Gabarito da Primeira Prova

MAT0111 – Cálculo Diferencial e Integral I

Prof. Daniel Victor Tausk
12/04/2012

Questão 1. (valor 2,0 pontos) Sejam dados $a, b \in \mathbb{R}$. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}(ax - b\operatorname{sen} x), & \text{se } x < 0, \\ 2a + b, & \text{se } x = 0, \\ a - e^x, & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

Determine os valores de a e b para os quais a função f é contínua.

Solução. A função f é contínua em todos os pontos de $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Assim, vale que f é contínua se e somente se f for contínua no ponto 0. Temos que:

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{ax - b\operatorname{sen} x}{x} = \lim_{x \to 0^-} \Big(a - b\,\frac{\operatorname{sen} x}{x} \Big) = a - b,$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (a - e^x) = a - 1.$$

Portanto:

$$\begin{aligned} f \text{ é contínua} &\iff a - b = a - 1 = f(0) \iff a - b = a - 1 = 2a + b \\ &\iff a = -2 \text{ e } b = 1. \end{aligned}$$

Questão 2. Em cada um dos itens abaixo, calcule o limite, se existir, ou explique porque o limite não existe.

(a) (valor 1,0 ponto) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}|x|}{x}$;

(b) (valor 1,0 ponto) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-\cos x}{x}$;

(c) (valor 1,0 ponto) $\lim_{x\to +\infty} (xe^{\frac{1}{x}} - x)$;

(d) (valor 1,0 ponto) $\lim_{x\to 0} \left[(1+\operatorname{sen} x)^{\frac{1}{x}}\right]$;

(e) (valor 1,0 ponto) $\lim_{x\to 0^+} x^5 e^{\frac{1}{x}}$;

(f) (valor 1,0 ponto) $\lim_{x\to 1} \dfrac{\operatorname{tg}(x^2-1)}{x-1}$.

Solução.

(a) Temos que:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen}|x|}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1,$$

e que:

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\operatorname{sen}|x|}{x} = \lim_{x\to 0^-} -\frac{\operatorname{sen} x}{x} = -1.$$

Como os limites laterais são diferentes, concluímos que o limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}|x|}{x}$$

não existe.

(b) Temos:

$$\frac{\sqrt{1+x}-\cos x}{x} = \frac{(\sqrt{1+x}-\cos x)(\sqrt{1+x}+\cos x)}{x(\sqrt{1+x}+\cos x)} = \frac{1+x-\cos^2 x}{x(\sqrt{1+x}+\cos x)}$$

$$= \frac{x+\operatorname{sen}^2 x}{x(\sqrt{1+x}+\cos x)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+x}+\cos x} + \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,\frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{1+x}+\cos x}.$$

Assim:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\cos x}{x} = \frac{1}{2}.$$

(c) Fazendo a mudança de variável $y = \frac{1}{x}$, obtemos:

$$\lim_{x\to+\infty} (xe^{\frac{1}{x}} - x) = \lim_{y\to 0} \frac{e^y - 1}{y} = 1.$$

(d) Temos:

$$(1 + \operatorname{sen} x)^{\frac{1}{x}} = \left[(1 + \operatorname{sen} x)^{\frac{1}{\operatorname{sen} x}}\right]^{\frac{\operatorname{sen} x}{x}}.$$

Fazendo a mudança de variável $y = \operatorname{sen} x$, obtemos:

$$\lim_{x\to 0} \left[(1 + \operatorname{sen} x)^{\frac{1}{\operatorname{sen} x}}\right] = \lim_{y\to 0} \left[(1 + y)^{\frac{1}{y}}\right] = e.$$

Como $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$, concluímos que:

$$\lim_{x\to 0} \left[(1 + \operatorname{sen} x)^{\frac{1}{x}}\right] = e^1 = e.$$

(e) Fazendo a mudança de variável $y = \frac{1}{x}$, obtemos:

$$\lim_{x\to 0^+} x^5 e^{\frac{1}{x}} = \lim_{y\to+\infty} \frac{e^y}{y^5} = +\infty.$$

(f) Temos:

$$\frac{\operatorname{tg}(x^2 - 1)}{x - 1} = \frac{1}{\cos(x^2 - 1)} \frac{\operatorname{sen}(x^2 - 1)}{x^2 - 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}.$$

Fazendo a mudança de variável $y = x^2 - 1$, obtemos:

$$\lim_{x\to 1} \frac{\operatorname{sen}(x^2 - 1)}{x^2 - 1} = \lim_{y\to 0} \frac{\operatorname{sen} y}{y} = 1.$$

Além do mais:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x\to 1} (x + 1) = 2.$$

Logo:

$$\lim_{x\to 1} \frac{\operatorname{tg}(x^2 - 1)}{x - 1} = 2.$$

Questão 3. Em cada um dos itens abaixo, determine a derivada da função f num ponto arbitrário x de seu domínio, utilizando a definição de derivada.

(a) (valor 1,0 ponto) $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$;

(b) (valor 1,0 ponto) $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$.

Solução.

(a) Dado $x > 0$, temos:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-h}{hx(x+h)}$$

$$= \lim_{h\to 0} -\frac{1}{x(x+h)} = -\frac{1}{x^2}.$$

(b) Dado $x > 0$, temos:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(\sqrt{x+h} - \sqrt{x})(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Questão 4. (valor 1,0 ponto) Sejam $f : D \to \mathbb{R}$, $g : E \to \mathbb{R}$ funções, com $D, E \subset \mathbb{R}$, sendo a imagem de f contida no domínio de g. Seja $a \in D$. Suponha que f seja contínua no ponto a e que g seja contínua no ponto $f(a)$. Demonstre (usando a definição de função contínua com ε's e δ's) que a função composta $g \circ f$ é contínua no ponto a.

Solução. Devemos mostrar que para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, para todo $x \in D$:

$$|x - a| < \delta \Longrightarrow |(g \circ f)(x) - (g \circ f)(a)| < \varepsilon.$$

Seja dado $\varepsilon > 0$. A partir da continuidade de g no ponto $f(a)$, obtemos $\eta > 0$ tal que, para todo $y \in E$:

$$|y - f(a)| < \eta \Longrightarrow |g(y) - (g \circ f)(a)| < \varepsilon. \tag{1}$$

Agora, a partir de $\eta > 0$, a continuidade de f no ponto a nos dá $\delta > 0$ tal que, para todo $x \in D$:

$$|x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \eta.$$

Assim, para todo $x \in D$, temos:

$$|x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \eta \overset{(1)}{\Longrightarrow} |(g \circ f)(x) - (g \circ f)(a)| < \varepsilon.$$

Isso demonstra que $g \circ f$ é contínua no ponto a.