Gabarito da Primeira Prova
MAT0222 – Álgebra Linear II

Prof. Daniel Victor Tausk
25/03/2014

Questão 1. (valor 2,5 pontos) Seja K um corpo e considere o subespaço W de K^n definido por:

$$W = \big\{(x_1, \dots, x_n) \in K^n : x_1 + \dots + x_n = 0\big\}.$$

Se $\mathcal{B}$ denota a base canônica de K^n e $\mathcal{B}^*$ denota a base dual a $\mathcal{B}$, mostre que o anulador de W em K^n é dado por:

$$W^{\mathrm{o}} = \big\{(c, c, \dots, c)_{\mathcal{B}^*} : c \in K\big\}.$$

Solução 1. Seja $\alpha = (1, 1, \dots, 1)_{\mathcal{B}^*}$, isto é, $\alpha : K^n \to K$ é o funcional linear dado por:

$$\alpha(x_1, \dots, x_n) = x_1 + \dots + x_n, \quad (x_1, \dots, x_n) \in K^n.$$

Obviamente $W = \mathrm{Ker}(\alpha)$, de modo que $\alpha \in W^{\mathrm{o}}$. Além do mais, $\alpha \neq 0$, donde $\mathrm{Im}(\alpha) = K$ e portanto:

$$\dim(W) = \dim\big(\mathrm{Ker}(\alpha)\big) = \dim(K^n) - \dim\big(\mathrm{Im}(\alpha)\big) = n - 1.$$

Foi mostrado em aula que $\dim(W^{\mathrm{o}}) = \dim(K^n) - \dim(W)$ e portanto $\dim(W^{\mathrm{o}}) = 1$. Como um elemento não nulo de um espaço de dimensão 1 é necessariamente um gerador desse espaço, segue que W^{o} é o subespaço gerado por α, isto é:

$$W^{\mathrm{o}} = \big\{c\alpha : c \in K\big\} = \big\{(c, c, \dots, c)_{\mathcal{B}^*} : c \in K\big\},$$

como queríamos demonstrar.

Solução 2. Seja $\alpha \in K^{n*}$ definido como na Solução 1 e seja Λ o subespaço gerado por α. Queremos mostrar que $W^{\mathrm{o}} = \Lambda$. Obviamente, temos:

$$\Lambda_{\mathrm{o}} = \mathrm{Ker}(\alpha) = W.$$

Como Λ tem dimensão finita, o resultado do item (b) do Exercício 7 da Segunda Lista nos dá:

$$W^{\mathrm{o}} = (\Lambda_{\mathrm{o}})^{\mathrm{o}} = \Lambda,$$

que é o que queríamos demonstrar.

Solução 3. Dado $c \in K$, se $\beta = (c, c, \dots, c)_{\mathcal{B}^*}$, então o funcional linear β é dado por:

$$\beta(x_1, \dots, x_n) = cx_1 + \cdots + cx_n = c(x_1 + \cdots + x_n), \quad (x_1, \dots, x_n) \in K^n,$$

donde segue que $\beta \in W^{\mathrm{o}}$. Reciprocamente, dado $\beta \in W^{\mathrm{o}}$, devemos mostrar que $\beta = (c, c, \dots, c)_{\mathcal{B}^*}$, para algum $c \in K$. Se $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ denota a base canônica de K^n, então $e_i - e_j \in W$, para todos $i, j = 1, \dots, n$. Daí:

$$\beta(e_i) - \beta(e_j) = \beta(e_i - e_j) = 0,$$

isto é, $\beta(e_i) = \beta(e_j)$, para todos $i, j = 1, \dots, n$. Mas $\beta(e_1)$, $\dots$, $\beta(e_n)$ são precisamente as coordenadas de β na base dual $\mathcal{B}^*$, donde $\beta = (c, c, \dots, c)_{\mathcal{B}^*}$, para algum $c \in K$.

Questão 2. (valor 2,5 pontos) Sejam V e W espaços vetoriais sobre um corpo K e seja $B : V \times W \to K$ uma aplicação bilinear. Considere as aplicações lineares $T : V \to W^*$, $T' : W \to V^*$ definidas por:

$$T(v)(w) = B(v, w), \quad T'(w)(v) = B(v, w),$$

para todos $v \in V$, $w \in W$. Se $J : W \to W^{**}$ denota a aplicação linear natural, mostre que:

$$T' = T^* \circ J.$$

Solução. Seja dado $w \in W$. Devemos verificar que:

$$T'(w) = T^*\big(J(w)\big).$$

Como ambos os lados da igualdade acima são elementos de V^*, para demonstrar essa igualdade devemos tomar um elemento arbitrário $v \in V$ e verificar que:

$$T'(w)(v) = \big[T^*\big(J(w)\big)\big](v). \tag{1}$$

Temos, pela definição de T', que:

$$T'(w)(v) = B(v, w).$$

Agora, a definição de T^* nos dá:

$$T^*\big(J(w)\big) = J(w) \circ T,$$

donde segue que:

$$\big[T^*\big(J(w)\big)\big](v) = \big[J(w) \circ T\big](v) = J(w)\big(T(v)\big);$$

usando agora a definição de $J(w)$ e depois a definição de T obtemos:

$$J(w)\big(T(v)\big) = T(v)(w) = B(v, w).$$

Concluímos então que ambos os lados de (1) são iguais a $B(v, w)$, o que demonstra a igualdade (1).

Questão 3. (valor 2,5 pontos) Seja V um espaço vetorial sobre um corpo K e sejam dados $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in V^*$. Considere a aplicação linear $T : V \to K^n$ definida por:

$$T(v) = \big(\alpha_1(v), \ldots, \alpha_n(v)\big),$$

para todo $v \in V$. Mostre que T é sobrejetora se e somente se a seqüência $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ é linearmente independente.

Solução. Vamos primeiro mostrar que a seqüência $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ é linearmente independente se e somente se $\operatorname{Ker}(T^*) = \{0\}$ e depois nós vamos mostrar que $\operatorname{Ker}(T^*) = \{0\}$ se e somente se T é sobrejetora. Se $\mathcal{B}$ denota a base canônica de K^n e $\mathcal{B}^* = (\pi_1, \ldots, \pi_n)$ denota a sua base dual, então $T^*(\pi_i) = \pi_i \circ T = \alpha_i$, para todo $i = 1, \ldots, n$. Segue que, para $c_1, \ldots, c_n \in K$,

$$T^*\big((c_1, \ldots, c_n)_{\mathcal{B}^*}\big) = T^*(c_1\pi_1 + \cdots + c_n\pi_n) = c_1\alpha_1 + \cdots + c_n\alpha_n,$$

donde vemos que:

$$\operatorname{Ker}(T^*) = \big\{(c_1, \ldots, c_n)_{\mathcal{B}^*} \in K^{n*} : c_1\alpha_1 + \cdots + c_n\alpha_n = 0\big\}.$$

Assim, $\operatorname{Ker}(T^*) = \{0\}$ se e somente se a seqüência $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ é linearmente independente. Agora vamos mostrar que $\operatorname{Ker}(T^*) = \{0\}$ se e somente se T é sobrejetora. Em vista do resultado do Exercício 3 da Segunda Lista, temos:

$$\operatorname{Ker}(T^*) = \big(\operatorname{Im}(T)\big)^{\mathrm{o}}.$$

Assim, se T é sobrejetora, então $\operatorname{Im}(T) = K^n$, donde:

$$\operatorname{Ker}(T^*) = (K^n)^{\mathrm{o}} = \{0\}.$$

Reciprocamente, se $\operatorname{Ker}(T^*) = \{0\}$, então $\big(\operatorname{Im}(T)\big)^{\mathrm{o}} = \{0\}$ e portanto:

$$\operatorname{Im}(T) = \Big[\big(\operatorname{Im}(T)\big)^{\mathrm{o}}\Big]_{\mathrm{o}} = \{0\}_{\mathrm{o}} = K^n,$$

isto é, T é sobrejetora.

Questão 4. Seja V um espaço vetorial sobre um corpo K e sejam W_1 e W_2 subespaços de V.

(a) (valor 1,0 ponto) Mostre que $(W_1 + W_2)^{\mathrm{o}} = W_1^{\mathrm{o}} \cap W_2^{\mathrm{o}}$.

(b) (valor 1,5 pontos) Se $\dim(V) < +\infty$, mostre que[1]:

$$(W_1 \cap W_2)^{\mathrm{o}} = W_1^{\mathrm{o}} + W_2^{\mathrm{o}}.$$

Solução.

(a) Seja dado $\alpha \in V^*$. Se $\alpha \in (W_1 + W_2)^{\mathrm{o}}$, então α anula os vetores de W_1 e os vetores de W_2, já que W_1 e W_2 estão contidos em $W_1 + W_2$. Logo $\alpha \in W_1^{\mathrm{o}} \cap W_2^{\mathrm{o}}$. Reciprocamente, se $\alpha \in W_1^{\mathrm{o}} \cap W_2^{\mathrm{o}}$, então α anula os vetores de W_1 e os vetores de W_2 donde, por linearidade, α anula as somas $w_1 + w_2$, com $w_1 \in W_1$, $w_2 \in W_2$. Assim $\alpha \in (W_1 + W_2)^{\mathrm{o}}$.

(b) Se $\alpha \in V^*$ anula W_1, então α anula $W_1 \cap W_2$. Isso mostra que W_1^{o} está contido em $(W_1 \cap W_2)^{\mathrm{o}}$. Similarmente, $W_2^{\mathrm{o}} \subset (W_1 \cap W_2)^{\mathrm{o}}$. Como $(W_1 \cap W_2)^{\mathrm{o}}$ é um subespaço, segue que:

$$W_1^{\mathrm{o}} + W_2^{\mathrm{o}} \subset (W_1 \cap W_2)^{\mathrm{o}}.$$

Estamos trabalhando com espaços de dimensão finita e portanto, para mostrar a igualdade desejada, resta verificar que:

$$\dim(W_1^{\mathrm{o}} + W_2^{\mathrm{o}}) = \dim\big((W_1 \cap W_2)^{\mathrm{o}}\big). \tag{2}$$

Temos:

$$\dim\big((W_1 \cap W_2)^{\mathrm{o}}\big) = \dim(V) - \dim(W_1 \cap W_2).$$

Além do mais:

$$\dim(W_1^{\mathrm{o}} + W_2^{\mathrm{o}}) = \dim(W_1^{\mathrm{o}}) + \dim(W_2^{\mathrm{o}}) - \dim(W_1^{\mathrm{o}} \cap W_2^{\mathrm{o}}).$$

Usando o resultado do item (a), obtemos:

$$\begin{aligned}\dim(W_1^{\mathrm{o}} \cap W_2^{\mathrm{o}}) = \dim\big((W_1 + W_2)^{\mathrm{o}}\big) &= \dim(V) - \dim(W_1 + W_2)\\ &= \dim(V) - \dim(W_1) - \dim(W_2) + \dim(W_1 \cap W_2).\end{aligned}$$

Assim:

$$\begin{aligned}\dim(W_1^{\mathrm{o}} + W_2^{\mathrm{o}}) &= \dim(V) - \dim(W_1) + \dim(V) - \dim(W_2)\\ &\quad - \dim(V) + \dim(W_1) + \dim(W_2) - \dim(W_1 \cap W_2)\\ &= \dim(V) - \dim(W_1 \cap W_2).\end{aligned}$$

Isso prova (2) e completa a demonstração.

[1] O resultado também vale sem a hipótese de que a dimensão de V seja finita, mas a demonstração no caso geral é mais difícil.

Solução alternativa para o item (b). A igualdade:

$$(W_1 \cap W_2)^{\mathrm{o}} = W_1^{\mathrm{o}} + W_2^{\mathrm{o}}$$

pode ser demonstrada sem usar a hipótese de que a dimensão de V seja finita. Vamos apresentar uma tal demonstração. Para $i = 1, 2$, sejam Z_i um espaço vetorial sobre K e $T_i : V \to Z_i$ uma aplicação linear tal que $\mathrm{Ker}(T_i) = W_i$. A existência de Z_i e T_i pode ser demonstrada[2] da seguinte forma: consideramos um subespaço Z_i de V tal que $V = W_i \oplus Z_i$ e tomamos $T_i : V \to Z_i$ como sendo a projeção sobre Z_i associada à decomposição em soma direta $V = W_i \oplus Z_i$. (A existência de Z_i com $V = W_i \oplus Z_i$, por sua vez, é demonstrada assim: tomamos uma base de W_i, completamos essa base até uma base de V e definimos Z_i como sendo o subespaço gerado pelos vetores dessa base de V que não estão na base de W_i.) Seja $T : V \to Z_1 \times Z_2$ a aplicação linear definida por:

$$T(v) = \big(T_1(v), T_2(v)\big),$$

para todo $v \in V$. Obviamente:

$$\mathrm{Ker}(T) = \mathrm{Ker}(T_1) \cap \mathrm{Ker}(T_2) = W_1 \cap W_2.$$

Em vista do resultado do Exercício 5 da Segunda Lista, temos então:

$$(W_1 \cap W_2)^{\mathrm{o}} = \big(\mathrm{Ker}(T)\big)^{\mathrm{o}} = \mathrm{Im}(T^*).$$

Para determinar a imagem de T^* e completar a demonstração, usaremos o seguinte lema a respeito do espaço dual de um produto cartesiano.

Lema. *Se Z_1, Z_2 são espaços vetoriais sobre um corpo K e*

$$\pi_1 : Z_1 \times Z_2 \to Z_1, \quad \pi_2 : Z_1 \times Z_2 \to Z_2$$

denotam as projeções, então:

$$(Z_1 \times Z_2)^* = \big\{\alpha_1 \circ \pi_1 + \alpha_2 \circ \pi_2 : \alpha_1 \in Z_1^*,\ \alpha_2 \in Z_2^*\big\}.$$

Demonstração. Obviamente, se $\alpha_1 \in Z_1^*$ e $\alpha_2 \in Z_2^*$ então $\alpha_1 \circ \pi_1 + \alpha_2 \circ \pi_2$ está em $(Z_1 \times Z_2)^*$. Reciprocamente, dado $\alpha \in (Z_1 \times Z_2)^*$, definimos:

$$\alpha_1(z_1) = \alpha(z_1, 0), \quad z_1 \in Z_1,$$
$$\alpha_2(z_2) = \alpha(0, z_2), \quad z_2 \in Z_2,$$

donde $\alpha_1 \in Z_1^*$, $\alpha_2 \in Z_2^*$ e:

$$\alpha(z_1, z_2) = \alpha(z_1, 0) + \alpha(0, z_2) = \alpha_1(z_1) + \alpha_2(z_2) = (\alpha_1 \circ \pi_1 + \alpha_2 \circ \pi_2)(z_1, z_2),$$

para todo $(z_1, z_2) \in Z_1 \times Z_2$. □

---

[2]A maneira mais elegante de demonstrar a existência de Z_i e T_i é usando espaços quocientes: toma-se $Z_i = V/W_i$ e $T_i : V \to Z_i$ como sendo a aplicação quociente.

Usando o Lema, nós vamos verificar que $\mathrm{Im}(T^*) = W_1^{\mathrm{o}} + W_2^{\mathrm{o}}$. Temos:

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}(T^*) &= \big\{T^*(\alpha) : \alpha \in (Z_1 \times Z_2)^*\big\}\\ &= \big\{T^*(\alpha_1 \circ \pi_1 + \alpha_2 \circ \pi_2) : \alpha_1 \in Z_1^*,\ \alpha_2 \in Z_2^*\big\}\\ &= \big\{T_1^*(\alpha_1) + T_2^*(\alpha_2) : \alpha_1 \in Z_1^*,\ \alpha_2 \in Z_2^*\big\},\end{aligned}$$

já que $T^*(\alpha_i \circ \pi_i) = \alpha_i \circ \pi_i \circ T = \alpha_i \circ T_i = T_i^*(\alpha_i)$, $i = 1, 2$. Segue então que:

$$\mathrm{Im}(T^*) = \mathrm{Im}(T_1^*) + \mathrm{Im}(T_2^*) = \big(\mathrm{Ker}(T_1)\big)^{\mathrm{o}} + \big(\mathrm{Ker}(T_2)\big)^{\mathrm{o}} = W_1^{\mathrm{o}} + W_2^{\mathrm{o}}.$$