Gabarito da Primeira Prova
MAT0121 – Cálculo Diferencial e Integral II

Prof. Daniel Victor Tausk
12/09/2018

Questão 1. Considere o conjunto

$$A = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1 \text{ e } x^3 \le y \le x^2\big\}$$

e seja $S \subset \mathbb{R}^3$ o sólido obtido pela rotação de A em torno do eixo y.

(a) (valor 1,0 ponto) Escreva uma integral cujo resultado seja o volume do sólido S.

(b) (valor 1,0 ponto) Calcule a integral que você escreveu no item (a).

Solução do item (a). Para cada $x \in [0,1]$, considere o cilindro obtido pela rotação em torno do eixo y do segmento de reta de extremidades (x, x^3) e (x, x^2). O raio da base desse cilindro é x e sua altura é $x^2 - x^3$, donde sua área lateral é $2\pi x(x^2 - x^3)$. Como S é dado pela união desses cilindros, o método das cascas cilíndricas nos diz que o volume de S é dado pela integral:

$$\int_0^1 2\pi x(x^2 - x^3)\,\mathrm{d}x.$$

Solução do item (b). Temos:

$$\int_0^1 2\pi x(x^2 - x^3)\,\mathrm{d}x = 2\pi\int_0^1 (x^3 - x^4)\,\mathrm{d}x = 2\pi\Big(\frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5}\Big)\Big|_0^1 = 2\pi\Big(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\Big)$$

$$= \frac{\pi}{10}\,.$$

Questão 2. Considere um sólido S em $\mathbb{R}^3$ que fique entre os planos

$$\big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0\big\} \quad \text{e} \quad \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = \tfrac{\pi}{2}\big\}$$

e tal que, para todo $t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, a interseção de S com o plano

$$\big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = t\big\}$$

seja um retângulo de lados $\operatorname{sen} t$ e $\cos t$.

(a) (valor 1,0 ponto) Escreva uma integral cujo resultado seja o volume do sólido S.

(b) (valor 1,0 ponto) Calcule a integral que você escreveu no item (a).

Solução do item (a). O volume de S é dado pela integral no intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ da função cujo valor no ponto $t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ é a área da interseção de S com o plano $\big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = t\big\}$ (o valor da função nas extremidades do intervalo é irrelevante para a integral). Essa interseção é um retângulo cuja área é $\operatorname{sen} t \cos t$. Assim, o volume de S é dado pela integral:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} t \cos t \, \mathrm{d}t.$$

Solução do item (b). Temos:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} t \cos t \, \mathrm{d}t = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}(2t) \, \mathrm{d}t = -\frac{1}{4} \cos(2t) \bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot$$

Questão 3.

(a) (valor 1,0 ponto) Calcule a derivada da função $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$F(x) = \int_0^{\operatorname{sen} x} e^{1-t^2}\,\mathrm{d}t,$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

(b) (valor 1,5 pontos) Calcule o limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^6} \int_0^{x^2} \operatorname{sen}(t^2)\,\mathrm{d}t.$$

Solução do item (a). Considere as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por

$$f(x) = e^{1-x^2} \quad \text{e} \quad G(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t,$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Como f é contínua, segue do segundo Teorema Fundamental do Cálculo que G é derivável e que $G'(x) = f(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Já que $F(x) = G(\operatorname{sen} x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$, a regra da cadeia nos dá:

$$F'(x) = G'(\operatorname{sen} x)\cos x = f(\operatorname{sen} x)\cos x = e^{1-\operatorname{sen}^2 x}\cos x = e^{\cos^2 x}\cos x,$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Solução do item (b). Considere as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por

$$f(x) = \operatorname{sen}(x^2), \quad G(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{e} \quad F(x) = G(x^2),$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Temos:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^6} \int_0^{x^2} \operatorname{sen}(t^2)\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to 0} \frac{F(x)}{x^6}\,\cdot$$

Como f é contínua, segue do segundo Teorema Fundamental do Cálculo que G é derivável e que $G'(x) = f(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Usando a regra da cadeia vemos que F é derivável e que

$$F'(x) = 2xG'(x^2) = 2xf(x^2) = 2x\operatorname{sen}(x^4),$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Em particular, F é contínua e portanto:

$$\lim_{x\to 0} F(x) = F(0) = 0.$$

Como $\lim_{x\to 0} x^6 = 0$ e $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^6 = 6x^5$ é diferente de zero para $x \neq 0$, podemos usar a regra de L'Hospital para obter

$$\lim_{x\to 0} \frac{F(x)}{x^6} = \lim_{x\to 0} \frac{F'(x)}{6x^5} = \lim_{x\to 0} \frac{2x\operatorname{sen}(x^4)}{6x^5} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x^4)}{3x^4} = \frac{1}{3}\lim_{y\to 0} \frac{\operatorname{sen} y}{y} = \frac{1}{3},$$

em que na penúltima igualdade usamos a substituição $x^4 = y$.

Questão 4. Decida em cada um dos itens abaixo se a integral imprópria dada converge ou diverge.

(a) (valor 1,5 pontos) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^2 + \operatorname{sen} x}{\sqrt{x^8 + x^4 + 1}}\,\mathrm{d}x$;

(b) (valor 2,0 pontos) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\operatorname{sen} x \ln^2 x}\,\mathrm{d}x$.

Solução do item (a). Como $x^8 + x^4 + 1 > 0$ para todo $x \geq 0$, temos que o integrando é contínuo e em particular não possui singularidades. Usaremos um limite para comparar o integrando com a função $f(x) = \frac{1}{x^2}$ no infinito. Temos:

$$\lim_{x\to+\infty} \left[\frac{x^2 + \operatorname{sen} x}{\sqrt{x^8 + x^4 + 1}} \Big/ \frac{1}{x^2} \right] = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^4 + x^2 \operatorname{sen} x}{\sqrt{x^8 + x^4 + 1}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^4\left(1 + \frac{\operatorname{sen} x}{x^2}\right)}{x^4\sqrt{1 + \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^8}}} = 1.$$

Como a integral imprópria $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$ é (absolutamente) convergente, segue que também a integral imprópria

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2 + \operatorname{sen} x}{\sqrt{x^8 + x^4 + 1}}\,\mathrm{d}x$$

é (absolutamente) convergente.

Solução do item (b). Como $\operatorname{sen} x \neq 0$ e $\ln x \neq 0$ para $x \in \left]0, \frac{1}{2}\right]$, temos que o integrando é contínuo no intervalo $\left]0, \frac{1}{2}\right]$ e portanto não possui singularidades nesse intervalo. Usaremos um limite para comparar o integrando com a função $f(x) = \frac{1}{x \ln^2 x}$ próximo ao ponto 0. Temos:

$$\lim_{x\to 0^+} \left[\frac{1}{\operatorname{sen} x \ln^2 x} \Big/ \frac{1}{x \ln^2 x} \right] = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\operatorname{sen} x} = 1.$$

Vejamos agora que a integral imprópria

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x \ln^2 x}\,\mathrm{d}x$$

é (absolutamente) convergente, donde seguirá que também a integral imprópria

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\operatorname{sen} x \ln^2 x}\,\mathrm{d}x$$

é (absolutamente) convergente. Temos:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x\ln^2 x}\,\mathrm{d}x = \lim_{u\to 0^+}\int_u^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x\ln^2 x}\,\mathrm{d}x = \lim_{u\to 0^+}\int_{\ln u}^{\ln\frac{1}{2}} \frac{1}{y^2}\,\mathrm{d}y$$

$$= \lim_{u\to 0^+}\left(-\frac{1}{y}\right)\Bigg|_{\ln u}^{\ln\frac{1}{2}} = \lim_{u\to 0^+}\left(\frac{1}{\ln u} - \frac{1}{\ln\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{\ln 2}\,,$$

em que usamos a substituição $y = \ln x$ na segunda igualdade.