# Gabarito da Primeira Prova

**MAT0206 – Análise Real**

**MAP0216 – Introdução à Análise Real**

Prof. Daniel Victor Tausk

13/04/2012

**Questão 1.** Sejam $K$ um corpo ordenado e $a \in K$.

(a) (valor 0,5 ponto) Mostre que, dado $b \in K$ com $b < a$, então:

$$b < \frac{a+b}{2} < a.$$

(b) (valor $2,0$ pontos) Mostre que $a$ é o supremo do intervalo:

$$]-\infty, a[ = \{x \in K : x < a\}.$$

**Solução.** Dados $a, b \in K$ com $b < a$, temos $a + b < a + a = 2a$ e portanto:

$$\frac{a+b}{2} < a.$$

Similarmente, de $b < a$ vem $2b = b + b < a + b$, donde:

$$b < \frac{a+b}{2}.$$

Isso completa a resolução do item (a). Para o item (b), devemos verificar que $a$ é a menor cota superior do intervalo $]-\infty, a[$. Em primeiro lugar, é claro que $a$ é uma cota superior de $]-\infty, a[$, já que $x < a$ para todo $x \in ]\infty, a[$. Agora, vejamos que se $b < a$ então $b$ não é uma cota superior de $]-\infty, a[$. De fato, temos que $\frac{a+b}{2}$ pertence a $]-\infty, a[$ (porque é menor do que $a$) e é maior do que $b$, donde $b$ não é cota superior de $]-\infty, a[$.

**Questão 2.** Seja $K$ um corpo ordenado arquimediano.

(a) (valor 1,0 ponto) Dado $\varepsilon > 0$ em $K$, mostre que existe um inteiro positivo $n$ tal que $\frac{1}{n} < \varepsilon$.

(b) (valor 1,5 pontos) Considere o seguinte subconjunto de $K$:

$$A = \left\{ \tfrac{n-1}{n} : n \text{ inteiro positivo} \right\}.$$

Mostre que o supremo de $A$ é igual a 1.

**Solução.** Dado $\varepsilon > 0$ em $K$, como $K$ é arquimediano, existe um inteiro positivo $n$ tal que $n \cdot 1 = n > \frac{1}{\varepsilon}$. Daí $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Isso completa a resolução do item (a). Para o item (b), devemos mostrar que 1 é a menor cota superior de $A$. Em primeiro lugar, se $n$ é um inteiro positivo então $n - 1 < n$, donde:

$$\frac{n-1}{n} < 1,$$

o que mostra que 1 é uma cota superior de $A$. Devemos mostrar agora que, dado $\varepsilon > 0$, então $1 - \varepsilon$ não é uma cota superior de $A$. Para todo inteiro positivo $n$, temos:

$$1 - \varepsilon < \frac{n-1}{n} \Longleftrightarrow 1 - \varepsilon < 1 - \frac{1}{n} \Longleftrightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

Assim, se $n$ é um inteiro positivo tal que $\frac{1}{n} < \varepsilon$ (cuja existência é garantida pelo item (a)) então $\frac{n-1}{n}$ é um elemento de $A$ maior do que $1 - \varepsilon$, donde $1 - \varepsilon$ não é uma cota superior de $A$.

**Questão 3.** Seja $K$ um corpo ordenado.

(a) (valor 1,0 ponto) Dados $s, x \in K$ com $s > 0$ e $s^2 > x$, mostre que existe $\varepsilon > 0$ em $K$ tal que $s - \varepsilon > 0$ e $(s-\varepsilon)^2 > x$.

(b) (valor 1,5 pontos) Seja $A$ um subconjunto não vazio de $K$ tal que $a > 0$, para todo $a \in A$. Considere o conjunto:
$$B = \big\{a^2 : a \in A\big\}.$$
Se $A$ admite um supremo $s \in K$, mostre que $s^2$ é o supremo de $B$.

**Solução.** Dado $\varepsilon > 0$, temos:
$$(s-\varepsilon)^2 = s^2 - 2s\varepsilon + \varepsilon^2 > s^2 - 2s\varepsilon,$$
já que $\varepsilon^2 > 0$. Daí, se escolhermos $\varepsilon > 0$ tal que:
$$s^2 - 2s\varepsilon \geq x,$$
teremos também que:
$$(s-\varepsilon)^2 > x.$$
Assim, é suficiente encontrar $\varepsilon > 0$ tal que $\varepsilon < s$ (de modo que $s - \varepsilon > 0$) e $s^2 - 2s\varepsilon \geq x$. Mas:
$$s^2 - 2s\varepsilon \geq x \Longleftrightarrow \varepsilon \leq \frac{s^2 - x}{2s}.$$
Basta então tomar:
$$\varepsilon = \min\Big\{\frac{s}{2}, \frac{s^2 - x}{2s}\Big\}.$$
Note que $\varepsilon > 0$, já que $s > 0$ e $s^2 - x > 0$. Isso completa a resolução do item (a). Para o item (b), verifiquemos primeiramente que $s^2$ é uma cota superior de $B$. Dado $b \in B$, temos $b = a^2$, para algum $a \in A$. Mas, já que $s$ é cota superior de $A$, temos $a \leq s$ e (como $a \geq 0$) segue que $b = a^2 \leq s^2$. Logo $s^2$ é uma cota superior de $B$. Vejamos agora que se $x < s^2$ então $x$ não é cota superior de $B$. Como $A \neq \emptyset$ e todo elemento de $A$ é positivo, temos que $s > 0$. Já que $s^2 > x$, o item (a) nos dá $\varepsilon > 0$ tal que $s - \varepsilon > 0$ e $(s-\varepsilon)^2 > x$. Como $s$ é o supremo de $A$, temos que $s - \varepsilon$ não é cota superior de $A$ e portanto existe $a \in A$ tal que $s - \varepsilon < a$. Daí, já que $s - \varepsilon > 0$, temos:
$$x < (s-\varepsilon)^2 < a^2,$$
sendo que $a^2 \in B$. Segue que $x$ não é uma cota superior de $B$.

**Questão 4.** (valor 2,5 pontos) Sejam $X$ um conjunto, $f : X \to X$ uma função e $A$ um subconjunto enumerável de $X$. Mostre que existe um subconjunto enumerável $B$ de $X$ tal que $A \subset B$ e $f(B) \subset B$.

**Solução.** Para $n$ natural, seja $f^{(n)} : X \to X$ a $n$-ésima iterada de $f$, ou seja:

$$f^{(0)} = \mathrm{Id}_X, \quad f^{(n+1)} = f \circ f^{(n)}, \text{ para todo } n \text{ natural.}$$

Tome:

$$B = \bigcup_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(A).$$

Como $A$ é enumerável e $f^{(n)}|_A : A \to f^{(n)}(A)$ é uma função sobrejetora, temos que $f^{(n)}(A)$ é enumerável. Segue que $B$ é enumerável, sendo a união de uma seqüência de conjuntos enumeráveis. Além do mais:

$$A = f^{(0)}(A) \subset B.$$

Finalmente, dado $x \in B$ então $x = f^{(n)}(a)$, para algum $a \in A$ e algum $n$ natural. Daí $f(x) = f^{(n+1)}(a)$, donde $f(x) \in B$. Isso prova que $f(B) \subset B$.