Gabarito da Primeira Prova

MAT0216 – Cálculo Diferencial e Integral III

Prof. Daniel Victor Tausk

29/03/2019

Questão 1. (valor 2,5 pontos) Sejam $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ e $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funções diferenciáveis e considere a função composta $h = g \circ f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Assumindo que a matriz Jacobiana de f no ponto $(0, 0)$ seja dada por

$$Jf(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

e que o gradiente de g no ponto $f(0, 0)$ seja o vetor $(1, 1)$, calcule a derivada direcional $\frac{\partial h}{\partial \vec{v}}(0, 0)$, em que $\vec{v} = (2, 1)$.

Solução. Temos

$$\frac{\partial h}{\partial \vec{v}}(0,0) = Jh(0,0)\vec{v} = Jh(0,0)\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

em que, pela regra da cadeia

$$Jh(0,0) = Jg\big(f(0,0)\big)Jf(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \end{pmatrix},$$

já que $Jg\big(f(0,0)\big)$ é a matriz que possui o gradiente $\nabla g\big(f(0,0)\big)$ na sua única linha. Assim:

$$\frac{\partial h}{\partial \vec{v}}(0,0) = \begin{pmatrix} 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 11.$$

Questão 2. (valor 2,5 pontos) Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ uma função diferenciável tal que a matriz Jacobiana de f seja dada por

$$Jf(x,y) = \begin{pmatrix} y & x \\ 2xy & x^2 \\ x+y & x-y \end{pmatrix},$$

para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$g(t) = f(t, t^2+1) \cdot f(\cos t, \operatorname{sen} t),$$

para todo $t \in \mathbb{R}$, em que $\vec{v} \cdot \vec{w}$ denota o produto escalar dos vetores $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$. Sabendo-se que $f(0,1) = (0,0,1)$ e que $f(1,0) = (0,0,2)$, calcule $g'(0)$.

Solução. Usando a regra do produto para derivação de um produto escalar, obtemos:

$$g'(t) = \Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(t, t^2+1)\Big) \cdot f(\cos t, \operatorname{sen} t) + f(t, t^2+1) \cdot \Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(\cos t, \operatorname{sen} t)\Big),$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. Da regra da cadeia, vem

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(t, t^2+1) = Jf(t, t^2+1) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \begin{pmatrix} t \\ t^2+1 \end{pmatrix} = Jf(t, t^2+1) \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix}$$

para todo $t \in \mathbb{R}$ e avaliando em $t = 0$ obtemos:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(t, t^2+1)\Big|_{t=0} = Jf(0,1) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Usando novamente a regra da cadeia, vem

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(\cos t, \operatorname{sen} t) = Jf(\cos t, \operatorname{sen} t) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \begin{pmatrix} \cos t \\ \operatorname{sen} t \end{pmatrix} = Jf(\cos t, \operatorname{sen} t) \begin{pmatrix} -\operatorname{sen} t \\ \cos t \end{pmatrix}$$

para todo $t \in \mathbb{R}$ e avaliando em $t = 0$ obtemos:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(\cos t, \operatorname{sen} t)\Big|_{t=0} = Jf(1,0) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Finalmente:

$$\begin{aligned} g'(0) &= (1,0,1) \cdot f(1,0) + f(0,1) \cdot (1,1,1) \\ &= (1,0,1) \cdot (0,0,2) + (0,0,1) \cdot (1,1,1) \\ &= 2 + 1 = 3. \end{aligned}$$

Questão 3. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por
$$f(x,y) = (x^2 - y^2, 2xy),$$
para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

(a) (valor 1,0 ponto) Determine a matriz Jacobiana de f num ponto $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

(b) (valor 1,0 ponto) Quais pontos $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ pertencem a algum aberto $U \subset \mathbb{R}^2$ tal que $f[U]$ seja aberto e a função $f|_U : U \to f[U]$ seja um difeomorfismo?

(c) (valor 1,0 ponto) Seja $U \subset \mathbb{R}^2$ um aberto contendo o ponto $(1,1)$ tal que $f[U]$ seja aberto e a função $f|_U : U \to f[U]$ seja um difeomorfismo. Calcule a matriz Jacobiana da função inversa $g = (f|_U)^{-1}$ no ponto $(0,2) = f(1,1)$.

Solução do item (a). Se f_1 e f_2 denotam as funções coordenadas de f, então $f_1(x,y) = x^2 - y^2$, $f_2(x,y) = 2xy$ e
$$Jf(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix},$$
para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Solução do item (b). Como f é de classe C^1 (na verdade, f é de classe C^∞), segue do Teorema da Função Inversa que um ponto $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ satisfaz a condição requerida no enunciado se, e somente se, a matriz Jacobiana $Jf(x,y)$ for inversível. Como $\det\big(Jf(x,y)\big) = 4(x^2+y^2)$, temos que $Jf(x,y)$ é inversível se, e somente se, $(x,y) \neq (0,0)$. Assim, os pontos que satisfazem a condição requerida no enunciado são todos os pontos de $\mathbb{R}^2$, exceto pela origem.

Solução do item (c). Como $(1,1) \in U$ e $f(1,1) = (0,2)$, temos:
$$Jg(0,2) = \big(Jf(1,1)\big)^{-1}.$$
Mas, pelo item (a),
$$Jf(1,1) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$
e portanto:
$$Jg(0,2) = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Questão 4. Considere a função $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por

$$F(x, y, z) = z^5 + xz^3 + 2yz,$$

para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

(a) (valor 1,0 ponto) Use o Teorema da Função Implícita para concluir que existem um aberto U em $\mathbb{R}^2$ contendo $(2, 0)$, um aberto V em $\mathbb{R}$ contendo 1 e uma função $f : U \to V$ de classe C^∞ tais que

$$F(x, y, z) = 3 \Longleftrightarrow z = f(x, y),$$

para todo $(x, y) \in U$ e todo $z \in V$.

(b) (valor 1,0 ponto) Calcule as derivadas parciais de f no ponto $(2, 0)$.

Solução do item (a). Como F é de classe C^∞ e $F(2, 0, 1) = 3$, devemos apenas verificar que a derivada parcial $\frac{\partial F}{\partial z}(2, 0, 1)$ é diferente de zero. Temos

$$\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z) = 5z^4 + 3xz^2 + 2y,$$

para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ e portanto:

$$\frac{\partial F}{\partial z}(2, 0, 1) = 11 \neq 0.$$

A conclusão segue do Teorema da Função Implícita.

Solução do item (b). Temos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, y, z)}{\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z)} \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(x, y, z)}{\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z)}\,,$$

para todo $(x, y) \in U$, em que $z = f(x, y)$. Mas

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y, z) = z^3 \quad \text{e} \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x, y, z) = 2z,$$

para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ e portanto

$$\frac{\partial F}{\partial x}(2, 0, 1) = 1 \quad \text{e} \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x, y, z) = 2,$$

donde:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(2, 0) = -\frac{1}{11} \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(2, 0) = -\frac{2}{11}\,\cdot$$