subconjunto aberto U de $\mathbb{R}^n$ contendo A com a seguinte propriedade: para todo subconjunto mensurável Z de $U \setminus A$, vale que $\mathfrak{m}(Z) \leq \varepsilon$. (sugestão: considere primeiramente o caso em que $\mathfrak{m}^*(A) < +\infty$ e use o item (a). Depois trate o caso geral escrevendo A como uma união enumerável de conjuntos limitados.)

Solução. Para o item (a), note que Z é disjunto de A e, como $A \subset E$, temos $A \subset E \setminus Z$. Como E, Z são mensuráveis, $Z \subset E$ e $\mathfrak{m}(Z) < +\infty$, temos:

$$\mathfrak{m}^*(A) \leq \mathfrak{m}^*(E \setminus Z) = \mathfrak{m}(E \setminus Z) = \mathfrak{m}(E) - \mathfrak{m}(Z),$$

donde segue que $\mathfrak{m}(Z) \leq \mathfrak{m}(E) - \mathfrak{m}^*(A)$. Isso completa a resolução do item (a). Passemos agora ao item (b). Seja $A_k = A \cap [-k, k]^n$, de modo que $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ e A_k é limitado (e, em particular, tem medida exterior finita). Para cada $k \geq 1$, seja U_k um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$ que contém A_k e tal que:

$$\mathfrak{m}(U_k) \leq \mathfrak{m}^*(A_k) + \frac{\varepsilon}{2^k}.$$

Seja $U = \bigcup_{k=1}^{\infty} U_k$. Daí U é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$ e:

$$A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} U_k = U.$$

Seja Z um subconjunto mensurável de $U \setminus A$. Defina $Z_k = Z \cap U_k$, para todo $k \geq 1$. Como $Z \subset U = \bigcup_{k=1}^{\infty} U_k$, temos que:

$$Z = \bigcup_{k=1}^{\infty} Z_k.$$

Além do mais, Z_k é disjunto de A e, *a fortiori*, de A_k, donde $Z_k \subset U_k \setminus A_k$. Como Z_k e U_k são mensuráveis e $\mathfrak{m}(U_k) \leq \mathfrak{m}^*(A_k) + \frac{\varepsilon}{2^k} < +\infty$, o item (a) nos dá:

$$\mathfrak{m}(Z_k) \leq \mathfrak{m}(U_k) - \mathfrak{m}^*(A_k) \leq \frac{\varepsilon}{2^k}.$$

De $Z = \bigcup_{k=1}^{\infty} Z_k$ obtemos então que:

$$\mathfrak{m}(Z) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mathfrak{m}(Z_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon.$$