Gabarito da Primeira Prova

MAT0122 – Álgebra Linear I

Prof. Daniel Victor Tausk

27/03/2014

Questão 1. Seja dado $c \in \mathbb{R}$ e considere os vetores:

$$u_1 = (1, 0, c^2, 1), \quad u_2 = (2, 1, 1, c + 1), \quad u_3 = (0, -1, c^2, c^2 - c).$$

(a) (valor 2,0 pontos) Determine os valores de c para os quais os vetores u_1, u_2 e u_3 são linearmente dependentes.

(b) (valor 1,0 ponto) Suponha que $c = 0$. Determine um vetor $u_4 \in \mathbb{R}^4$ tal que $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ seja uma base de $\mathbb{R}^4$.

Solução.

(a) Considere a matriz que tem os vetores u_1, u_2 e u_3 em suas linhas:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & c^2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & c+1 \\ 0 & -1 & c^2 & c^2 - c \end{pmatrix}.$$

Escalonando a matriz, obtemos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & c^2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 - 2c^2 & c-1 \\ 0 & -1 & c^2 & c^2 - c \end{pmatrix},$$

e depois:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & c^2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 - 2c^2 & c-1 \\ 0 & 0 & 1 - c^2 & c^2 - 1 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Os vetores u_1, u_2 e u_3 são linearmente dependentes se e somente se a matriz escalonada (1) possui uma linha nula, isto é, se e somente se $c^2 = 1$. Assim, os vetores u_1, u_2 e u_3 são linearmente dependentes se e somente se $c = 1$ ou $c = -1$.

(b) Colocando $c = 0$ na matriz escalonada (1), obtemos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

A quarta coluna dessa matriz não possui pivô e, portanto, tomando $u_4 = (0, 0, 0, 1)$, temos que $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ é uma base de $\mathbb{R}^4$.

Questão 2. (valor 3,0 pontos) Os polinômios:

$$p_1(x) = 1 - x + x^2, \quad p_2(x) = 2 + x^2, \quad p_3(x) = 1 - x,$$

constituem uma base $\mathcal{B}$ do espaço $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$. Dados $b, c \in \mathbb{R}$, determine (em função de b e c) as coordenadas na base $\mathcal{B}$ do polinômio $p(x) = 2c+bx+cx^2$.

Solução. As coordenadas de p na base $\mathcal{B}$ são os escalares α, β, γ tais que:

$$p = \alpha p_1 + \beta p_2 + \gamma p_3.$$

Essa igualdade é equivalente a:

$$2c + bx + cx^2 = \alpha + 2\beta + \gamma - (\alpha + \gamma)x + (\alpha + \beta)x^2,$$

e essa última igualdade, por sua vez, é equivalente ao sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2c \\ -b \\ c \end{pmatrix},$$

com incógnitas α, β e γ. Resolvendo o sistema, obtemos:

$$\alpha = -\frac{b}{2}, \quad \beta = \frac{b}{2} + c, \quad \gamma = -\frac{b}{2},$$

que são então as coordenadas de p na base $\mathcal{B}$.

Questão 3. Em cada um dos itens abaixo, determine se S é um subespaço vetorial de V. Nos itens em que a resposta for negativa, apresente uma breve justificativa.

(a) (valor 1,0 ponto) $V = M_n(\mathbb{R})$, $S = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : A \text{ é simétrica}\}$;

(b) (valor 1,0 ponto) $V = \mathbb{R}^3$, $S = \{(x, x, x^2) : x \in \mathbb{R}\}$;

(c) (valor 1,0 ponto) V é o espaço de todas as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, S é o conjunto das funções contínuas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que $f(1) = f(2)$;

(d) (valor 1,0 ponto) $V = \mathcal{P}(\mathbb{R})$, $S = \{p \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) : p(0) > 0\}$.

Solução.

(a) S é um subespaço de V, pois a soma de matrizes simétricas é simétrica, o produto de uma matriz simétrica por um escalar é uma matriz simétrica e a matriz nula é simétrica.

(b) S não é um subespaço de V, pois $(1, 1, 1) \in S$, $(2, 2, 4) \in S$, mas $(1, 1, 1) + (2, 2, 4) = (3, 3, 5) \notin S$.

(c) S é um subespaço de V. De fato, se $f, g \in S$ então $f + g$ é contínua (sendo uma soma de funções contínuas) e

$$(f + g)(1) = f(1) + g(1) = f(2) + g(2) = (f + g)(2),$$

de modo que $f + g \in S$. Além do mais, se $f \in S$ e $c \in \mathbb{R}$, então cf é uma função contínua e $(cf)(1) = cf(1) = cf(2) = (cf)(2)$, de modo que $cf \in S$. Finalmente, a função nula $f \equiv 0$ é contínua e $f(1) = 0 = f(2)$. Assim, $0 \in S$.

(d) S não é um subespaço de V, pois $0 \notin S$.