NOTAS PARA O CURSO DE OPERADORES LINEARES

DANIEL V. TAUSK

1. Índice de curvas planas

1.1. **Definição.** Dado um ponto $p \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ então um *ângulo* (ou *coordenada ângular*) para p é um número real $\theta \in \mathbb{R}$ tal que:

$$p = \|p\|(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta), \tag{1.1}$$

onde $\|\cdot\|$ denota a norma Euclideana em $\mathbb{R}^2$. Se U é um subconjunto de $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ então uma *função ângulo* em U é uma função contínua $\theta : U \to \mathbb{R}$ tal que $\theta(p)$ é um ângulo para p, para todo $p \in U$. Mais geralmente, se Λ é um espaço topológico e $\phi : \Lambda \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ é uma função contínua então uma *função ângulo ao longo de* ϕ (ou, uma *função ângulo para* ϕ) é uma função contínua $\theta : \Lambda \to \mathbb{R}$ tal que $\theta(p)$ é um ângulo para $\phi(p)$, para todo $p \in U$.

Note que se $p = (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ então a igualdade (1.1) pode ser reescrita como:

$$x = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} \cos\theta, \quad y = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} \operatorname{sen}\theta.$$

Claramente, se $\theta \in \mathbb{R}$ é um ângulo para $p \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ então $\theta' \in \mathbb{R}$ será um outro ângulo para p se e somente se $\theta' = \theta + 2k\pi$, para algum $k \in \mathbb{Z}$. Além do mais, fixado $\theta_0 \in \mathbb{R}$, então cada $p \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ admite um único ângulo θ no intervalo $[\theta_0, \theta_0 + 2\pi[$.

1.2. **Lema.** *Seja Λ um espaço topológico conexo e $\phi : \Lambda \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ uma função contínua. Se $\theta_1 : \Lambda \to \mathbb{R}$, $\theta_2 : \Lambda \to \mathbb{R}$ são ambas funções ângulo ao longo de ϕ então existe $k \in \mathbb{Z}$ com $\theta_2(\lambda) = \theta_1(\lambda) + 2k\pi$, para todo $\lambda \in \Lambda$.*

Demonstração. Para cada $\lambda \in \Lambda$, temos que $\theta_1(\lambda)$ e $\theta_2(\lambda)$ são ambos ângulos para o ponto $\phi(\lambda)$ e portanto existe $k(\lambda) \in \mathbb{Z}$ com $\theta_1(\lambda) = \theta_2(\lambda) + 2k(\lambda)\pi$; temos:

$$k(\lambda) = \frac{\theta_1(\lambda) - \theta_2(\lambda)}{2\pi}$$

e portanto $k : \Lambda \to \mathbb{Z}$ é uma função contínua. Como Λ é conexo, a imagem de k deve ser um intervalo contido em $\mathbb{Z}$, o que prova que k é constante. □

1.3. **Corolário.** *Se U é um subconjunto conexo de $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ então, dadas duas funções ângulo $\theta_1 : U \to \mathbb{R}$ e $\theta_2 : U \to \mathbb{R}$, existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $\theta_2(p) = \theta_1(p) + 2k\pi$, para todo $p \in U$.*

Demonstração. Tome $\Lambda = U$ e $\phi : U \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ igual à aplicação inclusão no Lema 1.2. □

Date: 5 de janeiro de 2005.

1.4. *Observação.* Claramente, se $\theta : U \to \mathbb{R}$ é uma função ângulo definida num subconjunto U de $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ e se $\phi : \Lambda \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ é uma função contínua com imagem em U então $\theta \circ \phi$ é uma função ângulo ao longo de ϕ.

1.5. *Observação.* Se $U = S^1$ denota o círculo unitário de centro na origem em $\mathbb{R}^2$ então *não existe* uma função ângulo em U. De fato, se $\theta : S^1 \to \mathbb{R}$ fosse uma função ângulo então $\theta \circ \gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ seria uma função ângulo ao longo da curva contínua $\gamma : [0, 2\pi] \ni t \mapsto (\cos t, \operatorname{sen} t)$. Como $\tilde{\theta}(t) = t$ é também uma função ângulo para γ, o Lema 1.2 implica que $\theta \circ \gamma - \tilde{\theta}$ é constante; mas $(\theta \circ \gamma)(0) = (\theta \circ \gamma)(2\pi)$, enquanto $\tilde{\theta}(0) \neq \tilde{\theta}(2\pi)$.

1.6. **Lema.** *Seja $\theta_0 \in \mathbb{R}$ e considere o conjunto:*

$$A_{\theta_0} = \mathbb{R}^2 \setminus \big\{(t \cos \theta_0, t \operatorname{sen} \theta_0) : t \geq 0\big\}.$$

Existe uma única função ângulo θ em A_{θ_0} tomando valores no intervalo $]\theta_0, \theta_0 + 2\pi[$; essa função ângulo é de classe C^∞.

Demonstração. É claro que cada $p \in A_{\theta_0}$ admite um único ângulo no intervalo $]\theta_0, \theta_0 + 2\pi[$; devemos apenas mostrar que a função ângulo obtida dessa maneira é de classe C^∞. Para isso, considere a função:

$$]0, +\infty[\times]\theta_0, \theta_0 + 2\pi[\ni (\rho, \theta) \longmapsto (\rho \cos \theta, \rho \operatorname{sen} \theta) \in A_{\theta_0}. \tag{1.2}$$

Claramente a função (1.2) é bijetora e de classe C^∞. Um cálculo simples mostra que sua matriz Jacobiana é inversível em todo ponto e portanto (1.2) é um difeomorfismo C^∞, pelo Teorema da Função Inversa. A função ângulo desejada é simplesmente a segunda coordenada da inversa de (1.2). □

1.7. **Corolário.** *Dado $p \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, existe uma função ângulo de classe C^∞ definida numa vizinhança aberta de p em $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.* □

1.8. **Corolário.** *Toda função ângulo θ num subconjunto aberto U de $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ é de classe C^∞.*

Demonstração. Em vista do Corolário 1.3, duas funções ângulo definidas numa bola aberta de centro p contida em U devem diferir por uma constante. A conclusão segue do Corolário 1.7. □

1.9. **Corolário.** *Se $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ é uma curva de classe C^k (resp., uma curva de classe C^k por partes) então toda função ângulo $\theta : [a, b] \to \mathbb{R}$ para γ é de classe C^k (resp., de classe C^k por partes).*

Demonstração. Dado $[c, d] \subset [a, b]$ então $\theta|_{[c,d]}$ é uma função ângulo para $\gamma|_{[c,d]}$; é suficiente portanto considerar o caso em que γ é de classe C^k. Fixado $t \in [a, b]$, existe pelo Corolário 1.7 uma função ângulo $\tilde{\theta} : U \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ definida numa vizinhança aberta U de $\gamma(t)$ em $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$; daí, existe uma vizinhança $[c, d]$ de t em $[a, b]$ com $\gamma\big([c, d]\big) \subset U$. Como $\theta|_{[c,d]}$ e $\tilde{\theta} \circ \gamma|_{[c,d]}$ são ambas funções ângulo para $\gamma|_{[c,d]}$, segue que elas diferem por uma constante (Lema 1.2). Logo $\theta|_{[c,d]}$ é de classe C^k. □

1.10. **Lema.** *Toda curva contínua* $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ *admite uma função ângulo.*

Demonstração. Em vista do Corolário 1.7 e da continuidade de γ, todo $t \in [a,b]$ possui uma vizinhança aberta I_t relativamente a $[a,b]$ tal que $\gamma(I_t)$ está contido no domínio de uma função ângulo. A cobertura aberta $[a,b] = \bigcup_{t\in[a,b]} I_t$ do compacto $[a,b]$ admite um número de Lebesgue $\delta > 0$, i.e., todo subconjunto de $[a,b]$ com diâmetro menor que δ está contido em algum I_t. Seja:

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$$

uma partição de $[a,b]$ com $t_i - t_{i-1} < \delta$, para $i = 1, \ldots, n$. Então para cada i existe uma função ângulo cujo domínio contém $\gamma\big([t_{i-1}, t_i]\big)$ e portanto, pela Observação 1.4, existe uma função ângulo $\theta_i : [t_{i-1}, t_i] \to \mathbb{R}$ para $\gamma|_{[t_{i-1},t_i]}$. Para completar a demonstração, construiremos para cada $i = 1, \ldots, n$ uma função ângulo $\tilde{\theta}_i : [a, t_i] \to \mathbb{R}$ para $\gamma|_{[a,t_i]}$; usamos indução em i. Para $i = 1$, definimos $\tilde{\theta}_1 = \theta_1$. Suponha que $\tilde{\theta}_i$ é uma função ângulo para $\gamma|_{[a,t_i]}$, para algum $i = 1, \ldots, n-1$; vamos estender $\tilde{\theta}_i$ a uma função ângulo $\tilde{\theta}_{i+1}$ para $\gamma|_{[a,t_{i+1}]}$. Como $\tilde{\theta}_i(t_i)$ e $\theta_{i+1}(t_i)$ são ambos ângulos para o ponto $\gamma(t_i)$, vemos que existe $k \in \mathbb{Z}$ com $\tilde{\theta}_i(t_i) - \theta_{i+1}(t_i) = 2k\pi$; uma função ângulo $\tilde{\theta}_{i+1}$ ao longo de $\gamma|_{[a,t_{i+1}]}$ é obtida fazendo:

$$\tilde{\theta}_{i+1}|_{[a,t_i]} = \tilde{\theta}_i, \quad \tilde{\theta}_{i+1}|_{[t_i,t_{i+1}]} = \theta_{i+1} + 2k\pi. \qquad \square$$

1.11. **Definição.** Seja $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ uma curva contínua e fechada (i.e., $\gamma(a) = \gamma(b)$). O *índice* de γ é definido por:

$$\mathrm{ind}(\gamma) = \frac{\theta(b) - \theta(a)}{2\pi} \in \mathbb{Z},$$

onde $\theta : [a,b] \to \mathbb{R}$ é uma função ângulo para γ.

Em vista do Lema 1.10 toda curva contínua admite uma função ângulo θ e em vista do Lema 1.2 o inteiro $\frac{1}{2\pi}\big(\theta(b) - \theta(a)\big)$ não depende da escolha de θ. Logo o índice de γ está de fato bem definido. Como não há nada de especial a respeito da origem, introduzimos a seguinte:

1.12. **Definição.** Seja $p \in \mathbb{R}^2$ um ponto qualquer e $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ uma curva contínua e fechada que não passa por p. O *índice de* γ *em torno de* p é definido como o índice da curva $[a,b] \ni t \mapsto \gamma(t) - p$, ou seja:

$$\mathrm{ind}(\gamma, p) = \mathrm{ind}(\gamma - p).$$

Claramente, $\mathrm{ind}(\gamma, 0) = \mathrm{ind}(\gamma)$.

1.13. **Lema.** *Se* $H : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ *é uma função contínua então existe uma função ângulo ao longo de* H.

Demonstração. Para todo (t,s) pertencente ao retângulo $R = [a,b] \times [c,d]$, o ponto $H(t,s)$ possui uma vizinhança aonde está definida uma função ângulo (Corolário 1.7); daí, como H é contínua, existe uma vizinhança aberta $V_{(t,s)}$

de (t,s) relativamente a R tal que $H(V_{(t,s)})$ está contido no domínio de uma função ângulo. A cobertura aberta $R = \bigcup_{(t,s)\in R} V_{(t,s)}$ do compacto R admite um número de Lebesgue $\delta > 0$, i.e., todo subconjunto de R com diâmetro menor que δ está contido em algum $V_{(t,s)}$. Consideremos partições:

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b, \quad c = s_0 < s_1 < \cdots < s_m = d$$

dos intervalos $[a,b]$ e $[c,d]$ respectivamente, de modo que cada retângulo $R_{ij} = [t_{i-1}, t_i] \times [s_{j-1}, s_j]$ possui diâmetro menor que δ, para $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$. Como $H(R_{ij})$ está contido no domínio de uma função ângulo, existe uma função ângulo $\theta_{ij} : R_{ij} \to \mathbb{R}$ ao longo de $H|_{R_{ij}}$ (Observação 1.4). Considere os mn retângulos R_{ij} ordenados da seguinte forma:

(1.3) $R_{11},\ R_{12},\ \ldots,\ R_{1m},\ R_{21},\ R_{22},\ \ldots,\ R_{2m},\ \ldots,\ \ldots,\ R_{n1},\ \ldots,\ R_{nm};$

denote por R^1, R^2, $\ldots$, R^u, a lista formada pelos retângulos R_{ij} ordenados como em (1.3), onde $u = mn$. Denote também por θ^1, θ^2, $\ldots$, θ^u a correspondente ordenação para as funções ângulo θ_{ij}. Para cada $\alpha = 1, \ldots, u$ defina:

$$\widetilde{R}_\alpha = R^1 \cup \cdots \cup R^\alpha.$$

Nós contruiremos usando indução em α uma função ângulo $\tilde{\theta}_\alpha : \widetilde{R}_\alpha \to \mathbb{R}$ para $H|_{\widetilde{R}_\alpha}$. Para $\alpha = 1$, defina $\tilde{\theta}_1 = \theta^1$. Supondo que $\tilde{\theta}_\alpha$ já foi construída para um certo $\alpha = 1, \ldots, u-1$, definiremos $\tilde{\theta}_{\alpha+1}$ estendendo $\tilde{\theta}_\alpha$. Note que $\tilde{\theta}_\alpha$ e $\theta^{\alpha+1}$ ambas restringem-se a funções ângulo para $H|_{\widetilde{R}_\alpha \cap R^{\alpha+1}}$. Além do mais a interseção $\widetilde{R}_\alpha \cap R^{\alpha+1}$ é conexa (ela é igual a um segmento de reta ou à união de dois segmentos de reta com um vértice comum). Segue do Lema 1.2 que existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que:

$$\tilde{\theta}_\alpha|_{\widetilde{R}_\alpha \cap R^{\alpha+1}} = \theta^{\alpha+1}|_{\widetilde{R}_\alpha \cap R^{\alpha+1}} + 2k\pi.$$

A função ângulo $\tilde{\theta}_{\alpha+1} : \widetilde{R}_{\alpha+1} \to \mathbb{R}$ é obtida fazendo[1]:

$$\tilde{\theta}_{\alpha+1}|_{\widetilde{R}_\alpha} = \tilde{\theta}_\alpha, \quad \tilde{\theta}_{\alpha+1}|_{R^{\alpha+1}} = \theta^{\alpha+1}|_{R^{\alpha+1}} + 2k\pi. \qquad \square$$

1.14. **Definição.** Seja U um subconjunto de $\mathbb{R}^n$ e sejam $\gamma : [a,b] \to U$, $\mu : [a,b] \to U$ curvas contínuas fechadas em U. Dizemos que γ e μ são *homotópicas em U como curvas fechadas* se existe uma função contínua $H : [a,b] \times [0,1] \to U$ (chamada uma *homotopia de curvas fechadas* de γ para μ) tal que:

- $H(s,0) = \gamma(s)$, para todo $s \in [a,b]$;
- $H(s,1) = \mu(s)$, para todo $s \in [a,b]$;
- $H(a,t) = H(b,t)$, para todo $t \in [0,1]$.

---

[1] Para justificar a continuidade da função obtida, usa-se o seguinte resultado geral de topologia: se X, Y são espaços topológicos, $f : X \to Y$ é uma função e se $F_1, \ldots, F_r \subset X$ são fechados que cobrem X e tais que a restrição de f a cada F_i é contínua então f é contínua.

É fácil ver que, fixado $U \subset \mathbb{R}^n$, a relação definida por:

$$\gamma \sim \mu \Longleftrightarrow \gamma \text{ e } \mu \text{ são homotópicas em } U \text{ como curvas fechadas}$$

é uma relação de equivalência no conjunto das curvas contínuas fechadas no conjunto U.

1.15. **Exemplo.** Se U é um subconjunto convexo de $\mathbb{R}^n$ então quaisquer curvas contínuas fechadas $\gamma : [a,b] \to U$, $\mu : [a,b] \to U$ são homotópicas em U como curvas fechadas; de fato, uma homotopia é obtida definindo:

$$H(s,t) = (1-t)\gamma(s) + t\mu(s),$$

para todos $s \in [a,b]$, $t \in [0,1]$.

1.16. **Lema.** *Seja $p \in \mathbb{R}^2$ e sejam $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$, $\mu : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ curvas contínuas fechadas que não passam por p. Se γ e μ são homotópicas como curvas fechadas em $\mathbb{R}^2 \setminus \{p\}$ então $\operatorname{ind}(\gamma,p) = \operatorname{ind}(\mu,p)$.*

Demonstração. Seja $H : [a,b] \times [0,1] \to \mathbb{R}^2 \setminus \{p\}$ uma homotopia de curvas fechadas de γ para μ e seja $\theta : [a,b] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ uma função ângulo ao longo de $H - p$. Temos que as funções:

$$[0,1] \ni t \longmapsto \theta(a,t) \in \mathbb{R}, \quad [0,1] \ni t \longmapsto \theta(b,t) \in \mathbb{R},$$

são ambas funções ângulo para a curva $[0,1] \ni t \mapsto H(a,t) - p = H(b,t) - p$; daí, pelo Lema 1.2, existe um inteiro $k \in \mathbb{Z}$ tal que:

$$\theta(b,t) = \theta(a,t) + 2k\pi, \tag{1.4}$$

para todo $t \in [0,1]$. Por outro lado, $[a,b] \ni s \mapsto \theta(s,0)$ é uma função ângulo ao longo de $\gamma - p$ e $[a,b] \ni s \mapsto \theta(s,1)$ é uma função ângulo ao longo de $\mu - p$; logo:

$$\operatorname{ind}(\gamma,p) = \frac{1}{2\pi}\big(\theta(b,0) - \theta(a,0)\big), \quad \operatorname{ind}(\mu,p) = \frac{1}{2\pi}\big(\theta(b,1) - \theta(a,1)\big).$$

Segue então de (1.4) que $\operatorname{ind}(\gamma,p) = \operatorname{ind}(\mu,p) = k$. □

1.17. **Definição.** Seja U um subconjunto de $\mathbb{R}^n$. Uma curva contínua fechada $\gamma : [a,b] \to U$ é dita *contrátil* em U se γ é homotópica em U como curva fechada a uma curva constante.

1.18. **Corolário.** *Sejam $p \in \mathbb{R}^2$ e $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ uma curva contínua fechada que não passa por p. Se γ é contrátil em $\mathbb{R}^2 \setminus \{p\}$ então $\operatorname{ind}(\gamma,p) = 0$.*

Demonstração. Basta observar que uma curva constante em $\mathbb{R}^2 \setminus \{p\}$ tem índice zero em torno de p. □

1.19. **Corolário.** *Sejam $p \in \mathbb{R}^2$ e $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ uma curva contínua fechada que não passa por p. Se B é uma bola de centro p disjunta da imagem de γ então $\operatorname{ind}(\gamma,p) = \operatorname{ind}(\gamma,q)$ para todo $q \in B$.*

Demonstração. Claramente:

$$\operatorname{ind}(\gamma, q) = \operatorname{ind}(\gamma - q, 0) = \operatorname{ind}(\gamma + p - q, p).$$

Além do mais:

$$[a,b] \times [0,1] \ni (s,t) \longmapsto \gamma(s) + t(p-q) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{p\}$$

é uma homotopia de curvas fechadas de γ para $\gamma + p - q$ em $\mathbb{R}^2 \setminus \{p\}$; o fato que $\gamma(s) + t(p-q) \neq p$, para todos $s \in [a,b]$, $t \in [0,1]$ segue da observação que $p - t(p-q) \in B$ e $\gamma(s) \notin B$, para todos s, t. O Lema 1.16 implica então que $\operatorname{ind}(\gamma, p) = \operatorname{ind}(\gamma + p - q, p)$. □

1.20. **Corolário.** *Seja $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ uma curva contínua fechada. Então a função $p \mapsto \operatorname{ind}(\gamma, p) \in \mathbb{Z}$ é constante em cada componente conexa do complementar da imagem de γ em $\mathbb{R}^2$.*

Demonstração. Segue do Corolário 1.19 que a função:

$$\mathbb{R}^2 \setminus \operatorname{Im}(\gamma) \ni p \longmapsto \operatorname{ind}(\gamma, p) \in \mathbb{Z}$$

é localmente constante e portanto contínua. Como $\mathbb{Z}$ não contém intervalos com mais de um ponto, essa função deve ser constante em cada componente conexa de seu domínio. □

1.21. **Corolário.** *Se $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ é uma curva contínua fechada então o conjunto:*

$$\operatorname{Im}(\gamma) \cup \big\{p \in \mathbb{R}^2 \setminus \operatorname{Im}(\gamma) : \operatorname{ind}(\gamma, p) \neq 0\big\} \tag{1.5}$$

é compacto.

Demonstração. O complementar do conjunto (1.5) é igual a:

$$\big\{p \in \mathbb{R}^2 \setminus \operatorname{Im}(\gamma) : \operatorname{ind}(\gamma, p) = 0\big\};$$

segue do Corolário 1.19 que tal conjunto é aberto e portanto (1.5) é fechado. Se B é uma bola que contém a imagem de γ então para todo $p \in \mathbb{R}^2 \setminus B$ a curva γ é contrátil em $\mathbb{R}^2 \setminus \{p\}$ (veja Exemplo 1.15); logo $\operatorname{ind}(\gamma, p) = 0$, para todo $p \in \mathbb{R}^2 \setminus B$. Isso prova que (1.5) está contido em B e é portanto compacto. □

1.22. **Lema.** *Sejam $p \in \mathbb{R}^2$ um ponto, U uma vizinhança convexa de p em $\mathbb{R}^2$ e $\gamma : [a,b] \to U$, $\mu : [a,b] \to U$ curvas contínuas fechadas que não passam por p. Então γ e μ são homotópicas como curvas fechadas em $U \setminus \{p\}$ se e somente se* $\operatorname{ind}(\gamma, p) = \operatorname{ind}(\mu, p)$.

Demonstração. Claramente, se γ e μ são homotópicas como curvas fechadas em $U \setminus \{p\}$ então $\operatorname{ind}(\gamma, p) = \operatorname{ind}(\mu, p)$, pelo Lema 1.16. Reciprocamente, suponha que $\operatorname{ind}(\gamma, p) = \operatorname{ind}(\mu, p)$. É fácil ver que γ e μ são homotópicas como curvas fechadas em $U \setminus \{p\}$ se e somente se $\gamma - p$ e $\mu - p$ são homotópicas como curvas fechadas em

$$(U - p) \setminus \{0\} = \big\{q - p : q \in U\big\} \setminus \{0\}.$$

Podemos então supor sem perda de generalidade que $p = 0$. Seja $\varepsilon > 0$ tal que o disco fechado de centro na origem e raio ε está contido em U. Considere as curvas fechadas:

$$\tilde{\gamma}(s) = \varepsilon \frac{\gamma(s)}{\|\gamma(s)\|}, \quad \tilde{\mu}(s) = \varepsilon \frac{\mu(s)}{\|\mu(s)\|}, \quad s \in [a,b].$$

É fácil ver que:

$$[a,b] \times [0,1] \ni (t,s) \longmapsto (1-t)\gamma(s) + t\tilde{\gamma}(s),$$
$$[a,b] \times [0,1] \ni (t,s) \longmapsto (1-t)\mu(s) + t\tilde{\mu}(s)$$

são homotopias de curvas fechadas em $U \setminus \{0\}$ de γ para $\tilde{\gamma}$ e de μ para $\tilde{\mu}$, respectivamente. Para completar a demonstração, vamos mostrar que $\tilde{\gamma}$ e $\tilde{\mu}$ são homotópicas como curvas fechadas em $U \setminus \{0\}$. Sejam $\theta_0 : [a,b] \to \mathbb{R}$ e $\theta_1 : [a,b] \to \mathbb{R}$ funções ângulo para as curvas $\tilde{\gamma}$ e $\tilde{\mu}$ respectivamente; obviamente, θ_0 e θ_1 também são funções ângulo respectivamente para γ e μ. Seja $n = \operatorname{ind}(\gamma) = \operatorname{ind}(\mu)$; temos:

$$\theta_0(b) - \theta_0(a) = \theta_1(b) - \theta_1(a) = 2\pi n. \tag{1.6}$$

Definimos $\theta : [a,b] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ fazendo $\theta(s,t) = (1-t)\theta_0(s) + t\theta_1(s)$, para todos $s \in [a,b]$, $t \in [0,1]$. Segue de (1.6) que:

$$\theta(b,t) - \theta(a,t) = 2\pi n,$$

para todo $t \in [0,1]$. Portanto:

$$[a,b] \times [0,1] \ni (s,t) \longmapsto \varepsilon\big(\cos\theta(s,t), \operatorname{sen}\theta(s,t)\big)$$

é uma homotopia de curvas fechadas em $U \setminus \{0\}$ de $\tilde{\gamma}$ para $\tilde{\mu}$. □

2. 1-FORMAS E INTEGRAIS DE LINHA

Nesta seção denotaremos por E um espaço de Banach fixado sobre o corpo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

2.1. **Definição.** Seja U um subconjunto de $\mathbb{R}^n$. Uma 1-*forma a valores em E definida em U* é uma aplicação $\omega : U \to \operatorname{Lin}(\mathbb{R}^n, E)$, onde $\operatorname{Lin}(\mathbb{R}^n, E)$ denota o espaço das aplicações $\mathbb{R}$-lineares $T : \mathbb{R}^n \to E$.

2.2. **Exemplo.** Seja $f : U \to E$ uma aplicação diferenciável definida num aberto $U \subset \mathbb{R}^n$. A diferencial $\mathrm{d}f : U \to \operatorname{Lin}(\mathbb{R}^n, E)$ de f é uma 1-forma a valores em E definida em U.

Denotamos por $\mathrm{d}x_1, \ldots, \mathrm{d}x_n \in \operatorname{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n*}$ a base canônica do espaço dual de $\mathbb{R}^n$; mais explicitamente, definimos:

$$\mathrm{d}x_i \cdot v = v_i,$$

para $i = 1, \ldots, n$ e todo $v \in \mathbb{R}^n$. Se a é um elemento do espaço de Banach E e se $\alpha : \mathbb{R}^n \to \mathbb{K}$ é uma aplicação linear então o produto $a\alpha \in \operatorname{Lin}(\mathbb{R}^n, E)$ é definido de forma natural fazendo:

$$(a\alpha)(v) = a\alpha(v),$$

para todo $v \in \mathbb{R}^n$. Se $\alpha : U \to \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ é uma 1-forma a valores em $\mathbb{K}$ e se $a : U \to E$ é uma função a valores em E então obtemos uma 1-forma $a\alpha$ a valores em E fazendo:

$$(a\alpha)(x) = a(x)\alpha(x),$$

para todo $x \in U$. É fácil ver que toda aplicação linear $T \in \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^n, E)$ se escreve de modo único na forma:

$$T = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathrm{d}x_i, \tag{2.1}$$

com $a_i \in E$, $i = 1, \ldots, n$; de fato, basta tomar $a_i = T(e_i)$, $i = 1, \ldots, n$, onde e_1, ..., e_n denota a base canônica de $\mathbb{R}^n$. Similarmente, uma 1-forma $\omega : U \to \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^n, E)$ a valores em E pode ser escrita de modo único na forma:

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathrm{d}x_i, \tag{2.2}$$

onde $a_i : U \to E$ são funções a valores em E. Claramente ω é de classe C^k se e somente se as funções a_i são todas de classe C^k. Em (2.2) identificamos o funcional linear $\mathrm{d}x_i \in \mathbb{R}^{n*}$ com a 1-forma constante que associa a cada ponto de $\mathbb{R}^n$ o i-ésimo vetor da base canônica de $\mathbb{R}^{n*}$. Se $f : U \to E$ é uma função diferenciável definida num aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ então claramente:

$$\mathrm{d}f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \mathrm{d}x_i,$$

onde $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \mathrm{d}f(x) \cdot e_i \in E$ denota a i-ésima derivada parcial da função f no ponto x. A notação $\mathrm{d}x_i$ utilizada acima é justificada da seguinte forma: a 1-forma constante $\mathrm{d}x_i$ coincide com a diferencial da i-ésima função coordenada $\mathbb{R}^n \ni x \mapsto x_i \in \mathbb{R}$.

2.3. **Definição.** Seja U um aberto de $\mathbb{R}^n$. Uma 1-forma contínua ω a valores em E definida em U é dita *exata* se existe uma função $f : U \to E$ de classe C^1 tal que $\mathrm{d}f = \omega$. Uma 1-forma ω de classe C^1 a valores em E definida em U é dita *fechada* se

$$\frac{\partial a_i}{\partial x_j} = \frac{\partial a_j}{\partial x_i},$$

para todos $i, j = 1, \ldots, n$, onde $\omega = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathrm{d}x_i$.

Segue do Teorema de Schwarz[2] que toda 1-forma exata de classe C^1 é fechada.

[2] O Teorema de Schwarz para uma função f a valores em E pode ser demonstrado aplicando o Teorema de Schwarz para funções a valores reais sobre as funções $\lambda \circ f$, onde λ é um funcional linear contínuo arbitrário em E.

2.4. **Definição.** Seja $\omega : U \to \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^n, E)$ uma 1-forma contínua definida num subconjunto U de $\mathbb{R}^n$ e seja $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ uma curva de classe C^1 por partes com imagem contida em U. A *integral de linha* $\int_\gamma \omega$ é definida por:

$$\int_\gamma \omega = \int_a^b \omega\big(\gamma(t)\big) \cdot \gamma'(t)\,\mathrm{d}t \in E. \tag{2.3}$$

A integral que aparece do lado direito da igualdade em (2.3) pode ser entendida no sentido de *Bochner* (veja [1] para detalhes); como trata-se apenas da integral de uma função contínua por partes num intervalo fechado, é possível também utilizar uma teoria de integração mais simples, no espírito de Riemann (veja, por exemplo, [2]).

Seja $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ uma curva de classe C^1 por partes; dada uma função crescente (resp., decrescente) $\sigma : [c, d] \to [a, b]$ sobrejetora de classe C^1 por partes então a curva $\gamma \circ \sigma$ é dita uma *reparametrização positiva* (resp., *negativa*) de γ. Se $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ e $\mu : [c, d] \to \mathbb{R}^n$ são curvas contínuas tais que $\gamma(b) = \mu(c)$ então a *concatenação* $\gamma \cdot \mu$ da curva γ com a curva μ é a curva $\gamma \cdot \mu : [a, d - c + b] \to \mathbb{R}^n$ definida por:

$$(\gamma \cdot \mu)(t) = \begin{cases} \gamma(t), & \text{se } t \in [a, b], \\ \mu(t - b + c), & \text{se } t \in [b, d - c + b]. \end{cases}$$

Obviamente se γ e μ são de classe C^k por partes então a curva concatenada $\gamma \cdot \mu$ também é de classe C^k por partes. Note também que a operação de concatenação de curvas é associativa. Se $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ é uma curva contínua então denotamos por $\gamma^{-1} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ a curva definida por:

$$\gamma^{-1}(t) = \gamma(a + b - t),$$

para todo $t \in [a, b]$. Obviamente se γ é de classe C^k (resp., de classe C^k por partes) então γ^{-1} também é de classe C^k (resp., de classe C^k por partes). Se $x, y \in \mathbb{R}^n$ são pontos então o símbolo $[x, y]$ será usado (com uma pequena ambigüidade) para denotar tanto o *segmento de reta*

$$[x, y] = \big\{(1 - t)x + ty : t \in [0, 1]\big\} \tag{2.4}$$

como o *caminho retilíneo*

$$[0, 1] \ni t \longmapsto (1 - t)x + ty \in \mathbb{R}^n$$

que tem o segmento de reta (2.4) como imagem. Note que:

$$[x, y]^{-1} = [y, x].$$

Dados pontos $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ então o *caminho triangular de vértices x, y e z* é a curva $\Delta(x, y, z)$ obtida pela concatenação dos caminhos retilíneos $[x, y]$, $[y, z]$ e $[z, x]$. Enunciamos abaixo algumas propriedades simples das integrais de linha que seguem diretamente de propriedades elementares da integração de funções contínuas por partes em intervalos:

- se ω é uma 1-forma contínua a valores em E cujo domínio contém a imagem de uma curva $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1 por partes e se $\gamma \circ \sigma$ é uma reparametrização positiva (resp., negativa) de γ então a integral $\int_{\gamma\circ\sigma} \omega$ é igual a $\int_\gamma \omega$ (resp, igual a $-\int_\gamma \omega$) — em particular, temos $\int_{\gamma^{-1}} \omega = -\int_\gamma \omega$;
- se ω é uma 1-forma contínua a valores em E cujo domínio contém as imagens de curvas $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, $\mu : [c,d] \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1 por partes tais que $\gamma(b) = \mu(c)$ então $\int_{\gamma\cdot\mu} \omega = \int_\gamma \omega + \int_\mu \omega$;
- se ω é uma 1-forma contínua a valores em E cujo domínio contém segmentos de reta $[x,y]$, $[y,z]$ e $[z,x]$ e se os pontos $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ são colineares então a integral de ω no caminho triangular $\Delta(x,y,z)$ é nula.

2.5. **Exemplo.** Seja $f : U \to E$ uma função de classe C^1 definida num aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ e seja $\gamma : [a,b] \to U$ uma curva de classe C^1 por partes. Então:

$$\int_\gamma \mathrm{d}f = \int_a^b \mathrm{d}f\big(\gamma(t)\big) \cdot \gamma'(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b (f\circ\gamma)'(t)\,\mathrm{d}t = f\big(\gamma(b)\big) - f\big(\gamma(a)\big).$$

Precisaremos de um resultado que nos permitirá fazer diferenciações sob o sinal de integral. O leitor que não tem familiaridade com integral de Bochner pode ignorar os Lemas 2.6 e 2.7 a seguir e estudar os Lemas 2.8 e 2.10 em vez.

2.6. **Lema.** *Seja $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida completo, X um espaço topológico que satisfaz o primeiro axioma da enumerabilidade, $x_0 \in X$ um ponto e $f : \Omega \times X \to E$ uma aplicação tal que:*

- *para todo $x \in X$, a aplicação $\Omega \ni \vartheta \mapsto f(\vartheta, x) \in E$ é Bochner integrável;*
- *para todo $\vartheta \in \Omega$, a aplicação $X \ni x \mapsto f(\vartheta, x) \in E$ é contínua no ponto x_0;*
- *existe uma função integrável $\phi : \Omega \to [0, +\infty]$ e uma vizinhança V de x_0 tal que $\|f(\vartheta, x)\| \le \phi(\vartheta)$, para todos $\vartheta \in \Omega$ e todos $x \in V$ com $x \ne x_0$.*

Então a aplicação $X \ni x \mapsto \int_\Omega f(\vartheta, x)\,\mathrm{d}\mu(\vartheta) \in E$ é contínua no ponto x_0.

Demonstração. Veja [1, Corollary 4.2]. □

2.7. **Lema.** *Seja $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida completo, U um aberto de $\mathbb{R}^n$ e $f : \Omega \times U \to E$ uma função tal que:*

- *para todo $x \in U$, a aplicação $\Omega \ni \vartheta \mapsto f(\vartheta, x) \in E$ é Bochner integrável;*
- *para todo $\vartheta \in \Omega$, a aplicação $U \ni x \mapsto f(\vartheta, x) \in E$ é de classe C^1;*
- *para todo $x_0 \in U$ existe uma função integrável $\phi : \Omega \to [0, +\infty]$ e uma vizinhança V de x_0 em U tal que $\big\|\frac{\partial f}{\partial x}(\vartheta, x)\big\| \le \phi(\vartheta)$, para todos $\vartheta \in \Omega$ e todos $x \in V$ com $x \ne x_0$.*

Então a aplicação $g : U \ni x \mapsto \int_\Omega f(\vartheta, x)\,\mathrm{d}\mu(\vartheta) \in E$ *é de classe* C^1 *e sua diferencial é dada por:*

$$\mathrm{d}g(x) = \int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x}(\vartheta, x)\,\mathrm{d}\mu(\vartheta) \in \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^n, E), \tag{2.5}$$

para todo $x \in U$.

Demonstração. Veja [1, Corollary 4.8]. $\square$

2.8. **Lema.** *Seja* $f : [a, b] \times X \to E$ *uma função contínua, onde* X *é um espaço topológico. Então a aplicação* $X \ni x \mapsto \int_a^b f(t, x)\,\mathrm{d}t \in E$ *é contínua.*

2.9. *Observação.* Se X satisfaz o primeiro axioma da enumerabilidade então o Lema 2.8 segue do Lema 2.6 tomando $\Omega = [a, b]$, V uma vizinhança de um ponto $x_0 \in X$ tal que f é limitada em $[a, b] \times V$ e ϕ uma função constante.

Demonstração do Lema 2.8. Seja $x_0 \in X$ fixado. Como f é contínua e $[a, b]$ é compacto, a continuidade de f é uniforme com relação à variável $t \in [a, b]$; mais precisamente, para todo $\varepsilon > 0$, existe uma vizinhança V de x_0 em X tal que $\|f(t, x) - f(t, x_0)\| < \frac{\varepsilon}{b-a}$, para todo $t \in [a, b]$ e todo $x \in V$. Logo:

$$\Big\| \int_a^b f(t, x)\,\mathrm{d}t - \int_a^b f(t, x_0)\,\mathrm{d}t \Big\| \le \int_a^b \|f(t, x) - f(t, x_0)\|\,\mathrm{d}t \le \varepsilon,$$

para todo $x \in V$. $\square$

2.10. **Lema.** *Seja* $f : [a, b] \times U \to E$ *uma função contínua, onde* U *é um aberto de* $\mathbb{R}^n$. *Suponha que para todo* $t \in [a, b]$ *a função* $U \ni x \mapsto f(t, x) \in E$ *é diferenciável e que a função* $\frac{\partial f}{\partial x} : [a, b] \times U \to \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^n, E)$ *é contínua. Então a função* $g : U \ni x \mapsto \int_a^b f(t, x)\,\mathrm{d}t \in E$ *é de classe* C^1 *e sua diferencial é dada por:*

$$\mathrm{d}g(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(t, x)\,\mathrm{d}t \in \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^n, E), \tag{2.6}$$

para todo $x \in U$.

Demonstração 1. Utilize o Lema 2.7 com $\Omega = [a, b]$, V uma vizinhança de um ponto $x_0 \in U$ tal que $\frac{\partial f}{\partial x}$ é limitada em $[a, b] \times V$ e ϕ uma função constante. $\square$

Demonstração 2. Seja $x \in U$ fixado e seja $T = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(t, x)\,\mathrm{d}t \in \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^n, E)$. Vamos mostrar que g é diferenciável no ponto $x \in U$ e que $\mathrm{d}g(x) = T$. Uma vez estabelecida a igualdade (2.6), a continuidade de $\mathrm{d}g$ seguirá do Lema 2.8. Devemos verificar que:

$$\lim_{h \to 0} \frac{g(x + h) - g(x) - T(h)}{\|h\|} = 0.$$

Temos:

$$g(x + h) - g(x) - T(h) = \int_a^b f(t, x + h) - f(t, x) - \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) \cdot h\,\mathrm{d}t.$$

Aplicando a desigualdade do valor médio para a função:

$$U \ni y \mapsto f(t,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(t,x) \cdot y \in E$$

no segmento $[x, x+h]$ obtemos:

$$\big\|f(t,x+h) - f(t,x) - \tfrac{\partial f}{\partial x}(t,x) \cdot h\big\| \le \big\|\tfrac{\partial f}{\partial x}(t,x+\theta h) - \tfrac{\partial f}{\partial x}(t,x)\big\|\|h\|, \tag{2.7}$$

para algum $\theta \in \,]0,1[$. Como a função $\frac{\partial f}{\partial x}$ é contínua e $[a,b]$ é compacto, a continuidade de $\frac{\partial f}{\partial x}$ é uniforme em relação à variável $t \in [a,b]$; mais precisamente, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\big\|\frac{\partial f}{\partial x}(t,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(t,x)\big\| < \frac{\varepsilon}{b-a}$, para todo $t \in [a,b]$ e todo $y \in U$ com $\|y - x\| < \delta$. Podemos supor também que a bola aberta de centro x e raio δ está contida em U; daí (2.7) nos dá:

$$\big\|f(t,x+h) - f(t,x) - \tfrac{\partial f}{\partial x}(t,x) \cdot h\big\| \le \tfrac{\varepsilon}{b-a}\|h\|,$$

para todo h com $\|h\| < \delta$ e portanto:

$$\|g(x+h) - g(x) - T(h)\| \le \varepsilon\|h\|. \qquad \square$$

2.11. **Lema.** *Toda* 1*-forma fechada* $\omega : U \to \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^n, E)$ *de classe* C^1 *definida num subconjunto aberto e convexo* U *de* $\mathbb{R}^n$ *é exata.*

Demonstração. Escreva $\omega = \sum_{i=1}^n a_i \mathrm{d}x_i$, onde $a_i : U \to E$, $i = 1, \ldots, n$, são funções de classe C^1; por hipótese, $\frac{\partial a_i}{\partial x_j} = \frac{\partial a_j}{\partial x_i}$, para todos $i, j = 1, \ldots, n$. Fixamos um ponto arbitrário $x^0 \in U$ e definimos uma função $f : U \to E$ fazendo:

$$\begin{aligned} f(x) = \int_{[x^0,x]} \omega = \int_0^1 \omega\big(x^0 + t(x - x^0)\big) \cdot (x - x^0)\,\mathrm{d}t \\ = \sum_{i=1}^n \int_0^1 a_i\big(x^0 + t(x - x^0)\big)(x_i - x_i^0)\,\mathrm{d}t, \end{aligned}$$

para todo $x \in U$. Segue do Lema 2.10 que f é de classe C^1; além do mais, dado $j = 1, \ldots, n$, a derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x)$ é calculada da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) &= \int_0^1 a_j\big(x^0 + t(x-x^0)\big)\,\mathrm{d}t + \sum_{i=1}^n \int_0^1 t\frac{\partial a_i}{\partial x_j}\big(x^0 + t(x-x^0)\big)(x_i - x_i^0)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 a_j\big(x^0 + t(x - x^0)\big)\,\mathrm{d}t + \sum_{i=1}^n \int_0^1 t\frac{\partial a_j}{\partial x_i}\big(x^0 + t(x - x^0)\big)(x_i - x_i^0)\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Daí:

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big[t a_j\big(x^0 + t(x - x^0)\big)\Big]\,\mathrm{d}t;$$

concluímos então que $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = a_j(x)$, para todo $j = 1, \ldots, n$ e para todo $x \in U$. $\square$

2.12. **Proposição.** *Seja* $\omega : U \to \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^n, E)$ *uma* 1*-forma contínua definida num subconjunto aberto* U *de* $\mathbb{R}^n$*. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(1) ω *é exata;*
(2) *a integral* $\int_\gamma \omega$ *depende apenas das extremidades de* γ*, i.e., para quaisquer curvas* $\gamma, \mu : [a, b] \to U$ *de classe* C^1 *por partes com as mesmas extremidades (i.e.,* $\gamma(a) = \mu(a)$ *e* $\gamma(b) = \mu(b)$*) vale* $\int_\gamma \omega = \int_\mu \omega$*;*
(3) *para toda curva fechada* $\gamma : [a, b] \to U$ *de classe* C^1 *por partes a integral* $\int_\gamma \omega$ *é nula;*

se U *é convexo então as afirmações acima são também equivalentes a:*

(4) *a integral* $\int_\gamma \omega$ *é nula para todo caminho triangular* γ *com vértices em* U*.*

Demonstração.

(1)⇒(2). Segue do Exemplo 2.5.

(2)⇒(3). Se $\gamma : [a, b] \to U$ é uma curva fechada então a integral de ω em γ deve coincidir com a integral de ω na curva constante igual a $\gamma(a)$.

(3)⇒(2). Se $\gamma : [a, b] \to U$ e $\mu : [a, b] \to U$ tem as mesmas extremidades então a curva $\lambda = \gamma \cdot \mu^{-1}$ é fechada e portanto $0 = \int_\lambda \omega = \int_\gamma \omega - \int_\mu \omega$.

(2)⇒(1). É fácil ver que ω é exata em U se e somente se ω é exata em cada componente conexa de U; podemos supor portanto que o aberto U é conexo. Segue daí que U também é conexo por arcos de classe C^1 por partes. Seja $x_0 \in U$ fixado. Definimos $f : U \to E$ fazendo $f(x) = \int_\gamma \omega$, onde $\gamma : [a, b] \to U$ é uma curva arbitrária de classe C^1 por partes com $\gamma(a) = x_0$ e $\gamma(b) = x$. O fato que $\int_\gamma \omega$ depende somente das extremidades de γ implica que a função f está bem definida. Sejam $x \in U$ e $h \in \mathbb{R}^n$ fixados; vamos mostrar que:

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(x + th) - f(x)}{t} = \omega(x) \cdot h.$$

De fato, o valor de $f(x + th)$ pode ser computado integrando ω na curva obtida pela concatenação de γ com o segmento $[x, x + th]$ e portanto:

$$\frac{f(x + th) - f(x)}{t} = \frac{1}{t} \int_{[x,x+th]} \omega = \frac{1}{t} \int_0^t \omega(x + sh) \cdot h \,\mathrm{d}s; \tag{2.8}$$

daí:

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(x + th) - f(x)}{t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} \int_0^t \omega(x + sh) \cdot h \,\mathrm{d}s = \omega(x) \cdot h.$$

Em particular, se $\omega = \sum_{i=1}^n a_i \mathrm{d}x_i$ então $\frac{\partial f}{\partial x_i} = a_i$, para $i = 1, \ldots, n$. Isso mostra que f é de classe C^1, já que as funções $a_i : U \to E$ são contínuas; além do mais, $\mathrm{d}f = \omega$.

(3)⇒(4). Trivial.

(4)⇒(1). Análoga à demonstração de (2)⇒(1), definindo $f(x) = \int_{[x_0,x]} \omega$, para todo $x \in U$. A primeira igualdade em (2.8) é justificada pelo fato que a integral de ω no caminho triangular $\Delta(x_0, x+th, x)$ é nula. □

2.13. **Definição.** Seja U um subconjunto de $\mathbb{R}^n$ e sejam $\gamma : [a,b] \to U$, $\mu : [a,b] \to U$ curvas contínuas com as mesmas extremidades. Dizemos que γ e μ são *homotópicas em U com extremos fixos* se existe uma função contínua $H : [a,b]\times[0,1] \to U$ (chamada uma *homotopia com extremos fixos* de γ para μ) tal que:

- $H(s,0) = \gamma(s)$, para todo $s \in [a,b]$;
- $H(s,1) = \mu(s)$, para todo $s \in [a,b]$;
- $H(a,t) = H(a,0)$ e $H(b,t) = H(b,0)$, para todo $t \in [0,1]$.

2.14. **Proposição.** *Seja $\omega : U \to \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^n, E)$ uma 1-forma fechada de classe C^1 definida num aberto U de $\mathbb{R}^n$. Suponha que duas curvas $\gamma, \mu : [a,b] \to U$ de classe C^1 por partes sejam homotópicas em U como curvas fechadas (Definição 1.14) ou sejam homotópicas em U com extremos fixos. Então $\int_\gamma \omega = \int_\mu \omega$.*

Demonstração. Seja $H : [a,b] \times [0,1] \to U$ uma homotopia (de curvas fechadas ou com extremos fixos) de γ para μ. Como ω é fechada, sabemos que a restrição de ω a qualquer bola aberta contida em U é exata (Lema 2.11). Seja $(B_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ uma família de bolas abertas com $U = \bigcup_{\alpha\in\Lambda} B_\alpha$ e seja $\delta > 0$ um número de Lebesgue para a cobertura aberta $\big(H^{-1}(B_\alpha)\big)_{\alpha\in\Lambda}$ do compacto $[a,b]\times[0,1]$; isso significa que todo subconjunto de $[a,b]\times[0,1]$ com diâmetro menor que δ está contido em algum $H^{-1}(B_\alpha)$. Escolha agora partições $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = b$ e $0 = s_0 < s_1 < \cdots < s_l = 1$ dos intervalos $[a,b]$ e $[0,1]$ respectivamente, de modo que cada retângulo $[t_{i-1}, t_i] \times [s_{j-1}, s_j]$, $i = 1, \ldots, k$, $j = 1, \ldots, l$, tenha diâmetro menor que δ; em particular, $H\big([t_{i-1}, t_i] \times [s_{j-1}, s_j]\big)$ está contido em alguma bola aberta contida em U, para todos i, j. Para cada $i = 1, \ldots, k$ e cada $j = 0, \ldots, l$, consideramos a curva $\mathfrak{h}_{ij}$ definida por:

$$\mathfrak{h}_{ij} = \begin{cases} [H(t_{i-1}, s_j), H(t_i, s_j)], & \text{se } j = 1, \ldots, l-1, \\ \gamma|_{[t_{i-1},t_i]}, & \text{se } j = 0, \\ \mu|_{[t_{i-1},t_i]}, & \text{se } j = l. \end{cases}$$

Para cada $i = 0, \ldots, k$ e cada $j = 1, \ldots, l$, denotamos por $\mathfrak{v}_{ij}$ o caminho retilíneo $[H(t_i, s_{j-1}), H(t_i, s_j)]$. Defina curvas ρ, $\tilde\rho$ fazendo:

$$\rho = \mathfrak{v}_{01} \cdot \mathfrak{v}_{02} \cdots \mathfrak{v}_{0l}, \quad \tilde\rho = \mathfrak{v}_{k1} \cdot \mathfrak{v}_{k2} \cdots \mathfrak{v}_{kl}.$$

Para cada $i = 1, \ldots, k$, $j = 1, \ldots, l$, considere a curva R_{ij} definida por:

$$R_{ij} = \mathfrak{h}_{i(j-1)} \cdot \mathfrak{v}_{ij} \cdot (\mathfrak{h}_{ij})^{-1} \cdot (\mathfrak{v}_{(i-1)j})^{-1}.$$

Temos que R_{ij} é uma curva fechada de classe C^1 por partes cuja imagem está contida numa bola aberta contida em U; como ω é exata nessa bola, segue que $\int_{R_{ij}} \omega = 0$ para todos $i = 1, \ldots, k$, $j = 1, \ldots, l$ (Proposição 2.12). Além do mais:

$$0 = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} \int_{R_{ij}} \omega = \sum_{i=1}^{k} \int_{\mathfrak{h}_{i0}} \omega + \sum_{j=1}^{l} \int_{\mathfrak{v}_{kj}} \omega - \sum_{i=1}^{k} \int_{\mathfrak{h}_{il}} \omega - \sum_{j=1}^{l} \int_{\mathfrak{v}_{0j}} \omega$$
$$= \int_{\gamma} \omega + \int_{\tilde{\rho}} \omega - \int_{\mu} \omega - \int_{\rho} \omega.$$

Se H é uma homotopia com extremos fixos então ρ e $\tilde{\rho}$ são curvas constantes; se H é uma homotopia de curvas fechadas então $\rho = \tilde{\rho}$. Em qualquer caso, temos $\int_{\tilde{\rho}} \omega - \int_{\rho} \omega = 0$ e portanto $\int_{\gamma} \omega = \int_{\mu} \omega$. □

2.15. **Corolário.** *Se $\omega : U \to \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^n, E)$ é uma 1-forma fechada de classe C^1 definida num aberto U de $\mathbb{R}^n$ e se $\gamma : [a, b] \to U$ é uma curva fechada de classe C^1 por partes que é contrátil em U então $\int_{\gamma} \omega = 0$.* □

Recorde que um subconjunto U de $\mathbb{R}^n$ é dito *simplesmente conexo* se toda curva contínua fechada $\gamma : [a, b] \to U$ é contrátil em U. Segue do Exemplo 1.15 que todo subconjunto convexo de $\mathbb{R}^n$ é simplesmente conexo.

2.16. **Corolário.** *Toda 1-forma fechada $\omega : U \to \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^n, E)$ de classe C^1 num aberto simplesmente conexo U é exata.*

Demonstração. Segue da Proposição 2.12 e do Corolário 2.15. □

2.1. 1-formas em $\mathbb{C}^n$.

Identifiquemos o espaço $\mathbb{C}^n$ com $\mathbb{R}^{2n}$ através do isomorfismo:

$$\mathbb{C}^n \ni (z_1, \ldots, z_n) \longmapsto (x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^{2n}, \tag{2.9}$$

onde $z_j = x_j + iy_j$, para $j = 1, \ldots, n$. Usaremos a notação:

$$\mathrm{d}x_1, \ldots, \mathrm{d}x_n, \mathrm{d}y_1, \ldots, \mathrm{d}y_n \tag{2.10}$$

para a base canônica do espaço $\mathbb{R}^{2n*} \cong \mathrm{Lin}(\mathbb{C}^n, \mathbb{R})$, em vez da notação $\mathrm{d}x_j$, $j = 1, \ldots, 2n$, utilizada no restante da Seção 2. Se $e_1, \ldots, e_n$ denota a $\mathbb{C}$-base canônica de $\mathbb{C}^n$ então, de acordo com a identificação (2.9), a $\mathbb{R}$-base canônica de $\mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$ é:

$$e_1, \ldots, e_n, ie_1, \ldots, ie_n.$$

Dada uma função diferenciável $f : U \to E$ definida num aberto U de $\mathbb{C}^n$ então as derivadas parciais de f num ponto $z \in U$ serão denotadas por:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(z), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(z), \frac{\partial f}{\partial y_1}(z), \ldots, \frac{\partial f}{\partial y_n}(z),$$

de modo que:

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(z) = \mathrm{d}f(z) \cdot e_j, \quad \frac{\partial f}{\partial y_j}(z) = \mathrm{d}f(z) \cdot (ie_j), \quad j = 1, \ldots, n. \tag{2.11}$$

Claramente:

$$\mathrm{d}f = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}\,\mathrm{d}x_j + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial y_j}\,\mathrm{d}y_j.$$

Considere o espaço $\mathrm{Lin}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C})$ das aplicações $\mathbb{R}$-*lineares* $T : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$; o espaço $\mathrm{Lin}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C})$ torna-se um espaço vetorial complexo se definirmos:

$$(cT)(v) \overset{\mathrm{def}}{=} c\,T(v), \tag{2.12}$$

para todos $c \in \mathbb{C}$, $T \in \mathrm{Lin}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C})$, $v \in \mathbb{C}^n$. É fácil ver que (2.10) também é uma $\mathbb{C}$-base para o espaço vetorial complexo $\mathrm{Lin}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C})$. Definindo:

$$\mathrm{d}z_j = \mathrm{d}x_j + i\,\mathrm{d}y_j, \quad \mathrm{d}\bar{z}_j = \mathrm{d}x_j - i\,\mathrm{d}y_j, \quad j = 1, \ldots, n$$

então:

$$\mathrm{d}z_1, \ldots, \mathrm{d}z_n, \mathrm{d}\bar{z}_1, \ldots, \mathrm{d}\bar{z}_n$$

é uma outra $\mathbb{C}$-base para o espaço vetorial complexo $\mathrm{Lin}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C})$. Note que $\mathrm{d}z_j$ (resp., $\mathrm{d}\bar{z}_j$) é nada mais que a diferencial da aplicação $\mathbb{C}^n \ni z \mapsto z_j \in \mathbb{C}$ (resp., da aplicação $\mathbb{C}^n \ni z \mapsto \bar{z}_j \in \mathbb{C}$).

Suponhamos agora que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, i.e., que o espaço de Banach E fixado no início da Seção 2 é complexo. Se $\mathrm{Lin}(\mathbb{C}^n, E)$ denota o espaço das aplicações $\mathbb{R}$-*lineares* $T : \mathbb{C}^n \to E$ então, de modo idêntico a (2.1), cada $T \in \mathrm{Lin}(\mathbb{C}^n, E)$ escreve-se de modo único na forma:

$$T = \sum_{j=1}^{n} a_j\,\mathrm{d}x_j + \sum_{j=1}^{n} b_j\,\mathrm{d}y_j, \tag{2.13}$$

com $a_j, b_j \in E$, $j = 1, \ldots, n$. Afirmamos que é possível escrever cada aplicação $T \in \mathrm{Lin}(\mathbb{C}^n, E)$ também de modo único na forma:

$$T = \sum_{j=1}^{n} a'_j\,\mathrm{d}z_j + \sum_{j=1}^{n} b'_j\,\mathrm{d}\bar{z}_j, \tag{2.14}$$

com $a'_j, b'_j \in E$, $j = 1, \ldots, n$; de fato, a existência da decomposição (2.14) segue da existência da decomposição (2.13) e das igualdades:

$$\mathrm{d}x_j = \frac{1}{2}(\mathrm{d}z_j + \mathrm{d}\bar{z}_j), \quad \mathrm{d}y_j = \frac{1}{2i}(\mathrm{d}z_j - \mathrm{d}\bar{z}_j), \quad j = 1, \ldots, n.$$

A unicidade da decomposição (2.14) é obtida observando que a igualdade (2.14) implica que os coeficientes a'_j, b'_j são dados por:

$$a'_j = \frac{1}{2}\big(T(e_j) - iT(ie_j)\big), \quad b'_j = \frac{1}{2}\big(T(e_j) + iT(ie_j)\big), \quad j = 1, \ldots, n. \tag{2.15}$$

A vantagem da decomposição (2.14) sobre a decomposição (2.13) é que a decomposição (2.14) nos permite distinguir facilmente quais aplicações $T \in \mathrm{Lin}(\mathbb{C}^n, E)$ são $\mathbb{C}$-lineares. Vamos estudar mais a fundo essa situação. O espaço $\mathrm{Lin}(\mathbb{C}^n, E)$ também torna-se um espaço vetorial complexo se definirmos a multiplicação por escalares complexos como em (2.12). O espaço

$\mathrm{Lin}(\mathbb{C}^n, E)$ possui dois subespaços vetorias complexos importantes: o espaço das aplicações $\mathbb{C}$-*lineares*:

$$\mathrm{Lin}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n, E) \stackrel{\text{def}}{=} \big\{T \in \mathrm{Lin}(\mathbb{C}^n, E) : T(cv) = c\,T(v),\\ \text{para todos } c \in \mathbb{C},\ v \in \mathbb{C}^n\big\},$$

e o espaço das aplicações *lineares conjugadas*:

$$\mathrm{Lin}_{\bar{\mathbb{C}}}(\mathbb{C}^n, E) \stackrel{\text{def}}{=} \big\{T \in \mathrm{Lin}(\mathbb{C}^n, E) : T(cv) = \bar{c}\,T(v),\\ \text{para todos } c \in \mathbb{C},\ v \in \mathbb{C}^n\big\}.$$

É fácil ver que $\mathrm{Lin}(\mathbb{C}^n, E)$ é igual à soma direta dos subespaços $\mathrm{Lin}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n, E)$ e $\mathrm{Lin}_{\bar{\mathbb{C}}}(\mathbb{C}^n, E)$. Temos que $\mathrm{d}z_1, \ldots, \mathrm{d}z_n$ é uma $\mathbb{C}$-base para o espaço $\mathrm{Lin}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C})$ e $\mathrm{d}\bar{z}_1, \ldots, \mathrm{d}\bar{z}_n$ é uma $\mathbb{C}$-base para o espaço $\mathrm{Lin}_{\bar{\mathbb{C}}}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C})$. Além do mais, se uma aplicação $T \in \mathrm{Lin}(\mathbb{C}^n, E)$ é decomposta como em (2.14) então T é $\mathbb{C}$-linear (resp., linear conjugada) se e somente se $b'_j = 0$ (resp., $a'_j = 0$), para todo $j = 1, \ldots, n$.

Obviamente as decomposições (2.13) e (2.14) possuem análogos para 1-formas a valores em E definidas em subconjuntos de $\mathbb{C}^n$; mais explicitamente, se $\omega : U \to \mathrm{Lin}(\mathbb{C}^n, E)$ é uma 1-forma a valores em E definida num subconjunto U de $\mathbb{C}^n$ então podemos escrever:

$$\omega = \sum_{j=1}^{n} a_j\,\mathrm{d}x_j + \sum_{j=1}^{n} b_j\,\mathrm{d}y_j = \sum_{j=1}^{n} a'_j\,\mathrm{d}z_j + \sum_{j=1}^{n} b'_j\,\mathrm{d}\bar{z}_j,$$

onde $a_j : U \to E$, $b_j : U \to E$, $a'_j : U \to E$, $b'_j : U \to E$ são funções unicamente determinadas pela 1-forma ω. Temos que ω é de classe C^k se e somente se as funções a_j e b_j são de classe C^k, para $j = 1, \ldots, n$; similarmente ω é de classe C^k se e somente se as funções a'_j e b'_j são de classe C^k, para $j = 1, \ldots, n$. Se $f : U \to E$ é uma função diferenciável num aberto U de $\mathbb{C}^n$ então a 1-forma $\mathrm{d}f$ a valores em E pode ser escrita de modo único como combinação de $\mathrm{d}z_j$, $\mathrm{d}\bar{z}_j$, $j = 1, \ldots, n$; os coeficientes podem ser calculados usando a fórmula (2.15). Essa observação motiva a seguinte definição:

$$\frac{\partial f}{\partial z_j} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial f}{\partial x_j} - i\frac{\partial f}{\partial y_j}\Big), \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial f}{\partial x_j} + i\frac{\partial f}{\partial y_j}\Big), \quad j = 1, \ldots, n.$$

Temos então:

$$\mathrm{d}f = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}\,\mathrm{d}x_j + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial y_j}\,\mathrm{d}y_j = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial z_j}\,\mathrm{d}z_j + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j}\,\mathrm{d}\bar{z}_j. \tag{2.16}$$

2.2. **Funções Holomorfas.** No que segue, E' e E denotarão dois espaços de Banach complexos fixados.

2.17. **Definição.** Seja $f : U \to E$ uma função definida num subconjunto aberto U de E'. Dizemos que f é *holomorfa* se f é de classe C^1 (no sentido real) e se para todo $z \in U$ a diferencial $\mathrm{d}f(z) : E' \to E$ é $\mathbb{C}$-linear.

As seguintes propriedades das funções holomorfas seguem diretamente da Definição 2.17 e de teoremas básicos de cálculo diferencial em espaços de Banach:

- a soma de funções holomorfas é holomorfa;
- o produto de uma função holomorfa a valores em E por uma função holomorfa a valores em $\mathbb{C}$ é uma função holomorfa a valores em E;
- a composta de funções holomorfas é holomorfa;
- se $E = \bigoplus_{j=1}^n E_j$ escreve-se como uma soma direta de subespaços fechados complexos E_j então uma função $f : U \to E$ é holomorfa se e somente se cada uma de suas coordenadas $f_j : U \to E_j$ é holomorfa.

Suponhamos agora que $E' = \mathbb{C}^n$. Tendo em mente a discussão da Subseção 2.1, temos que uma função $f : U \subset \mathbb{C}^n \to E$ de classe C^1 é holomorfa se e somente se $\mathrm{d}f(z) \in \mathrm{Lin}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n, E)$ para todo $z \in U$, i.e., se e somente se (veja (2.16)):

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j} = 0, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{2.17}$$

Obviamente a igualdade (2.17) é equivalente a:

$$\frac{\partial f}{\partial y_j} = i \frac{\partial f}{\partial x_j}, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{2.18}$$

A igualdade (2.18) nos diz que $\mathrm{d}f(z) \cdot (ie_j) = i\,\mathrm{d}f(z) \cdot e_j$, $j = 1, \ldots, n$, para todo $z \in U$ (veja (2.11)); vemos novamente então que essa igualdade é equivalente à $\mathbb{C}$-linearidade de $\mathrm{d}f(z)$.

2.18. *Observação.* As equações (2.17) (ou as equações (2.18)) são conhecidas como as *equações de Cauchy–Riemann.* Para colocar essas equações num formato mais familiar, suponha que E_0 é uma *forma real fechada* no espaço de Banach complexo E, i.e., E_0 é um subespaço real fechado[3] de E tal que $E = E_0 \oplus iE_0$. Daí uma função $f : U \to E$ de classe C^1 pode ser decomposta de modo único em $f = u + iv$, com $u, v : U \to E_0$ funções de classe C^1. Reescrevendo a igualdade (2.18) em termos de u e v obtemos:

$$\frac{\partial u}{\partial x_j} = \frac{\partial v}{\partial y_j}, \quad \frac{\partial v}{\partial x_j} = -\frac{\partial u}{\partial y_j}, \quad j = 1, \ldots, n,$$

que são as clássicas equações de Cauchy–Riemann.

Vamos enunciar uma versão dos Lemas 2.7 e 2.10 para o contexto de funções holomorfas. O leitor não interessado em integral de Bochner pode ignorar o Lema 2.19 abaixo e considerar apenas o Lema 2.20 que o segue.

[3]Por exemplo, se $E = \mathbb{C}^n$ podemos tomar $E_0 = \mathbb{R}^n$.

2.19. **Lema.** *Seja* $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ *um espaço de medida completo,* U *um aberto de* $\mathbb{C}^n$ *e* $f : \Omega \times U \to E$ *uma função tal que:*

- *para todo* $z \in U$*, a aplicação* $\Omega \ni \vartheta \mapsto f(\vartheta, z) \in E$ *é Bochner integrável;*
- *para todo* $\vartheta \in \Omega$*, a aplicação* $U \ni z \mapsto f(\vartheta, z) \in E$ *é holomorfa;*
- *para todo* $z_0 \in U$ *existe uma função integrável* $\phi : \Omega \to [0, +\infty]$ *e uma vizinhança* V *de* z_0 *em* U *tal que* $\big\| \frac{\partial f}{\partial z}(\vartheta, z) \big\| \le \phi(\vartheta)$*, para todos* $\vartheta \in \Omega$ *e todos* $z \in V$ *com* $z \neq z_0$*.*

Então a aplicação $g : U \ni z \mapsto \int_\Omega f(\vartheta, z) \,\mathrm{d}\mu(\vartheta) \in E$ *é holomorfa e sua diferencial é dada por:*

$$\mathrm{d}g(z) = \int_\Omega \frac{\partial f}{\partial z}(\vartheta, z) \,\mathrm{d}\mu(\vartheta) \in \mathrm{Lin}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n, E),$$

para todo $z \in U$*.*

Demonstração. Segue do Lema 2.7, observando que a fórmula (2.5) para a diferencial de g implica que a mesma é $\mathbb{C}$-linear. $\square$

2.20. **Lema.** *Seja* $f : [a, b] \times U \to E$ *uma função contínua, onde* U *é um aberto de* $\mathbb{C}^n$*. Suponha que para todo* $t \in [a, b]$ *a função* $U \ni z \mapsto f(t, z) \in E$ *é holomorfa e que a função* $\frac{\partial f}{\partial z} : [a, b] \times U \to \mathrm{Lin}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n, E)$ *é contínua. Então a função* $g : U \ni z \mapsto \int_a^b f(t, z) \,\mathrm{d}t \in E$ *é holomorfa e sua diferencial é dada por:*

$$\mathrm{d}g(z) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial z}(t, z) \,\mathrm{d}t \in \mathrm{Lin}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n, E),$$

para todo $z \in U$*.*

Demonstração. Segue do Lema 2.10, observando que a fórmula (2.6) para a diferencial de g implica que a mesma é $\mathbb{C}$-linear. $\square$

Vamos olhar mais de perto para o caso $n = 1$. Escrevemos então x, y, z e $\bar{z}$ no lugar de x_1, y_1, z_1 e $\bar{z}_1$; mais explicitamente, a base canônica de $\mathbb{R}^{2*} \cong \mathrm{Lin}(\mathbb{C}, \mathbb{R})$ é denotada por $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$ e escrevemos $\mathrm{d}z = \mathrm{d}x + i\,\mathrm{d}y$ e $\mathrm{d}\bar{z} = \mathrm{d}x - i\,\mathrm{d}y$. Toda aplicação $\mathbb{C}$-linear $T : \mathbb{C} \to E$ é da forma:

$$T(v) = av, \quad v \in \mathbb{C},$$

onde $a = T(1) \in E$; na verdade, a aplicação:

$$E \ni a \longmapsto a\,\mathrm{d}z \in \mathrm{Lin}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}, E)$$

é uma isometria de espaços de Banach complexos cuja inversa é dada por $\mathrm{Lin}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}, E) \ni T \mapsto T(1) \in E$.

2.21. **Lema.** *Seja* $f : U \to E$ *uma aplicação definida num aberto* $U \subset \mathbb{C}$*. Dado um ponto* $z \in U$ *então são equivalentes:*

- f *é diferenciável no ponto* z *e* $\mathrm{d}f(z)$ *é* $\mathbb{C}$*-linear;*
- *existe o limite* $\lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$ *em* E*.*

Além do mais, quando uma (ou ambas) as condições acima são satisfeitas, então:

$$\mathrm{d}f(z)\cdot 1 = \lim_{h\to 0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h}\in E.$$

Demonstração. Temos que f é diferenciável no ponto z com $\mathrm{d}f(z)$ uma aplicação $\mathbb{C}$-linear se e somente se existe $a\in E$ tal que:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(z+h)-f(z)-ah}{|h|}=0. \tag{2.19}$$

Como as quantidades $\frac{h}{|h|}$ e $\frac{|h|}{h}$ são limitadas, a igualdade (2.19) é equivalente a:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(z+h)-f(z)-ah}{h}=0. \tag{2.20}$$

Obviamente, (2.20) equivale a:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h}=a\in E.$$ □

Quando $f: U\subset\mathbb{C}\to E$ é diferenciável num ponto $z\in U$ então o limite $\lim_{h\to 0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h}$ será chamado a *derivada* de f no ponto z e será denotado por $f'(z)$. Temos então:

$$\begin{aligned} f'(z) &= \mathrm{d}f(z)\cdot 1,\\ \mathrm{d}f(z) &= f'(z)\mathrm{d}z. \end{aligned} \tag{2.21}$$

Quando identificamos $\mathbb{C}$ com $\mathbb{R}^2$ então os números complexos 1 e i correspondem respectivamente ao primeiro e ao segundo vetores da base canônica de $\mathbb{R}^2$; temos portanto:

$$\begin{gathered} \frac{\partial f}{\partial x}(z)=\mathrm{d}f(z)\cdot 1=f'(z),\quad \frac{\partial f}{\partial y}(z)=\mathrm{d}f(z)\cdot i=if'(z),\\ \frac{\partial f}{\partial z}(z)=f'(z),\quad \frac{\partial f}{\partial \bar z}(z)=0. \end{gathered} \tag{2.22}$$

Do Lema 2.21 obtemos o seguinte:

2.22. **Corolário.** *Uma aplicação $f: U\to E$ definida num aberto $U\subset\mathbb{C}$ é holomorfa se e somente se para todo $z\in U$ o limite:*

$$f'(z)=\lim_{h\to 0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h}\in E$$

existe e a função derivada $f': U\to E$ é contínua. □

Veremos adiante no Teorema 4.21 que a simples existência da derivada $f'(z)$ para todo $z\in U$ implica automaticamente na continuidade da função f'; poderíamos então definir que uma função $f: U\subset\mathbb{C}\to E$ é holomorfa quando o limite $\lim_{h\to 0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h}$ existe para todo $z\in U$. No entanto, consideramos mais conveniente para o desenvolvimento da teoria supor a continuidade da função derivada f' na definição de holomorfia.

3. Séries de potências

Nesta seção denotaremos por E um espaço de Banach fixado sobre o corpo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Uma série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ de vetores de E é dita *normalmente convergente* se a série $\sum_{n=1}^{\infty} \|a_n\|$ é convergente. Temos que toda série normalmente convergente é convergente.

3.1. **Lema** (teste da raiz)**.** *Seja $(a_n)_{n\geq 1}$ uma seqüência em E. Temos que:*

- *se $\limsup_{n\to\infty} \|a_n\|^{\frac{1}{n}} < 1$ então a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é normalmente convergente;*
- *se $\limsup_{n\to\infty} \|a_n\|^{\frac{1}{n}} > 1$ então a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ não é convergente.*

Demonstração. Suponha que $\limsup_{n\to\infty} \|a_n\|^{\frac{1}{n}} < 1$. Seja $q \in \mathbb{R}$ com $\limsup_{n\to\infty} \|a_n\|^{\frac{1}{n}} < q < 1$. Temos que $\|a_n\|^{\frac{1}{n}} < q$ para todo n suficientemente grande e portanto $\|a_n\| < q^n$, para todo n suficientemente grande. Como $0 < q < 1$, a série $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ é convergente e portanto também a série $\sum_{n=1}^{\infty} \|a_n\|$ é convergente.

Suponha agora que $\limsup_{n\to\infty} \|a_n\|^{\frac{1}{n}} > 1$. Nesse caso, existem infinitos índices n tais que $\|a_n\|^{\frac{1}{n}} \geq 1$ e portanto existem infinitos índices n tais que $\|a_n\| \geq 1$. Logo a seqüência $(a_n)_{n\geq 1}$ não tende a zero e a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ não converge. $\square$

Se $(a_n)_{n\geq 0}$ é uma seqüência no espaço de Banach E e se $z_0 \in \mathbb{K}$ então a série:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \tag{3.1}$$

é chamada a *série de potências centrada em z_0 com coeficientes $(a_n)_{n\geq 0}$*; para séries de potências, usamos a convenção $0^0 = 1$, de modo que (3.1) converge (trivialmente) para a_0 quando $z = z_0$.

Vamos aplicar o teste da raiz à série de potências (3.1). Temos:

$$\limsup_{n\to\infty} \|a_n (z - z_0)^n\|^{\frac{1}{n}} = |z - z_0| \limsup_{n\to\infty} \|a_n\|^{\frac{1}{n}}.$$

Se definirmos:

$$R \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \|a_n\|^{\frac{1}{n}}} \in [0, +\infty] \tag{3.2}$$

então a série (3.1) é normalmente convergente para $|z - z_0| < R$ e não é convergente para $|z - z_0| > R$. Dizemos então que R é o *raio de convergência* da série de potências (3.1). Observamos que na definição (3.2) foi utilizada a convenção $\frac{1}{0} = +\infty$ e $\frac{1}{+\infty} = 0$.

Na demonstração do próximo resultado precisaremos do seguinte:

3.2. **Lema** (teste M de Weierstrass). *Seja X um conjunto e seja $(f_n)_{n\geq 1}$ uma seqüência de funções $f_n : X \to E$. Se existe uma seqüência $(M_n)_{n\geq 1}$ de números reais não negativos satisfazendo:*

- $\|f_n(x)\| \leq M_n$, *para todos* $x \in X$, $n \geq 1$,
- $\sum_{n=1}^{\infty} M_n < +\infty$,

então a série $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniformemente para uma função $f : X \to E$.

Demonstração. O espaço das funções limitadas $f : X \to E$ munido da norma $\|f\|_{\sup} = \sup_{x\in X} \|f(x)\|$ é um espaço de Banach. As hipóteses do lema garantem que a série $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ é normalmente convergente nesse espaço. A conclusão segue da observação que convergência na norma $\|\cdot\|_{\sup}$ é equivalente à convergência uniforme. □

3.3. **Lema.** *Se R denota o raio de convergência da série de potências* (3.1) *então para todo $r \in \left]0, R\right[$, a série* (3.1) *converge uniformemente no disco $\big\{z \in \mathbb{K} : |z - z_0| \leq r\big\}$.*

Demonstração. Fazendo $z = z_0 + r$ então $|z - z_0| < R$ e portanto a série (3.1) converge normalmente, i.e., $\sum_{n=0}^{\infty} \|a_n\| r^n < +\infty$. A convergência uniforme de (3.1) no disco em questão é obtida então do teste M de Weierstrass (Lema 3.2) fazendo $M_n = \|a_n\| r^n$. □

3.4. **Corolário.** *Se R denota o raio de convergência da série de potências* (3.1) *então a função $z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \in E$ é contínua no disco aberto $\big\{z \in \mathbb{K} : |z - z_0| < R\big\}$.* □

3.5. **Lema** (diferenciação termo a termo). *Sejam E', E espaços de Banach sobre $\mathbb{K}$, $U \subset E'$ um aberto convexo limitado e $(f_n)_{n\geq 1}$ uma seqüência de funções diferenciáveis $f_n : U \to E$, de modo que $(\mathrm{d}f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformemente para uma função $g : U \to \mathrm{Lin}(E', E)$. Suponha que existe algum ponto $x_0 \in U$ para o qual a seqüencia $\big(f_n(x_0)\big)_{n\geq 1}$ converge em E. Então $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformemente para alguma função diferenciável $f : U \to E$ e $\mathrm{d}f = g$.*

Demonstração. Sejam $x \in U$, $m, n \in \mathbb{N}$ fixados; como U é convexo, podemos aplicar a desigualdade do valor médio para a função $f_m - f_n$ no segmento $[x_0, x]$ obtendo:

$$\Big\|\big(f_m(x) - f_n(x)\big) - \big(f_m(x_0) - f_n(x_0)\big)\Big\| \leq \sup_{z\in[x_0,x]} \big\|\mathrm{d}f_m(z) - \mathrm{d}f_n(z)\big\| \, \|x - x_0\|.$$

Seja $M > 0$ tal que $\|x - x_0\| \leq M$ para todo $x \in U$. Como $(\mathrm{d}f_n)_{n\geq 1}$ é uniformemente convergente temos que, para todo $\varepsilon > 0$, podemos encontrar $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\big\|\mathrm{d}f_m(z) - \mathrm{d}f_n(z)\big\| < \frac{\varepsilon}{2M}$ para todo $z \in U$ e todos $m, n \geq n_0$. Além do mais, como a seqüência $\big(f_n(x_0)\big)_{n\geq 1}$ é convergente em E, podemos supor também que $\big\|f_m(x_0) - f_n(x_0)\big\| < \frac{\varepsilon}{2}$ para todos $m, n \geq n_0$. Obtemos então:

$$\begin{aligned}\big\|f_m(x)-f_n(x)\big\| \le \big\|\big(f_m(x)-f_n(x)\big)-\big(f_m(x_0)-f_n(x_0)\big)\big\| \\ +\big\|f_m(x_0)-f_n(x_0)\big\| < \frac{\varepsilon}{2M}M+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,\end{aligned}$$

para todo $x \in U$ e todos $m, n \geq n_0$. Mostramos então que a seqüência $(f_n)_{n\geq 1}$ é uniformemente de Cauchy e portanto converge uniformemente para uma função $f : U \to E$. Falta mostrar que f é diferenciável e que $\mathrm{d}f = g$. Fixe então $x \in U$ e vamos mostrar que f é diferenciável no ponto x e que $\mathrm{d}f(x) = g(x)$; para isso escrevemos:

$$f(x+h) = f(x) + g(x)\cdot h + r(h),$$

e tentamos mostrar que $\lim_{h\to 0}\frac{r(h)}{\|h\|} = 0$. Como f_n é diferenciável no ponto x, podemos escrever:

$$f_n(x+h) = f_n(x) + \mathrm{d}f_n(x)\cdot h + r_n(h),$$

com $\lim_{h\to 0}\frac{r_n(h)}{\|h\|} = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $f_n \to f$ e $\mathrm{d}f_n \to g$ temos:

$$\lim_{n\to\infty} r_n(h) = r(h), \tag{3.3}$$

para todo $h \in E'$ com $x + h \in U$. Fixados $m, n \in \mathbb{N}$, considere a função $\phi : U \to E$ definida por:

$$\phi(z) = f_m(z) - f_n(z) - \mathrm{d}f_m(x)\cdot z + \mathrm{d}f_n(x)\cdot z, \quad z \in U \subset E';$$

para todo $h \in E'$ com $x + h \in U$ temos $\phi(x + h) - \phi(x) = r_m(h) - r_n(h)$ e aplicando a desigualdade do valor médio para ϕ no segmento $[x, x + h] \subset U$ obtemos:

$$\begin{aligned}\big\|r_m(h)-r_n(h)\big\| &\le \sup_{z\in[x,x+h]}\big\|\mathrm{d}\phi(z)\big\|\,\|h\| \\ &= \sup_{z\in[x,x+h]}\big\|\big(\mathrm{d}f_m(z)-\mathrm{d}f_n(z)\big)-\big(\mathrm{d}f_m(x)-\mathrm{d}f_n(x)\big)\big\|\,\|h\|,\end{aligned}$$

para todo $h \in E'$ com $x + h \in U$. Dado $\varepsilon > 0$, podemos encontrar $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\big\|\mathrm{d}f_m(z) - \mathrm{d}f_n(z)\big\| < \frac{\varepsilon}{4}$ para todo $z \in U$ e todos $m, n \geq n_0$. Daí:

$$\begin{aligned}\big\|\big(\mathrm{d}f_m(z)-\mathrm{d}f_n(z)\big)-\big(\mathrm{d}f_m(x)-\mathrm{d}f_n(x)\big)\big\| \le \big\|\mathrm{d}f_m(z)-\mathrm{d}f_n(z)\big\| \\ +\big\|\mathrm{d}f_m(x)-\mathrm{d}f_n(x)\big\| < \frac{\varepsilon}{2},\end{aligned}$$

para todo $z \in U$ e portanto:

$$\big\|r_m(h)-r_n(h)\big\| \le \frac{\varepsilon}{2}\|h\|, \tag{3.4}$$

para todo $h \in E'$ com $x+h \in U$ e todos $m, n \geq n_0$. Fixando $h \in E'$, $n \geq n_0$ e fazendo $m \to +\infty$ em (3.4) obtemos (usando também (3.3)):

$$\big\|r(h)-r_n(h)\big\| \le \frac{\varepsilon}{2}\|h\|,$$

para todo $n \geq n_0$ e todo $h \in E'$ com $x + h \in U$. Fixe agora $n = n_0$; como $\lim_{h\to 0} \frac{r_n(h)}{\|h\|} = 0$, vemos que existe $\delta > 0$ tal que $\|h\| < \delta$ implica $\|r_n(h)\| \leq \frac{\varepsilon}{2}\|h\|$. Daí $\|h\| < \delta$ implica:

$$\big\|r(h)\big\| \leq \big\|r(h) - r_n(h)\big\| + \big\|r_n(h)\big\| \leq \frac{\varepsilon}{2}\|h\| + \frac{\varepsilon}{2}\|h\| = \varepsilon\|h\|.$$

Isso mostra que $\lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{\|h\|} = 0$ e completa a demonstração. □

3.6. **Corolário.** *Sejam E', E espaços de Banach sobre $\mathbb{K}$, $U \subset E'$ um aberto e $(f_n)_{n\geq 1}$ uma seqüência de funções diferenciáveis $f_n : U \to E$ que converge pontualmente para uma função $f : U \to E$. Se $(\mathrm{d}f_n)_{n\geq 1}$ converge local-uniformemente*[4] *para uma função $g : U \to \mathrm{Lin}(E', E)$ então f é diferenciável, $\mathrm{d}f = g$ e $f_n \to f$ local-uniformemente.* □

No que segue aplicamos o Corolário 3.6 no caso $E' = \mathbb{K}$; nesse caso, as diferenciais $\mathrm{d}f : U \to \mathrm{Lin}(\mathbb{K}, E)$ podem ser identificadas com as derivadas $f' : U \to E$ (veja Subseção 2.2 para o caso $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).

3.7. **Proposição.** *Suponha que a série de potências* (3.1) *tem raio de convergência positivo R. Então a função $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n \in E$ é de classe C^∞ no disco aberto $\big\{z \in \mathbb{K} : |z - z_0| < R\big\}$; no caso $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, a função f é holomorfa e possui todas as suas derivadas holomorfas nesse disco. A derivada de f é dada pela diferenciação formal termo a termo da série de potências* (3.1)*:*

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1}, \tag{3.5}$$

para todo $z \in \mathbb{K}$ com $|z - z_0| < R$.

Demonstração. O raio de convergência da série de potências que aparece do lado direito da igualdade em (3.5) é também igual a R. De fato, para todo $z \in \mathbb{K}$ esse série converge se e somente se a série $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z - z_0)^n$ converge; o raio de convergência dessa última é dado por:

$$\frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \|n a_n\|^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \|a_n\|^{\frac{1}{n}}} = R,$$

já que $n^{\frac{1}{n}} \to 1$. A função $f_n : \mathbb{K} \to E$ definida por:

$$f_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k (z - z_0)^k, \quad z \in \mathbb{K},$$

é de classe C^1 (holomorfa, se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) e sua derivada é dada por:

$$f_n'(z) = \sum_{k=1}^{n} k a_k (z - z_0)^{k-1}, \quad z \in \mathbb{K}.$$

[4] Isso significa que todo ponto de U possui uma vizinhança onde $(\mathrm{d}f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformemente.

Segue do Lema 3.3 que a seqüência $(f_n')_{n\geq 1}$ converge local-uniformemente para a função:

$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1}, \quad |z - z_0| < R,$$

no disco $\{z \in \mathbb{K} : |z - z_0| < R\}$. Pelo Lema 3.5, a função f é diferenciável nesse disco e $\mathrm{d}f(z) \cdot v = g(z)v$, para todos $z, v \in \mathbb{K}$, com $|z - z_0| < R$. Note que a função g é contínua, pelo Corolário 3.4. Mostramos então que f é de classe C^1 (holomorfa, se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) e que sua derivada f' é dada por (3.5). Como f' é dada por uma série de potências com raio de convergência R, segue por indução que f é de classe C^∞ e possui todas as suas derivadas holomorfas, no caso $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. □

3.8. **Definição.** Seja $z_0 \in \mathbb{K}$ e seja $f : U \to E$ uma função de classe C^∞ definida numa vizinhança aberta U de z_0 em $\mathbb{K}$; se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ supomos que f tem todas as suas derivadas holomorfas[5] em U. A *série de Taylor* de f centrada no ponto z_0 é a série de potências:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0)(z - z_0)^n,$$

onde $f^{(n)}$ denota a n-ésima derivada da função f e $f^{(0)} = f$.

No caso $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, é perfeitamente possível que uma função de classe C^∞ não seja igual à soma de sua série de Taylor centrada em z_0 em vizinhança alguma do ponto z_0. No caso $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, veremos adiante (Proposição 4.15) que toda função holomorfa é localmente dada pela soma de sua série de Taylor. No momento, podemos provar o seguinte:

3.9. **Corolário** (Taylor)**.** *Se a série de potências* (3.1) *tem raio de convergência positivo e se f é a função definida pela soma dessa série então:*

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0), \quad n = 0, 1, \ldots;$$

em outras palavras, se f é dada pela soma de uma série de potências centrada no ponto z_0 então essa série coincide necessariamente com a série de Taylor de f centrada no ponto z_0.

3.10. **Corolário.** *Dadas seqüências $(a_n)_{n\geq 0}$, $(b_n)_{n\geq 0}$ em E, se a igualdade:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n$$

é válida para todo z em uma vizinhança de z_0 em $\mathbb{K}$ então $a_n = b_n$, para todo $n \geq 0$. □

[5] Veremos adiante (Lema 4.13) que uma função holomorfa tem todas as suas derivadas holomorfas.

4. Funções holomorfas num aberto de $\mathbb{C}$ tomando valores num espaço de Banach complexo

Nesta seção vamos estudar com mais profundidade a teoria de funções holomorfas $f : U \to E$, onde E é um espaço de Banach complexo e U é um aberto do plano complexo $\mathbb{C}$; esse estudo foi iniciado na Subseção 2.2. No que segue, E denotará sempre um espaço de Banach complexo fixado. Como na Subseção 2.2, identificamos $\mathbb{C}$ com $\mathbb{R}^2$ através do isomorfismo $\mathbb{C} \ni z = x + iy \mapsto (x, y) \in \mathbb{R}^2$; denotaremos por $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$ a base canônica de $\mathbb{R}^{2^*} \cong \mathrm{Lin}(\mathbb{C}, \mathbb{R})$ e por $\mathrm{d}z$, $\mathrm{d}\bar{z}$ as 1-formas a valores complexos definidas por $\mathrm{d}z = \mathrm{d}x + i\,\mathrm{d}y$, $\mathrm{d}\bar{z} = \mathrm{d}x - i\,\mathrm{d}y$. Se $f : U \to E$ é uma função contínua definida num subconjunto U de $\mathbb{C}$, estaremos interessados em integrais de linha da forma:

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_a^b f\big(\gamma(t)\big)\gamma'(t)\,\mathrm{d}t, \tag{4.1}$$

onde $\gamma : [a, b] \to U$ é uma curva de classe C^1 por partes. Quando for conveniente, a integral de linha (4.1) será também denotada por $\int_\gamma f(w)\,\mathrm{d}w$, $\int_\gamma f(u)\,\mathrm{d}u$, etc.

Uma desigualdade simples que será útil em várias situações é a seguinte:

$$\Big\|\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z\Big\| \le \sup_{z\in \mathrm{Im}(\gamma)} \|f(z)\| \cdot L(\gamma), \tag{4.2}$$

onde $\gamma : [a, b] \to U \subset \mathbb{C}$ é uma curva de classe C^1 por partes, $f : U \to E$ é uma função contínua e $L(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\|\,\mathrm{d}t$ denota o *comprimento* de γ.

4.1. *Observação.* O seguinte fato segue facilmente da desigualdade (4.2): se $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ é uma curva de classe C^1 por partes e se $(f_n)_{n\ge1}$ é uma seqüência de funções contínuas a valores em E que converge uniformemente na imagem de γ para uma função f então $\lim_{n\to\infty} \int_\gamma f_n(z)\,\mathrm{d}z = \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z$.

4.2. *Observação.* Se $f : U \to E$ é uma função holomorfa num aberto U de $\mathbb{C}$ então:

$$\int_\gamma f'(z)\,\mathrm{d}z \overset{(2.21)}{=} \int_\gamma \mathrm{d}f \overset{\text{Ex. 2.5}}{=} f\big(\gamma(b)\big) - f\big(\gamma(a)\big),$$

para toda curva $\gamma : [a, b] \to U$ de classe C^1 por partes.

Nos lemas abaixo, investigamos condições para que 1-formas do tipo $f\mathrm{d}z$ sejam fechadas ou exatas. As ferramentas desenvolvidas na Seção 2 nos fornecerão então ferramentas poderosas para o estudo de funções holomorfas no plano complexo.

4.3. **Lema.** *Se $g : U \to E$ é uma função contínua num aberto U de $\mathbb{C}$ então a 1-forma $g\,\mathrm{d}z$ é exata se e somente se existe uma função holomorfa $f : U \to E$ tal que $f' = g$.*

Demonstração. A 1-forma $g\,\mathrm{d}z = g\,\mathrm{d}x + (ig)\mathrm{d}y$ é exata se e somente se existe uma função $f : U \to E$ de classe C^1 tal que $\frac{\partial f}{\partial x} = g$ e $\frac{\partial f}{\partial y} = ig$. Mas isso é equivalente à condição de que f seja holomorfa e $f' = g$ (veja (2.22)). $\square$

Se $g : U \to E$ é uma função contínua num aberto $U \subset \mathbb{C}$ e se $f : U \to E$ é uma função holomorfa com $f' = g$ então dizemos que f é uma *primitiva holomorfa* para g. O Lema 4.3 nos diz então que $g\,\mathrm{d}z$ é exata se e somente se g admite uma primitiva holomorfa. Do Lema 4.3 e da Proposição 2.12 obtemos imediatamente o seguinte:

4.4. **Corolário.** *Seja $g : U \to E$ uma função contínua definida num subconjunto aberto U de $\mathbb{C}$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

- *g admite uma primitiva holomorfa;*
- *se γ é uma curva de classe C^1 por partes em U então a integral $\int_\gamma g(z)\,\mathrm{d}z$ depende apenas das extremidades de γ;*
- *para toda curva fechada γ em U de classe C^1 por partes a integral $\int_\gamma g(z)\,\mathrm{d}z$ é nula;*

se U é convexo então as afirmações acima são também equivalentes a:

- *a integral $\int_\gamma g(z)\,\mathrm{d}z$ é nula para todo caminho triangular γ com vértices em U.* $\square$

4.5. **Lema.** *Se $f : U \to E$ é uma função de classe C^1 num aberto U de $\mathbb{C}$ então a 1-forma $f\mathrm{d}z$ é fechada se e somente se a função f é holomorfa.*

Demonstração. Temos $f\mathrm{d}z = f\mathrm{d}x + (if)\mathrm{d}y$ e portanto a 1-forma $f\mathrm{d}z$ é fechada se e somente se:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial (if)}{\partial x},$$

ou seja, se e somente se $\frac{\partial f}{\partial y} = i\frac{\partial f}{\partial x}$. Mas essa é precisamente a condição para que f seja holomorfa (veja (2.18)). $\square$

Dos Lemas 4.3, 4.5, da Proposição 2.14 e dos Corolários 2.15 e 2.16 segue imediatamenmte o seguinte:

4.6. **Corolário.** *Se $f : U \to E$ é uma função holomorfa num aberto U de $\mathbb{C}$ então:*

- *dadas curvas $\gamma, \mu : [a, b] \to U$ de classe C^1 por partes que são homotópicas em U como curvas fechadas ou com extremos fixos então $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_\mu f(z)\,\mathrm{d}z$;*
- *se uma curva fechada $\gamma : [a, b] \to U$ de classe C^1 por partes é contrátil em U então $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0$;*
- *se U é simplesmente conexo então f admite uma primitiva holomorfa.* $\square$

O segundo item do Corolário 4.6 é uma versão preliminar do Teorema de Cauchy; uma versão mais completa desse teorema será provada mais adiante nesta seção.

4.7. **Exemplo.** Vamos calcular o valor da integral

$$\int_\gamma (z - z_0)^n \, \mathrm{d}z, \tag{4.3}$$

onde $z_0 \in \mathbb{C}$ é um ponto fixado, n é um número inteiro e $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ é uma curva fechada de classe C^1 por partes; se $n < 0$, supomos também que a curva γ não passa pelo ponto z_0. Se $n \geq 0$ então a função $z \mapsto (z - z_0)^n$ é holomorfa em $\mathbb{C}$; mas γ é obviamente contrátil em $\mathbb{C}$. Logo a integral (4.3) é nula (Corolário 4.6). Se $n \leq -1$ então a função $z \mapsto (z - z_0)^n$ não é holomorfa em $\mathbb{C}$, mas apenas em $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$; é perfeitamente possível que a curva γ não seja contrátil em $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$. Por outro lado, se $n \leq -2$ então $z \mapsto \frac{1}{n+1}(z - z_0)^{n+1}$ é uma primitiva holomorfa para $z \mapsto (z - z_0)^n$ e portanto concluímos novamente que a integral (4.3) é nula (Corolário 4.4). Resta considerar o caso $n = -1$. Esse caso é tratado no Lema 4.8 a seguir.

4.8. **Lema.** *Se $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ é uma curva fechada de classe C^1 por partes que não passa por um certo ponto $z_0 \in \mathbb{C}$ então:*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z - z_0} = \mathrm{ind}(\gamma, z_0).$$

Demonstração. Seja $\theta : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função ângulo para a curva $\gamma - z_0$ (Lema 1.10); pelo Corolário 1.9, a função θ é de classe C^1 por partes. Se definimos:

$$\phi(t) = \ln |\gamma(t) - z_0| + i\,\theta(t), \quad t \in [a, b],$$

então $\phi : [a, b] \to \mathbb{C}$ é uma função de classe C^1 por partes e $z_0 + e^{\phi(t)} = \gamma(t)$, para todo $t \in [a, b]$. Logo:

$$\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z - z_0} = \int_a^b \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z_0} \, \mathrm{d}t = \int_a^b \frac{\phi'(t)e^{\phi(t)}}{e^{\phi(t)}} \, \mathrm{d}t = \phi(b) - \phi(a).$$

Como $\phi(a)$ e $\phi(b)$ tem a mesma parte real, segue que:

$$\phi(b) - \phi(a) = i\theta(b) - i\theta(a) = (2\pi i)\mathrm{ind}(\gamma - z_0) = (2\pi i)\mathrm{ind}(\gamma, z_0). \qquad \square$$

4.9. **Notação.** Dado um ponto $z_0 \in \mathbb{C}$ e um escalar positivo $r > 0$ então denotamos por $\mathrm{B}(z_0, r)$ o disco aberto $\big\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\big\}$ e por $\mathrm{B}[z_0, r]$ o disco fechado $\big\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq r\big\}$. Escreveremos $\int_{|z - z_0| = r} f(z) \, \mathrm{d}z$ para denotar a integral de $f\mathrm{d}z$ ao longo da curva $[0, 2\pi] \ni t \mapsto z_0 + re^{it} \in \mathbb{C}$ cuja imagem é o círculo $\big\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r\big\}$.

4.10. **Lema** (fórmula integral de Cauchy – primeira versão)**.** *Seja $f : U \to E$ uma função holomorfa num aberto $U \subset \mathbb{C}$. Se um disco fechado $\mathrm{B}[z_0, R]$ está contido em U então vale a igualdade:*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w - z_0| = R} \frac{f(w)}{w - z} \, \mathrm{d}w,$$

para todo z no disco aberto $\mathrm{B}(z_0, R)$.

Demonstração. O círculo $|w - z_0| = R$ tem índice 1 em torno do ponto z_0 e portanto tem também índice 1 em torno de qualquer outro ponto z do disco aberto $\mathrm{B}(z_0, R)$ (Corolário 1.20). Em vista do Lema 4.8 temos:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-z_0|=R} \frac{f(z)}{w - z} \, \mathrm{d}w.$$

Para concluir a demonstração, é suficiente verificar que:

$$\int_{|w-z_0|=R} \frac{f(w) - f(z)}{w - z} \, \mathrm{d}w = 0,$$

para todo $z \in \mathrm{B}(z_0, R)$. Seja então $z \in \mathrm{B}(z_0, R)$ fixado e seja $r > 0$ pequeno o suficiente tal que o disco $\mathrm{B}[z, r]$ esteja contido no disco $\mathrm{B}[z_0, R]$. Temos que os círculos $|w - z_0| = R$ e $|w - z| = r$ tem ambos índice 1 em torno do ponto z; segue do Lema 1.22 que $|w - z_0| = R$ e $|w - z| = r$ são homotópicos como curvas fechadas em $\mathrm{B}[z_0, R] \setminus \{z\}$ (e portanto também em $U \setminus \{z\}$). Como a função $w \mapsto \frac{f(w)-f(z)}{w-z}$ é holomorfa em $U \setminus \{z\}$, segue do Corolário 4.6 que:

$$\int_{|w-z_0|=R} \frac{f(w) - f(z)}{w - z} \, \mathrm{d}w = \int_{|w-z|=r} \frac{f(w) - f(z)}{w - z} \, \mathrm{d}w, \tag{4.4}$$

para todo $r > 0$ pequeno o suficiente para que $\mathrm{B}[z, r] \subset \mathrm{B}[z_0, R]$. Como a integral do lado direito da igualdade em (4.4) é independente de r para $r > 0$ suficientemente pequeno, a demonstração ficará concluída se mostrarmos que:

$$\lim_{r \to 0} \int_{|w-z|=r} \frac{f(w) - f(z)}{w - z} \, \mathrm{d}w = 0.$$

Como $\lim_{w \to z} \frac{f(w)-f(z)}{w-z} = f'(z)$, temos que:

$$\Big\| \frac{f(w) - f(z)}{w - z} \Big\| \le \|f'(z)\| + 1,$$

para w suficientemente próximo de z; logo:

$$\Big\| \int_{|w-z|=r} \frac{f(w) - f(z)}{w - z} \, \mathrm{d}w \Big\| \overset{(4.2)}{\le} \big(\|f'(z)\| + 1\big)(2\pi r),$$

para todo $r > 0$ suficientemente pequeno. A conclusão segue. □

Enunciamos a seguinte adaptação do Lema 2.8 para integrais da forma $\int_\gamma f(z) \, \mathrm{d}z$.

4.11. **Lema.** *Seja $f : U \times X \to E$ uma função contínua, onde U é um subconjunto de $\mathbb{C}$ e X é um espaço topológico. Se $\gamma : [a, b] \to U$ é uma curva de classe C^1 por partes então a função $X \ni x \mapsto \int_\gamma f(z, x) \, \mathrm{d}z \in E$ é contínua.*

Demonstração. A curva γ pode ser escrita como uma justaposição de um número finito de curvas de classe C^1; podemos supor então sem perda de generalidade que γ é de classe C^1. Nesse caso temos:

$$\int_\gamma f(z,x)\,\mathrm{d}z = \int_a^b f\big(\gamma(t),x\big)\gamma'(t)\,\mathrm{d}t,$$

e o integrando do lado direito da igualdade acima satisfaz as hipóteses do Lema 2.8. A conclusão segue. □

Enunciamos agora um critério de derivação sob o sinal de integral que é conveniente para nossos presentes propósitos.

4.12. **Lema.** *Seja $\gamma : [a,b] \to A$ uma curva de classe C^1 por partes e seja $f : A \times U \to E$ uma função contínua, onde A é um subconjunto arbitrário de $\mathbb{C}$ e U é um subconjunto aberto de $\mathbb{C}$. Suponha que para todo $w \in A$ a função $U \ni z \mapsto f(w,z) \in E$ é holomorfa e que a função $\frac{\partial f}{\partial z} : A \times U \to E$ é contínua. Então a função $g : U \ni z \mapsto \int_\gamma f(w,z)\,\mathrm{d}w \in E$ é holomorfa e sua derivada é dada por:*

$$g'(z) = \int_\gamma \frac{\partial f}{\partial z}(w,z)\,\mathrm{d}w \in E,$$

para todo $z \in U$.

Demonstração. A curva γ pode ser escrita como uma justaposição de um número finito de curvas de classe C^1; podemos supor então sem perda de generalidade que γ é de classe C^1. Nesse caso temos:

$$g(z) = \int_a^b f\big(\gamma(t),z\big)\gamma'(t)\,\mathrm{d}t, \quad z \in U,$$

e o integrando acima satisfaz as hipóteses do Lema 2.20. A conclusão segue. □

4.13. **Lema** (fórmula integral de Cauchy para derivadas)**.** *Seja $f : U \to E$ uma função holomorfa num aberto $U \subset \mathbb{C}$. Então f é de classe C^∞ e todas as suas derivadas $f^{(n)} : U \to E$, $n \ge 1$, são holomorfas. Além do mais, se um disco fechado $\mathrm{B}[z_0,R]$ está contido em U então vale a igualdade:*

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{|w-z_0|=R} \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}}\,\mathrm{d}w, \tag{4.5}$$

para todo z no disco aberto $\mathrm{B}(z_0,R)$ e todo $n \ge 0$ (onde $f^{(0)} = f$, por convenção).

Demonstração. A fórmula (4.5) segue por indução em n, usando a fórmula integral de Cauchy (Lema 4.10) e o Lema 4.12 sobre derivação sob o sinal de integral. Segue então que f é de classe C^∞ e que todas as suas derivadas são holomorfas. □

4.14. **Corolário** (Morera). *Se $f : U \to E$ é uma função contínua num aberto $U \subset \mathbb{C}$ e se a integral $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z$ é nula para todo caminho triangular γ com vértices em U então f é holomorfa.*

Demonstração. Como a tese do corolário é local, podemos supor sem perda de generalidade que U é uma bola aberta. Daí o Corolário 4.4 implica que f possui uma primitiva holomorfa; portanto, o Lema 4.13 implica que a função f também deve ser holomorfa. □

4.15. **Proposição** (desenvolvimento em série). *Seja $f : U \to E$ uma função holomorfa num aberto $U \subset \mathbb{C}$. Se um disco aberto $\mathrm{B}(z_0, R)$ está contido em U então para todo $z \in \mathrm{B}(z_0, R)$ vale a igualdade:*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0)(z - z_0)^n. \tag{4.6}$$

Recorde que a série de potências que aparece do lado direito da igualdade em (4.6) é chamada a série de Taylor de f centrada no ponto z_0 (Definição 3.8). Observe que, pelo Corolário 3.9, se f é dada por uma série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ numa vizinhança de z_0 então necessariamente os coeficientes a_n coincidem com os coeficientes da série de Taylor de f centrada em z_0.

Demonstração da Proposição 4.15. Seja $z \in \mathrm{B}(z_0, R)$ fixado e seja r tal que $|z - z_0| < r < R$. Pela fórmula integral de Cauchy (Lema 4.10), temos:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-z_0|=r} \frac{f(w)}{w - z}\,\mathrm{d}w.$$

Fixado w no círculo $|w - z_0| = r$ então o integrando acima pode ser desenvolvido em série da seguinte forma:

$$\frac{f(w)}{w - z} = \frac{f(w)}{(w - z_0) - (z - z_0)} = \frac{f(w)}{w - z_0}\frac{1}{1 - \frac{z-z_0}{w-z_0}} = \frac{f(w)}{w - z_0}\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{z - z_0}{w - z_0}\Big)^n;$$

a convergência da progressão geométrica acima é justificada pelo fato que $\big|\frac{z-z_0}{w-z_0}\big| = \frac{1}{r}|z - z_0| < 1$. Concluímos então que:

$$\frac{f(w)}{w - z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}}\,(z - z_0)^n, \tag{4.7}$$

para todo w no círculo $|w-z_0| = r$. Vamos mostrar que a série do lado direito da igualdade em (4.7) converge uniformemente em w no disco $|w - z_0| = r$ (onde $z \in \mathrm{B}(z_0, r)$) é fixado). Se $M = \sup_{|w-z_0|=r} \|f(w)\| < +\infty$ então:

$$\Big\|\frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}}\,(z - z_0)^n\Big\| \le \frac{M}{r}\Big(\frac{|z - z_0|}{r}\Big)^n;$$

como $\sum_{n=0}^{\infty}\big(\frac{|z-z_0|}{r}\big)^n < +\infty$, segue do teste M de Weierstrass (Lema 3.2) que a série em questão converge uniformemente. Podemos então integrar essa série termo a termo no disco $|w - z_0| = r$ (veja Observação 4.1) obtendo:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

onde:

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-z_0|=r} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} \, \mathrm{d}w, \quad n \geq 0.$$

Do Lema 4.13 segue que $a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0)$, provando (4.6). $\square$

4.16. **Corolário.** *Se $f : U \to E$ é holomorfa num aberto $U \subset \mathbb{C}$ que contém um ponto z_0 então o raio de convergência da série de Taylor de f centrada no ponto z_0 é maior ou igual à distância do ponto z_0 ao complementar de U. Se $U = \mathbb{C}$ então a série de Taylor de f centrada em qualquer ponto $z_0 \in \mathbb{C}$ tem raio de convergência $+\infty$ e converge para f em todo o plano complexo.* $\square$

4.17. **Corolário.** *Se $f, g : U \to E$ são funções holomorfas num aberto conexo $U \subset \mathbb{C}$ e se existe $z_0 \in U$ tal que $f^{(n)}(z_0) = g^{(n)}(z_0)$ para todo $n \geq 0$ então $f = g$.*

Demonstração. O conjunto:

$$\big\{ z \in U : f^{(n)}(z) = g^{(n)}(z), \text{ para todo } n \geq 0 \big\}$$

é claramente fechado em U. A Proposição 4.15 implica que esse conjunto também é aberto. Pela nossa hipótese, o conjunto é não vazio e portanto deve coincidir com todo o conjunto U, já que U é conexo. $\square$

4.18. **Corolário.** *Se $f, g : U \to E$ são funções holomorfas num aberto conexo $U \subset \mathbb{C}$ e se o conjunto:*

$$\big\{ z \in U : f(z) = g(z) \big\}$$

tem algum ponto de acumulação em U então $f = g$.

Demonstração. Seja $h = f - g$ e seja $z_0 \in U$ um ponto de acumulação de $h^{-1}(0)$. Se h fosse não nula, existiria $k \in \mathbb{N}$ tal que $h^{(k)}(z_0) \neq 0$ (Corolário 4.17). Seja k o menor número natural tal que $h^{(k)}(z_0) \neq 0$. Daí, pela Proposição 4.15, temos $h(z) = (z - z_0)^k h_0(z)$, onde h_0 é a função holomorfa definida numa vizinhança de z_0 pela série (veja Proposição 3.7):

$$h_0(z) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{h^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^{n-k}.$$

Como $h_0(z_0) \neq 0$, temos que h_0 é não nula numa vizinhança de z_0; logo z_0 é um zero isolado de h, contradizendo o fato que z_0 é um ponto de acumulação de $h^{-1}(0)$. $\square$

Uma *função inteira* a valores em E é uma função holomorfa $f : \mathbb{C} \to E$ cujo domínio é todo o plano complexo $\mathbb{C}$.

4.19. **Teorema** (Liouville)**.** *Toda função inteira limitada $f : \mathbb{C} \to E$ é constante.*

Demonstração. Pela fórmula integral de Cauchy para derivadas (Lema 4.13), temos:

$$f^{(n)}(0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{|z|=R} \frac{f(z)}{z^{n+1}} \,\mathrm{d}z,$$

para todo $R > 0$. Seja $M = \sup_{z \in \mathbb{C}} \|f(z)\|$. Usando a desigualdade (4.2), obtemos:

$$\|f^{(n)}(0)\| \le n! \frac{M}{R^n},$$

para todo $R > 0$. Fazendo $R \to +\infty$, concluímos que $f^{(n)}(0) = 0$, para todo $n \ge 1$. Segue da fórmula de Taylor (Proposição 4.15) que f é constante. $\square$

4.20. **Teorema** (da singularidade removível)**.** *Sejam $U \subset \mathbb{C}$ um aberto, z_0 um ponto de U e $f : U \setminus \{z_0\} \to E$ uma função holomorfa. Se f é limitada em alguma vizinhança de z_0 então:*

- *o limite* $\lim_{z \to z_0} f(z)$ *existe em E;*
- *definindo $f(z_0) = \lim_{z \to z_0} f(z)$ então f torna-se holomorfa em U.*

Demonstração. Tratamos primeiro o caso em que $\lim_{z \to z_0} f(z) = 0$. Daí, definindo $f(z_0) = 0$, a função $f : U \to E$ torna-se contínua. Para mostrar que f é holomorfa, usamos o Teorema de Morera (Corolário 4.14). Seja B uma bola aberta de centro z_0 contida em U. É suficiente mostrar que $f|_B$ é holomorfa; para isso, mostramos que a integral $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z$ é nula, para todo caminho triangular γ com vértices em B. Dados $z_1, z_2, z_3 \in B$ então:

$$\int_{\Delta(z_1,z_2,z_3)} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\Delta(z_0,z_1,z_2)} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\Delta(z_0,z_2,z_3)} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\Delta(z_0,z_3,z_1)} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

É portanto suficiente mostrar que:

$$\int_{\Delta(z_0,z_1,z_2)} f(z)\,\mathrm{d}z = 0, \tag{4.8}$$

para todos $z_1, z_2 \in B$. A integral em (4.8) é automaticamente nula se os pontos z_0, z_1, z_2 são colineares; suponhamos então que eles não o sejam. Dado $\varepsilon \in \,]0, 1]$ consideramos os pontos:

$$z_1^\varepsilon = z_0 + \varepsilon(z_1 - z_0) \in [z_0, z_1], \quad z_2^\varepsilon = z_0 + \varepsilon(z_2 - z_0) \in [z_0, z_2].$$

Seja Q a envoltória convexa do conjunto $\{z_1^\varepsilon, z_2^\varepsilon, z_1, z_2\}$; denotamos por ∂Q a curva obtida pela concatenação dos caminhos retilíneos $[z_1^\varepsilon, z_1]$, $[z_1, z_2]$, $[z_2, z_2^\varepsilon]$ e $[z_2^\varepsilon, z_1^\varepsilon]$. Temos:

$$\int_{\Delta(z_0,z_1,z_2)} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\Delta(z_0,z_1^\varepsilon,z_2^\varepsilon)} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\partial Q} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

Seja $\mathfrak{r}$ a reta determinada pelos pontos z_1^ε e z_2^ε; os pontos z_1^ε, z_2^ε, z_1, z_2 estão todos no semi-plano fechado determinado por $\mathfrak{r}$ que não contém o ponto z_0. Isso mostra que $z_0 \notin Q$ e portanto $Q \subset B \setminus \{z_0\}$; logo a curva ∂Q é contrátil em $B \setminus \{z_0\}$. Como f é holomorfa em $B \setminus \{z_0\}$, o Corolário 4.6 implica que $\int_{\partial Q} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$; logo:

$$\int_{\Delta(z_0,z_1,z_2)} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\Delta(z_0,z_1^\varepsilon,z_2^\varepsilon)} f(z)\,\mathrm{d}z,$$

para todo $\varepsilon \in \,]0,1]$. Como f tem limite zero em z_0 e como o comprimento do caminho triangular $\Delta(z_0, z_1^\varepsilon, z_2^\varepsilon)$ tende a zero quando $\varepsilon \to 0$, segue da desigualdade (4.2) que:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\Delta(z_0,z_1^\varepsilon,z_2^\varepsilon)} f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

Concluímos então que $\int_{\Delta(z_0,z_1,z_2)} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$, o que completa a demonstração do primeiro caso.

Tratemos agora o caso geral. Defina $g : U \setminus \{z_0\} \to E$ fazendo

$$g(z) = f(z)(z - z_0),$$

para todo $z \in U \setminus \{z_0\}$. Como f é limitada numa vizinhança de z_0, temos que $\lim_{z\to z_0} g(z) = 0$ e portanto, definindo $g(z_0) = 0$, concluímos do primeiro caso que g é holomorfa em U. Segue da fórmula de Taylor (Proposição 4.15) que:

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^{n-1},$$

para $z \neq z_0$ numa vizinhança de z_0. A Proposição 3.7 implica então que:

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = g'(z_0)$$

e que a função obtida definindo $f(z_0) = g'(z_0)$ é holomorfa numa vizinhança de z_0. □

4.21. **Teorema** (Goursat)**.** *Seja $f : U \to E$ uma função definida num aberto $U \subset \mathbb{C}$. Se para todo $z_0 \in U$ o limite $\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ existe em E então f é holomorfa.*

Demonstração. É suficiente mostrar que $f|_B$ é holomorfa, para toda bola aberta B contida em U. Para isso, usaremos o Teorema de Morera (Corolário 4.14). Dados pontos $z_1, z_2, z_3 \in B$, denotaremos por $T(z_1, z_2, z_3)$ o *triângulo* de vértices z_1, z_2, z_3, i.e., a envoltória convexa do conjunto $\{z_1, z_2, z_3\}$; escreveremos $\partial T(z_1, z_2, z_3)$ para denotar o caminho triangular $\Delta(z_1, z_2, z_3)$.

Sejam então $z_1, z_2, z_3 \in B$ pontos fixados e seja $T_0 = T(z_1, z_2, z_3)$; devemos mostrar que $\int_{\partial T_0} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$. Sejam:

$$T_0^{(\mathrm{a})} = T(z_1, z_{12}, z_{13}), \quad T_0^{(\mathrm{b})} = T(z_{12}, z_2, z_{23}),$$
$$T_0^{(\mathrm{c})} = T(z_{13}, z_{23}, z_3), \quad T_0^{(\mathrm{d})} = T(z_{12}, z_{23}, z_{13}),$$

onde $z_{12} = \frac{1}{2}(z_1 + z_2)$, $z_{23} = \frac{1}{2}(z_2 + z_3)$ e $z_{13} = \frac{1}{2}(z_1 + z_3)$. É fácil ver que:

$$\int_{\partial T_0} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\partial T_0^{(\mathrm{a})}} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\partial T_0^{(\mathrm{b})}} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\partial T_0^{(\mathrm{c})}} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\partial T_0^{(\mathrm{d})}} f(z)\,\mathrm{d}z. \tag{4.9}$$

Seja $T_1 \in \big\{T_0^{(\mathrm{a})}, T_0^{(\mathrm{b})}, T_0^{(\mathrm{c})}, T_0^{(\mathrm{d})}\big\}$ tal que a norma de $\int_{\partial T_1} f(z)\,\mathrm{d}z$ é igual ao máximo das normas das quatro integrais que aparecem do lado direito da igualdade (4.9). Daí:

$$\Big\|\int_{\partial T_0} f(z)\,\mathrm{d}z\Big\| \le 4\,\Big\|\int_{\partial T_1} f(z)\,\mathrm{d}z\Big\|;$$

além do mais:

$$L(\partial T_1) = \frac{1}{2}\,L(\partial T_0), \quad \mathrm{diam}(T_1) = \frac{1}{2}\,\mathrm{diam}(T_0), \quad T_1 \subset T_0,$$

onde $\mathrm{diam}(\cdot)$ denota o diâmetro de um conjunto. Repetindo sobre T_1 a construção que produziu o triângulo T_1 a partir do triângulo T_0, obtemos um triângulo T_2. Prosseguindo indutivamente, obtemos uma seqüência $(T_n)_{n\ge 0}$ de triângulos tal que:

$$\Big\|\int_{\partial T_n} f(z)\,\mathrm{d}z\Big\| \le 4\,\Big\|\int_{\partial T_{n+1}} f(z)\,\mathrm{d}z\Big\|,$$
$$L(\partial T_{n+1}) = \frac{1}{2}\,L(\partial T_n), \quad \mathrm{diam}(T_{n+1}) = \frac{1}{2}\,\mathrm{diam}(T_n), \quad T_{n+1} \subset T_n,$$

para todo $n \ge 0$. Daí:

$$\Big\|\int_{\partial T_0} f(z)\,\mathrm{d}z\Big\| \le 4^n\Big\|\int_{\partial T_n} f(z)\,\mathrm{d}z\Big\|, \tag{4.10}$$

$$L(\partial T_n) = \frac{1}{2^n}\,L(\partial T_0), \quad \mathrm{diam}(T_n) = \frac{1}{2^n}\,\mathrm{diam}(T_0), \tag{4.11}$$

para todo $n \ge 0$. Como $(T_n)_{n\ge 0}$ é uma seqüêcia decrescente de compactos não vazios, existe um ponto $z_0 \in \bigcap_{n=0}^{\infty} T_n$. Por hipótese, o limite:

$$f'(z_0) = \lim_{z\to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

existe. Temos:

$$\int_{\partial T_n} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\partial T_n} \big[f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)\big]\,\mathrm{d}z, \tag{4.12}$$

já que a função $z \mapsto f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0)$ é holomorfa em $\mathbb{C}$ e portanto tem integral nula em qualquer curva fechada. Para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que:

$$\big\|f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)\big\| \le \varepsilon|z - z_0|, \tag{4.13}$$

para todo z com $|z - z_0| < \delta$. Seja n grande o suficiente para que T_n tenha diâmetro menor que δ; daí (4.12) e (4.13) nos dão:

$$\Big\| \int_{\partial T_n} f(z)\,\mathrm{d}z \Big\| \overset{(4.2)}{\le} \varepsilon L(\partial T_n) \sup_{z \in T_n} |z - z_0| \le \varepsilon L(\partial T_n)\,\mathrm{diam}(T_n).$$

De (4.10) e (4.11) vem:

$$\Big\| \int_{\partial T_0} f(z)\,\mathrm{d}z \Big\| \le \varepsilon L(\partial T_0)\,\mathrm{diam}(T_0).$$

Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, concluímos que $\int_{\partial T_0} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$. □

A fórmula integral de Cauchy nos permite demonstrar teoremas melhores do aqueles apresentados até agora para derivação sob o sinal de integral. O leitor não interessado em integral de Bochner pode ignorar o Lema 4.22 abaixo e considerar apenas o Lema 4.23 e seus corolários.

4.22. **Lema.** *Seja $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida completo, U um aberto de $\mathbb{C}$ e $f : \Omega \times U \to E$ uma função tal que:*

- *para todo $z \in U$, a aplicação $\Omega \ni \vartheta \mapsto f(\vartheta, z) \in E$ é Bochner integrável;*
- *para todo $\vartheta \in \Omega$, a aplicação $U \ni z \mapsto f(\vartheta, z) \in E$ é holomorfa;*
- *para todo $z_0 \in U$ existe uma função integrável $\phi : \Omega \to [0, +\infty]$ e uma vizinhança V de z_0 em U tal que $\|f(\vartheta, z)\| \le \phi(\vartheta)$, para todos $\vartheta \in \Omega$ e todos $z \in V$ com $z \ne z_0$.*

Então para todo $z \in U$ a aplicação $\Omega \ni \vartheta \mapsto \frac{\partial f}{\partial z}(\vartheta, z) \in E$ é Bochner integrável, a aplicação $g : U \ni z \mapsto \int_\Omega f(\vartheta, z)\,\mathrm{d}\mu(\vartheta) \in E$ é holomorfa e a derivada de g é dada por:

$$g'(z) = \int_\Omega \frac{\partial f}{\partial z}(\vartheta, z)\,\mathrm{d}\mu(\vartheta) \in E,$$

para todo $z \in U$.

Demonstração. Vamos usar a fórmula integral de Cauchy para mostrar que f satisfaz as hipóteses do Lema 2.19. Seja $z_0 \in U$ fixado e sejam V e ϕ como no enunciado do lema. Seja $R > 0$ tal que o disco fechado $\mathrm{B}[z_0, R]$ está contido em V. O Lema 4.13 nos dá:

$$\frac{\partial f}{\partial z}(\vartheta, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w - z_0| = R} \frac{f(\vartheta, w)}{(w - z)^2}\,\mathrm{d}w,$$

para todo $z \in \mathrm{B}(z_0, R)$ e todo $\vartheta \in \Omega$. Se $z \in \mathrm{B}\big[z_0, \frac{R}{2}\big]$ então, para todo w no círculo $|w - z_0| = R$, temos $|w - z| \geq \frac{R}{2}$ e portanto:

$$\Big\| \frac{f(\vartheta, w)}{(w - z)^2} \Big\| \leq 4 \frac{\phi(\vartheta)}{R^2}.$$

Daí:

$$\Big\| \frac{\partial f}{\partial z}(\vartheta, z) \Big\| \overset{(4.2)}{\leq} 4 \frac{\phi(\vartheta)}{R},$$

para todo $z \in \mathrm{B}\big[z_0, \frac{R}{2}\big]$ e todo $\vartheta \in \Omega$. A conclusão segue. □

4.23. **Lema.** *Seja $f : U \times X \to E$ uma função contínua, onde U é um aberto de $\mathbb{C}$ e X é um espaço topológico. Se para todo $x \in X$ a função $U \ni z \mapsto f(z, x) \in E$ é holomorfa então a função $\frac{\partial f}{\partial z} : U \times X \to E$ é contínua.*

Demonstração. Seja $\mathrm{B}[z_0, R]$ um disco fechado contido em U. Pelo Lema 4.13, temos:

$$f(z, x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w - z_0| = R} \frac{f(w, x)}{(w - z)^2} \, \mathrm{d}w,$$

para todo $z \in \mathrm{B}(z_0, R)$ e todo $x \in X$. Segue do Lema 4.11 que a restrição de f a $\mathrm{B}(z_0, R) \times X$ é contínua. Como $z_0 \in U$ é arbitrário, a conclusão segue. □

4.24. **Corolário.** *Seja $f : [a, b] \times U \to E$ uma função contínua, onde U é um aberto de $\mathbb{C}$. Suponha que para todo $t \in [a, b]$ a função $U \ni z \mapsto f(t, z) \in E$ é holomorfa. Então a função $\frac{\partial f}{\partial z} : [a, b] \times U \to E$ é contínua, a função $g : U \ni z \mapsto \int_a^b f(t, z) \, \mathrm{d}t \in E$ é holomorfa e sua derivada é dada por:*

$$g'(z) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial z}(t, z) \, \mathrm{d}t \in E,$$

para todo $z \in U$.

Demonstração. Segue dos Lemas 4.23 e 2.20. □

4.25. **Corolário.** *Seja $\gamma : [a, b] \to A$ uma curva de classe C^1 por partes e seja $f : A \times U \to E$ uma função contínua, onde A é um subconjunto arbitrário de $\mathbb{C}$ e U é um subconjunto aberto de $\mathbb{C}$. Suponha que para todo $w \in A$ a função $U \ni z \mapsto f(w, z) \in E$ é holomorfa. Então a função $\frac{\partial f}{\partial z} : A \times U \to E$ é contínua, a função $g : U \ni z \mapsto \int_\gamma f(w, z) \, \mathrm{d}w \in E$ é holomorfa e sua derivada é dada por:*

$$g'(z) = \int_\gamma \frac{\partial f}{\partial z}(w, z) \, \mathrm{d}w \in E,$$

para todo $z \in U$.

Demonstração. Segue dos Lemas 4.23 e 4.12. □

5. O Teorema de Cauchy

Se $f : U \to E$ é uma função holomorfa definida num aberto $U \subset \mathbb{C}$ tomando valores num espaço de Banach complexo E e se $\gamma : [a, b] \to U$ é uma curva fechada de classe C^1 por partes que é contrátil em U então $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0$ (Corolário 4.6). No entanto, como se vê no Exemplo 5.1 a seguir, não é necessário que γ seja contrátil em U para que a integral $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z$ seja nula, para toda função holomorfa $f : U \to E$.

5.1. **Exemplo.** Sejam $p, q \in \mathbb{C}$ dois pontos distintos e seja $U = \mathbb{C} \setminus \{p, q\}$. Sejam γ, μ curvas de classe C^1 por partes em U tais que $\gamma(a) = \gamma(b) = \mu(a) = \mu(b)$ e tais que $\mathrm{ind}(\gamma, p) = \mathrm{ind}(\mu, q) = 1$ e $\mathrm{ind}(\gamma, q) = \mathrm{ind}(\mu, p) = 0$. É possível mostrar que a curva $\lambda = \gamma \cdot \mu \cdot \gamma^{-1} \cdot \mu^{-1}$ não é contrátil em U. No entanto, se $f : U \to E$ é uma função holomorfa arbitrária então:

$$\int_\lambda f(z)\,\mathrm{d}z = \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z + \int_\mu f(z)\,\mathrm{d}z - \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z - \int_\mu f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

Ocorre que a curva λ que aparece no Exemplo 5.1 é *homologicamente nula* (no sentido de homologia singular) em U; isso garante a nulidade da integral $\int_\lambda \omega$, para toda 1-forma fechada ω em U. Usando técnicas de topologia algébrica é possível mostrar que se U é um aberto de $\mathbb{C}$ e se $\gamma : [a, b] \to U$ é uma curva contínua fechada tal que $\mathrm{ind}(\gamma, p) = 0$ para todo $p \in \mathbb{C} \setminus U$ então γ é homologicamente nula e portanto, se γ é de classe C^1 por partes, temos que $\int_\gamma \omega = 0$, para toda 1-forma fechada ω em U. Nesta seção nós mostraremos que $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0$, para toda função holomorfa $f : U \to E$, desde que $\mathrm{ind}(\gamma, p) = 0$, para todo $p \in \mathbb{C} \setminus U$.

A discussão acima tem apenas um papel de motivação. Nenhum resultado de topologia algébrica ou qualquer conceito ligado à teoria de homologia será usado no restante desta seção.

Para enunciar o Teorema de Cauchy em sua versão mais geral, precisamos da seguinte:

5.2. **Definição.** Uma *cadeia de curvas fechadas* em $\mathbb{C}$ é uma seqüência finita $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$, onde cada $\gamma_j : [a_j, b_j] \to \mathbb{C}$ é uma curva contínua e fechada. Dizemos que a cadeia γ é *de classe C^k* (resp., *de classe C^k por partes*) se cada curva γ_j é de classe C^k (resp., de classe C^k por partes). A *imagem* da cadeia γ é o conjunto:

$$\mathrm{Im}(\gamma) = \bigcup_{j=1}^{n} \mathrm{Im}(\gamma_j).$$

Se a imagem de γ está contida num subconjunto U de $\mathbb{C}$, diremos que γ é uma *cadeia de curvas fechadas em U*. Se $p \in \mathbb{C}$ é um ponto fora de $\mathrm{Im}(\gamma)$ então o *índice de γ em torno de p* é definido por:

$$\mathrm{ind}(\gamma, p) = \sum_{j=1}^{n} \mathrm{ind}(\gamma_j, p).$$

Se $\mathrm{Im}(\gamma) \subset U$ e se ω é uma 1-forma contínua em U a valores num espaço de Banach E então a *integral de linha* $\int_\gamma \omega$ é definida por:

$$\int_\gamma \omega = \sum_{j=1}^n \int_{\gamma_j} \omega.$$

O *comprimento* da cadeia γ é definido por:

$$L(\gamma) = \sum_{j=1}^n L(\gamma_j).$$

Vários resultados que demonstramos ao longo do texto para curvas fechadas podem ser generalizados de forma evidente para cadeias de curvas fechadas. Listamos a seguir tais resultados:

- Corolário 1.19;
- Corolário 1.20;
- Corolário 1.21;
- Lema 4.8;
- Lema 4.11;
- Lema 4.12;
- Corolário 4.25.

No que segue, E denotará sempre um espaço de Banach complexo.

5.3. **Proposição** (fórmula integral de Cauchy)**.** *Seja $f : U \to E$ uma função holomorfa definida num aberto $U \subset \mathbb{C}$ e seja γ uma cadeia de curvas fechadas de classe C^1 por partes em U tal que* $\mathrm{ind}(\gamma, p) = 0$*, para todo $p \in \mathbb{C} \setminus U$. Então:*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - w}\, \mathrm{d}z = \mathrm{ind}(\gamma, w) f(w), \tag{5.1}$$

para todo $w \in U \setminus \mathrm{Im}(\gamma)$.

Para demonstrar a Proposição 5.3, precisamos do seguinte:

5.4. **Lema.** *Se $f : U \to E$ é uma função holomorfa num aberto $U \subset \mathbb{C}$ então a função $\phi : U \times U \to E$ definida por:*

$$\phi(z, w) = \begin{cases} \frac{f(z)-f(w)}{z-w}, & \textit{se } z \neq w, \\ f'(z), & \textit{se } z = w, \end{cases}$$

é contínua.

Demonstração. A função ϕ é obviamente contínua no complementar da diagonal de $U \times U$. Vamos mostrar que ϕ é contínua num ponto da forma (z_0, z_0), $z_0 \in U$. Como f' é contínua em U, temos:

$$\lim_{z \to z_0} \phi(z, z) = \lim_{z \to z_0} f'(z) = f'(z_0) = \phi(z_0, z_0).$$

É suficiente mostrar então que:

$$\lim_{\substack{(z,w)\to(z_0,z_0)\\ z\neq w}} \frac{f(z)-f(w)}{z-w} = f'(z_0).$$

Se z e w pertencem a uma bola de centro z_0 contida em U, aplicamos a desigualdade do valor médio para a função $U \ni u \mapsto f(u) - f'(z_0)u \in E$ no segmento $[z,w]$ obtendo:

$$\big\|f(z) - f(w) - f'(z_0)(z-w)\big\| \le \sup_{u\in[z,w]} \big\|f'(u) - f'(z_0)\big\||z-w|.$$

A conclusão segue agora facilmente da continuidade de f'. □

Demonstração da Proposição 5.3. Segue do Lema 4.8 que:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{z-w}\,\mathrm{d}z = \operatorname{ind}(\gamma,w)f(w),$$

para todo $w \in U \setminus \operatorname{Im}(\gamma)$. Para completar a demonstração, é suficiente mostrar então que:

$$\int_\gamma \frac{f(z)-f(w)}{z-w}\,\mathrm{d}z = 0,$$

para todo $w \in U \setminus \operatorname{Im}(\gamma)$. Seja $\phi : U \times U \to E$ a função definida no enunciado do Lema 5.4; sabemos que ϕ é contínua e que para todo $z \in U$, a função $U \ni w \mapsto \phi(z,w) \in E$ é holomorfa, pelo Teorema de Singularidade Removível (Teorema 4.20). Segue então do Corolário 4.25 que a função $g : U \to E$ definida por:

$$g(w) = \int_\gamma \phi(z,w)\,\mathrm{d}z, \quad w \in U,$$

é holomorfa. Note que:

$$g(w) = \int_\gamma \frac{f(z)-f(w)}{z-w}\,\mathrm{d}z,$$

para todo $w \in U \setminus \operatorname{Im}(\gamma)$. Considere o conjunto:

$$K = \operatorname{Im}(\gamma) \cup \big\{w \in \mathbb{C} \setminus \operatorname{Im}(\gamma) : \operatorname{ind}(\gamma,w) \neq 0\big\};$$

segue do Corolário 1.21 que K é compacto. Pelas nossas hipóteses, K está contido em U. Note que:

$$g(w) = \int_\gamma \frac{f(z)}{z-w}\,\mathrm{d}z, \tag{5.2}$$

para todo $w \in U \setminus K$. Vamos estender g para todo o plano complexo $\mathbb{C}$ usando a igualdade (5.2) para definir g para $w \in \mathbb{C} \setminus U$. Temos então que a igualdade (5.2) vale para todo w no conjunto aberto $\mathbb{C} \setminus K$; o Corolário 4.25 nos garante que a restrição de g a $\mathbb{C} \setminus K$ é holomorfa. Como $g|_U$ também é holomorfa, concluímos que $g : \mathbb{C} \to E$ é uma função inteira. Para $w \in \mathbb{C}$ fora do compacto K temos:

$$|g(w)| \overset{(4.2)}{\leq} L(\gamma) \sup_{z \in \mathrm{Im}(\gamma)} \frac{|f(z)|}{|z - w|}.$$

Segue daí que $\lim_{|w| \to \infty} g(w) = 0$. O Teorema de Liouville (Teorema 4.19) nos garante então que g é identicamente nula. Isso completa a demonstração. $\square$

Estamos em condições de provar agora o teorema principal desta seção.

5.5. **Teorema** (Cauchy). *Seja $f : U \to E$ uma função holomorfa definida num aberto $U \subset \mathbb{C}$ e seja γ uma cadeia de curvas fechadas de classe C^1 por partes em U tal que* $\mathrm{ind}(\gamma, p) = 0$*, para todo $p \in \mathbb{C} \setminus U$. Então $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0$.*

Demonstração. Como $\mathrm{Im}(\gamma)$ é compacta e U não é, existe um ponto w em U fora de $\mathrm{Im}(\gamma)$. Considere a função $g : U \to E$ definida por $g(z) = f(z)(z-w)$, para todo $z \in U$. A Proposição 5.3 nos dá:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{g(z)}{z - w}\,\mathrm{d}z = \mathrm{ind}(\gamma, w) g(w) = 0. \qquad \square$$

6. Álgebras de Banach

Começamos com a exposição de alguns conceitos puramente algébricos.

6.1. **Definição.** Uma *álgebra* sobre um corpo K é um K-espaço vetorial $\mathfrak{A}$ munido de uma operação binária bilinear $\mathfrak{A} \times \mathfrak{A} \ni (T, S) \mapsto TS \in \mathfrak{A}$, chamada a *multiplicação* de $\mathfrak{A}$, que satisfaz as seguintes propriedades[6]:

- $(T_1T_2)T_3 = T_1(T_2T_3)$, para todos $T_1, T_2, T_3 \in \mathfrak{A}$ (*associatividade*);
- existe um elemento $\mathbf{1} \in \mathfrak{A}$ não nulo (chamado um *elemento neutro* para a multiplicação de $\mathfrak{A}$) tal que $\mathbf{1}T = T\mathbf{1} = T$, para todo $T \in \mathfrak{A}$.

Dizemos que a álgebra $\mathfrak{A}$ é *comutativa* quando a sua multiplicação for uma operação comutativa, i.e., se $TS = ST$, para todos $T, S \in \mathfrak{A}$.

Claramente, se $\mathbf{1}$ e $\mathbf{1}'$ são ambos elementos neutros para a multiplicação de $\mathfrak{A}$ então $\mathbf{1} = \mathbf{1}\mathbf{1}' = \mathbf{1}'$; denotaremos então por $\mathbf{1}$ o (único) elemento neutro para a multiplicação de $\mathfrak{A}$ e diremos que $\mathbf{1}$ é *o elemento unidade* de $\mathfrak{A}$.

6.2. **Definição.** Seja $\mathfrak{A}$ uma álgebra e seja $T \in \mathfrak{A}$. Dizemos que $S \in \mathfrak{A}$ é um *inverso à esquerda* (resp., um *inverso à direita*) para T se $ST = \mathbf{1}$ (resp., se $TS = \mathbf{1}$). Quando existe um elemento $S \in \mathfrak{A}$ tal que $ST = TS = \mathbf{1}$, dizemos

[6]Usualmente o termo álgebra refere-se apenas a um espaço vetorial munido de uma multiplicação bilinear. Existem muitos exemplos importantes de álgebras cuja multiplicação não é associativa (como as álgebras de Lie e de Jordan) e de álgebras cuja multiplicação não tem elemento neutro (como as álgebras de convolução). No entanto, no nosso texto, todas as álgebras terão multiplicação associativa e com elemento neutro.

que T é *inversível* em $\mathfrak{A}$ ou que T é uma *unidade* de $\mathfrak{A}$. Denotamos por $\mathcal{U}(\mathfrak{A})$ o conjunto dos elementos inversíveis de $\mathfrak{A}$, ou seja:

$$\mathcal{U}(\mathfrak{A}) \stackrel{\text{def}}{=} \big\{T \in \mathfrak{A} : T \text{ é inversível}\big\}.$$

É perfeitamente possível que um elemento $T \in \mathfrak{A}$ possua um inverso lateral (i.e., um inverso à esquerda ou um inverso à direita), mas não seja inversível. Um elemento T de uma álgebra pode possuir vários inversos à esquerda (ou vários inversos à direita). Por outro lado, se $T \in \mathfrak{A}$ é inversível então existe *um único* $S \in \mathfrak{A}$ com $TS = ST = \mathbf{1}$; dizemos então que S é *o elemento inverso* de T e escrevemos $S = T^{-1}$. Essa última afirmação é um caso particular do seguinte:

6.3. **Lema.** *Seja $\mathfrak{A}$ uma álgebra e seja $T \in \mathfrak{A}$. Se existem $S_1, S_2 \in \mathfrak{A}$ com $S_1T = TS_2 = \mathbf{1}$ então $S_1 = S_2$; em particular, T é inversível.*

Demonstração. Temos $S_2 = \mathbf{1}S_2 = (S_1T)S_2$ e portanto:

$$S_2 = S_1(TS_2) = S_1\mathbf{1} = S_1. \qquad \square$$

É fácil ver que se T, S são elementos inversíveis de uma álgebra $\mathfrak{A}$ então TS é inversível e $(TS)^{-1} = S^{-1}T^{-1}$.

6.4. **Corolário.** *Seja $\mathfrak{A}$ uma álgebra. Se $S, T \in \mathfrak{A}$ comutam (i.e., $ST = TS$) então ST é inversível se e somente se S e T são ambos inversíveis.*

Demonstração. Basta mostrar que se o produto ST é inversível então S e T são ambos inversíveis. Seja $R \in \mathfrak{A}$ tal que $R(ST) = (ST)R = \mathbf{1}$. Daí RS é um inverso à esquerda para T e SR é um inverso à direita para T; segue então do Lema 6.3 que T é inversível. Similarmente, RT é um inverso à esquerda para S e TR é um inverso à direita para S e portanto S é inversível. $\square$

6.5. **Definição.** Uma *álgebra com divisão* é uma álgebra $\mathfrak{A}$ tal que todo elemento não nulo de $\mathfrak{A}$ é inversível, i.e., tal que $\mathcal{U}(\mathfrak{A}) = \mathfrak{A} \setminus \{0\}$.

6.6. **Definição.** Seja $\mathfrak{A}$ uma álgebra. Por uma *subálgebra* de $\mathfrak{A}$ entendemos um subespaço vetorial $\mathfrak{A}_0$ de $\mathfrak{A}$ tal que[7] $\mathbf{1} \in \mathfrak{A}_0$ e tal que $TS \in \mathfrak{A}_0$, para todos $T, S \in \mathfrak{A}_0$.

Claramente se $\mathfrak{A}_0$ é uma subálgebra de $\mathfrak{A}$ então $\mathfrak{A}_0$ também é uma álgebra, com a multiplicação obtida pela restrição da multiplicação de $\mathfrak{A}$.

É fácil ver que a interseção de uma família arbitrária de subálgebras de $\mathfrak{A}$ é novamente uma subálgebra de $\mathfrak{A}$; dado um subconjunto arbitrário $\mathcal{C}$ de $\mathfrak{A}$, podemos então definir a *subálgebra gerada por $\mathcal{C}$ em $\mathfrak{A}$* como sendo a interseção de todas as subálgebras de $\mathfrak{A}$ que contém $\mathcal{C}$. Obviamente, a subálgebra gerada por $\mathcal{C}$ em $\mathfrak{A}$ é a menor subálgebra de $\mathfrak{A}$ que contém $\mathcal{C}$.

Se $\mathfrak{A}$ é uma álgebra e se $\mathfrak{A}_0$ é uma subálgebra de $\mathfrak{A}$ então observe que:

[7] É possível também considerar subálgebras $\mathfrak{A}_0$ de $\mathfrak{A}$ que tem um elemento neutro $\mathbf{1}' \in \mathfrak{A}_0$ *diferente* do elemento neutro $\mathbf{1}$ de $\mathfrak{A}$. No nosso texto nós não admitiremos essa possibilidade.

- as subálgebras de $\mathfrak{A}_0$ são precisamente as subálgebras de $\mathfrak{A}$ que estão contidas em $\mathfrak{A}_0$;
- se $\mathcal{C}$ é um subconjunto arbitrário de $\mathfrak{A}_0$ então a subálgebra gerada por $\mathcal{C}$ em $\mathfrak{A}_0$ coincide com a subálgebra gerada por $\mathcal{C}$ em $\mathfrak{A}$.

6.7. **Definição.** Seja $\mathfrak{A}$ uma álgebra. Dado um elemento $T \in \mathfrak{A}$ então o *centralizador* de T em $\mathfrak{A}$ é o conjunto:

$$\mathfrak{z}_{\mathfrak{A}}(T) = \big\{S \in \mathfrak{A} : ST = TS\big\}$$

de todos os elementos de $\mathfrak{A}$ que comutam com T.

Deixamos a cargo do leitor a verificação do seguinte fato simples:

6.8. **Lema.** *Se $\mathfrak{A}$ é uma álgebra então o centralizador $\mathfrak{z}_{\mathfrak{A}}(T)$ de um elemento $T \in \mathfrak{A}$ é uma subálgebra de $\mathfrak{A}$ com a seguinte propriedade: se $S \in \mathfrak{z}_{\mathfrak{A}}(T)$ e se S é inversível então $S^{-1} \in \mathfrak{z}_{\mathfrak{A}}(T)$.* □

6.9. **Corolário.** *Seja $\mathfrak{A}$ uma álgebra e seja $\mathcal{C} \subset \mathfrak{A}$ tal que $TS = ST$, para todos $T, S \in \mathcal{C}$. Então a subálgebra gerada por $\mathcal{C}$ é uma álgebra comutativa.*

Demonstração. Denote por $\mathfrak{A}_0$ a subálgebra gerada por $\mathcal{C}$ em $\mathfrak{A}$. Dado $T \in \mathcal{C}$ então, pelo Lema 6.8, $\mathfrak{z}_{\mathfrak{A}}(T)$ é uma subálgebra de $\mathfrak{A}$; como $\mathfrak{z}_{\mathfrak{A}}(T)$ contém $\mathcal{C}$, temos que $\mathfrak{A}_0 \subset \mathfrak{z}_{\mathfrak{A}}(T)$, para todo $T \in \mathcal{C}$. Mas isso significa que $TS = ST$, para todos $T \in \mathfrak{A}_0$ e $S \in \mathcal{C}$. Daí, para todo $T \in \mathfrak{A}_0$, o centralizador $\mathfrak{z}_{\mathfrak{A}}(T)$ é uma subálgebra de $\mathfrak{A}$ que contém $\mathcal{C}$ e portanto obtemos novamente que $\mathfrak{A}_0 \subset \mathfrak{z}_{\mathfrak{A}}(T)$. Concluímos então que $TS = ST$, para todos $T, S \in \mathfrak{A}_0$. □

6.10. **Definição.** Sejam $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$ álgebras. Um *homomorfismo* de $\mathfrak{A}$ para $\mathfrak{A}'$ é uma aplicação linear $\phi : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}'$ que leva o elemento unidade de $\mathfrak{A}$ sobre o elemento unidade de $\mathfrak{A}'$ e tal que $\phi(TS) = \phi(T)\phi(S)$, para todos $T, S \in \mathfrak{A}$. Um homomorfismo bijetor $\phi : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}'$ é dito um *isomorfismo.*

Claramente o inverso de um homomorfismo bijetor $\phi : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}'$ é também um homomorfismo.

6.11. **Lema.** *Sejam $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$ álgebras. Se $\phi : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}'$ e $\psi : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}'$ são homomorfismos então o conjunto $\big\{T \in \mathfrak{A} : \phi(T) = \psi(T)\big\}$ dos pontos onde ϕ e ψ coincidem é uma subálgebra de $\mathfrak{A}$.*

Demonstração. Trivial. □

Um subconjunto $\mathcal{C}$ de uma álgebra $\mathfrak{A}$ é dito um *conjunto de geradores* para $\mathfrak{A}$ se a subálgebra gerada por $\mathcal{C}$ em $\mathfrak{A}$ coincide com $\mathfrak{A}$; de outro modo, $\mathcal{C}$ é um conjunto de geradores para $\mathfrak{A}$ se nenhuma subálgebra própria de $\mathfrak{A}$ contém $\mathcal{C}$.

6.12. **Corolário.** *Sejam $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$ álgebras e seja $\mathcal{C}$ um conjunto de geradores para $\mathfrak{A}$. Se dois homomorfismos $\phi : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}'$, $\psi : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}'$ coincidem em $\mathcal{C}$ então $\phi = \psi$.*

Demonstração. Pelo Lema 6.11, $\big\{T \in \mathfrak{A} : \phi(T) = \psi(T)\big\}$ é uma subálgebra de $\mathfrak{A}$ que contém $\mathcal{C}$ e portanto deve coincidir com $\mathfrak{A}$. □

6.13. **Definição.** Seja $\mathfrak{A}$ uma álgebra. Um *ideal* de $\mathfrak{A}$ é um subespaço I de $\mathfrak{A}$ tal que $TS \in I$ e $ST \in I$, para todos $T \in I$, $S \in \mathfrak{A}$.

6.14. *Observação.* Se $\mathfrak{A}$ é uma álgebra e se I é um ideal de $\mathfrak{A}$ tal que $\mathbf{1} \in I$ então $I = \mathfrak{A}$. Além do mais, se I contém um elemento inversível de $\mathfrak{A}$ então $\mathbf{1} \in I$ e portanto $I = \mathfrak{A}$. Vemos então que se I é um *ideal próprio* de $\mathfrak{A}$ (i.e., se $I \neq \mathfrak{A}$) então I é disjunto de $\mathcal{U}(\mathfrak{A})$.

6.15. **Lema.** *Sejam $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$ álgebras e $\phi : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}'$ um homomorfismo. Então o núcleo* $\mathrm{Ker}(\phi) = \phi^{-1}(0)$ *de ϕ é um ideal próprio de $\mathfrak{A}$.*

Demonstração. Claramente $\mathrm{Ker}(\phi)$ é um subespaço de $\mathfrak{A}$ e $TS, ST \in \mathrm{Ker}(\phi)$, sempre que $T \in \mathrm{Ker}(\phi)$, $S \in \mathfrak{A}$. Além do mais, temos $\mathrm{Ker}(\phi) \neq \mathfrak{A}$ porque $\mathrm{Ker}(\phi)$ não contém o elemento unidade de $\mathfrak{A}$. □

Reciprocamente, todo ideal próprio de uma álgebra é núcleo de um homomorfismo, como se vê no seguinte:

6.16. **Lema.** *Sejam $\mathfrak{A}$ uma álgebra, I um ideal próprio de $\mathfrak{A}$ e $q : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}/I$ a aplicação quociente, onde $\mathfrak{A}/I$ denota o espaço vetorial quociente de $\mathfrak{A}$ pelo subespaço I. Temos que existe uma única operação binária em $\mathfrak{A}/I$ satisfazendo:*

$$q(T)q(S) = q(TS), \tag{6.1}$$

para todos $T, S \in \mathfrak{A}$; essa operação binária torna o espaço quociente $\mathfrak{A}/I$ uma álgebra com elemento unidade igual a $q(\mathbf{1})$ e a aplicação $q : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}/I$ um homomorfismo sobrejetor com núcleo igual ao ideal I. Além do mais, se a álgebra $\mathfrak{A}$ é comutativa então $\mathfrak{A}/I$ também é comutativa.

Demonstração. Como q é sobrejetora, é fácil ver que existe *no máximo* uma operação binária em $\mathfrak{A}/I$ que satisfaz (6.1). Para mostrar que tal operação de fato está bem definida, devemos verificar que se $T, T', S, S' \in \mathfrak{A}$ são tais que $q(T) = q(T')$ e $q(S) = q(S')$ então $q(TS) = q(T'S')$; temos:

$$\begin{aligned} T'S' - TS &= [T + (T' - T)][S + (S' - S)] - TS \\ &= T(S' - S) + (T' - T)S + (T' - T)(S' - S) \in I, \end{aligned}$$

já que $T' - T, S' - S \in I$. Segue então que $q(TS) = q(T'S')$. A verificação das outras afirmações feitas no enunciado é imediata. □

Deixamos a cargo do leitor a verificação do seguinte fato simples:

6.17. **Lema** (fundamental do homomorfismo). *Sejam $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$ álgebras e seja $\phi : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}'$ um homomorfismo. Então $\phi(\mathfrak{A})$ é uma subálgebra de $\mathfrak{A}'$ e existe uma única aplicação $\bar{\phi} : \mathfrak{A}/\mathrm{Ker}(\phi) \to \mathfrak{A}'$ tal que o diagrama:*

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{A} \arrow[d, "q"'] \arrow[dr, "\phi"] & \\ \mathfrak{A}/\mathrm{Ker}(\phi) \arrow[r, "\bar{\phi}"'] & \mathfrak{A}' \end{tikzcd}$$

comuta, onde $q : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}/\mathrm{Ker}(\phi)$ *denota a aplicação quociente. Temos que* $\bar{\phi}$ *é um isomorfismo da álgebra quociente* $\mathfrak{A}/\mathrm{Ker}(\phi)$ *sobre a álgebra* $\phi(\mathfrak{A})$. □

Iniciamos agora nosso estudo de álgebras de Banach. No que segue, denotamos por $\mathbb{K}$ o corpo $\mathbb{R}$ ou o corpo $\mathbb{C}$.

6.18. **Definição.** Uma *álgebra de Banach* sobre $\mathbb{K}$ é uma álgebra $\mathfrak{A}$ sobre $\mathbb{K}$ munida de uma norma $\|\cdot\|$ tal que $(\mathfrak{A}, \|\cdot\|)$ é um espaço de Banach sobre $\mathbb{K}$ e tal que as seguintes condições são satisfeitas:

(a) $\|\mathbf{1}\| = 1$;
(b) $\|TS\| \le \|T\|\,\|S\|$, para todos $T, S \in \mathfrak{A}$.

Segue da propriedade (b) na Definição 6.18 que a multiplicação de uma álgebra de Banach é uma aplicação bilinear contínua.

Observe que se $\mathfrak{A}$ é uma álgebra de Banach e se $\mathfrak{A}_0$ é uma subálgebra fechada de $\mathfrak{A}$ então $\mathfrak{A}_0$ é também uma álgebra de Banach com a norma e a multiplicação induzidas de $\mathfrak{A}$; dizemos nesse caso que $\mathfrak{A}_0$ é uma *subálgebra de Banach* de $\mathfrak{A}$.

6.19. **Exemplo.** Se X é um espaço de Banach não nulo sobre $\mathbb{K}$ então o espaço $\mathfrak{A} = \mathrm{Lin}(X)$ dos operadores $\mathbb{K}$-lineares contínuos $T : X \to X$ munido da *norma de operadores* $\|T\| = \sup_{\|x\|\le 1} \|Tx\|$ é uma álgebra de Banach sobre $\mathbb{K}$, cuja multiplicação é dada pela composição de operadores. O elemento neutro de $\mathfrak{A}$ é o operador identidade de X. Observe que a álgebra $\mathrm{Lin}(X)$ não é comutativa se X tem dimensão maior que 1.

6.20. **Exemplo.** Se K é um espaço topológico compacto não vazio então o espaço $C(K)$ das funções contínuas $f : K \to \mathbb{K}$ é uma álgebra de Banach comutativa sobre $\mathbb{K}$ munida da norma do supremo $\|f\| = \sup_{x\in K} |f(x)|$ e da multiplicação ponto a ponto $(fg)(x) = f(x)g(x)$, $x \in K$. O elemento neutro de $C(K)$ é a função constante e igual a 1 em K.

6.21. **Proposição.** *Seja* $\mathfrak{A}$ *uma álgebra sobre* $\mathbb{K}$ *munida de uma norma* $\|\cdot\|$ *tal que* $(\mathfrak{A}, \|\cdot\|)$ *é um espaço de Banach sobre* $\mathbb{K}$ *e tal que a operação de multiplicação* $\mathfrak{A} \times \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$ *é contínua. Então existe uma norma* $\|\cdot\|'$ *em* $\mathfrak{A}$, *equivalente a* $\|\cdot\|$, *tal que* $(\mathfrak{A}, \|\cdot\|')$ *é uma álgebra de Banach sobre* $\mathbb{K}$.

Demonstração. Para cada $T \in \mathfrak{A}$, denote por $\mathfrak{l}_T : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$ o operador linear definido por $\mathfrak{l}_T(S) = TS$, para todo $S \in \mathfrak{A}$. Como a multiplicação de $\mathfrak{A}$ é bilinear e contínua, segue facilmente que a aplicação:

$$\mathfrak{A} \ni T \longmapsto \mathfrak{l}_T \in \mathrm{Lin}(\mathfrak{A}) \tag{6.2}$$

é linear e contínua, onde o espaço de Banach $\mathrm{Lin}(\mathfrak{A})$ é munido da norma de operadores. A inversa de (6.2) é uma restrição da aplicação

$$\mathrm{Lin}(\mathfrak{A}) \ni L \longmapsto L(\mathbf{1}) \in \mathfrak{A}$$

e portanto (6.2) é um homeomorfismo sobre sua imagem. Segue que a norma

$$\|T\|' \stackrel{\text{def}}{=} \|\mathfrak{l}_T\|, \quad T \in \mathfrak{A},$$

induzida em $\mathfrak{A}$ por (6.2) é equivalente à norma $\|\cdot\|$. Daí $(\mathfrak{A}, \|\cdot\|')$ é um espaço de Banach sobre $\mathbb{K}$. Como $\mathfrak{l}_{\mathbf{1}}$ é o operador identidade de $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{A}$ é um espaço não nulo, temos que $\|\mathbf{1}\|' = 1$, i.e., a condição (a) que aparece na Definição 6.18 é satisfeita. Para verificar a condição (b), observe que:

$$\|TS\|' = \|\mathfrak{l}_{TS}\| = \|\mathfrak{l}_T \mathfrak{l}_S\| \le \|\mathfrak{l}_T\| \|\mathfrak{l}_S\| = \|T\|' \|S\|',$$

para todos $T, S \in \mathfrak{A}$. □

A Proposição 6.21 nos diz que as condições (a) e (b) na Definição 6.18 não são tão importantes; nós sempre podemos satisfazê-las trocando a norma de $\mathfrak{A}$ por uma outra equivalente.

Para facilitar a compreensão do material que será apresentado no restante da seção, sugerimos que o leitor mantenha em mente o Exemplo 6.19.

6.22. **Lema.** *Seja $\mathfrak{A}$ uma álgebra de Banach. Então:*

- *o fecho de uma subálgebra de $\mathfrak{A}$ é uma subálgebra de $\mathfrak{A}$;*
- *se $\mathfrak{A}_0$ é uma subálgebra comutativa de $\mathfrak{A}$ então o fecho de $\mathfrak{A}_0$ é uma subálgebra comutativa de $\mathfrak{A}$;*
- *o fecho de um ideal de $\mathfrak{A}$ é um ideal de $\mathfrak{A}$.*

Demonstração. Segue facilmente da continuidade da multiplicação de $\mathfrak{A}$. □

Se $\mathfrak{A}$ é uma álgebra de Banach e se $\mathcal{C} \subset \mathfrak{A}$ é um subconjunto arbitrário então é fácil ver que o fecho da subálgebra gerada por $\mathcal{C}$ em $\mathfrak{A}$ é a menor subálgebra fechada de $\mathfrak{A}$ que contém $\mathcal{C}$; essa será chamada a *subálgebra de Banach de $\mathfrak{A}$ gerada por $\mathcal{C}$* ou a *subálgebra fechada de $\mathfrak{A}$ gerada por $\mathcal{C}$*. Obviamente, se $\mathfrak{A}_0$ é uma subálgebra de Banach de $\mathfrak{A}$ e se $\mathcal{C}$ é um subconjunto de $\mathfrak{A}_0$ então a subálgebra fechada gerada por $\mathcal{C}$ em $\mathfrak{A}$ coincide com a subálgebra fechada gerada por $\mathcal{C}$ em $\mathfrak{A}_0$.

6.23. **Corolário.** *Seja $\mathfrak{A}$ uma álgebra de Banach e seja $\mathcal{C}$ um subconjunto de $\mathfrak{A}$ tal que $TS = ST$, para todos $T, S \in \mathcal{C}$. Então a subálgebra de Banach gerada por $\mathcal{C}$ em $\mathfrak{A}$ é uma álgebra de Banach comutativa.*

Demonstração. Segue do Lema 6.22 e do Corolário 6.9. □

Vamos agora estudar algumas propriedades do conjunto dos elementos inversíveis de uma álgebra de Banach.

6.24. **Lema.** *Seja $\mathfrak{A}$ uma álgebra de Banach. Dado $T \in \mathfrak{A}$, suponha que a série*[8] *$\sum_{n=0}^{\infty} T^n$ converge em $\mathfrak{A}$, i.e., que o limite $\lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{k} T^n$ existe em $\mathfrak{A}$; esse é o caso, por exemplo, se $\|T\| < 1$. Então $\mathbf{1} - T$ é inversível em $\mathfrak{A}$ e:*

$$(\mathbf{1} - T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} T^n.$$

[8]Por convenção, definimos $T^0 = \mathbf{1}$, para todo $T \in \mathfrak{A}$.

Demonstração. Segue da continuidade da multiplicação de $\mathfrak{A}$ que:

$$(\mathbf{1}-T)\sum_{n=0}^{\infty}T^n=\sum_{n=0}^{\infty}[(\mathbf{1}-T)T^n]=\sum_{n=0}^{\infty}(T^n-T^{n+1})=\lim_{k\to\infty}(\mathbf{1}-T^{k+1});$$

como a série $\sum_{n=0}^{\infty}T^n$ converge, temos que $\lim_{k\to\infty}T^{k+1}=0$ e portanto $(\mathbf{1}-T)\sum_{n=0}^{\infty}T^n=\mathbf{1}$. De modo análogo, vê-se que $\big(\sum_{n=0}^{\infty}T^n\big)(\mathbf{1}-T)=\mathbf{1}$. Note que se $\|T\|<1$ então a série $\sum_{n=0}^{\infty}T^n$ é normalmente convergente, já que $\|T^n\|\le\|T\|^n$ e a progressão geométrica $\sum_{n=0}^{\infty}\|T\|^n$ é convergente. □

6.25. **Corolário.** *Se $\mathfrak{A}$ é uma álgebra de Banach então a bola aberta de centro $\mathbf{1}$ e raio 1 em $\mathfrak{A}$ está contida em $\mathcal{U}(\mathfrak{A})$.* □

6.26. **Corolário.** *Se $\mathfrak{A}$ é uma álgebra de Banach então o conjunto $\mathcal{U}(\mathfrak{A})$ dos elementos inversíveis de $\mathfrak{A}$ é aberto em $\mathfrak{A}$.*

Demonstração. Pelo Corolário 6.25, o elemento neutro $\mathbf{1}$ é um ponto interior de $\mathcal{U}(\mathfrak{A})$. Se $T\in\mathcal{U}(\mathfrak{A})$ então a aplicação $\mathfrak{l}_T:\mathfrak{A}\ni S\mapsto TS\in\mathfrak{A}$ é um homeomorfismo de $\mathfrak{A}$ cujo inverso é $\mathfrak{l}_{T^{-1}}$. Como $\mathfrak{l}_T$ leva $\mathcal{U}(\mathfrak{A})$ sobre $\mathcal{U}(\mathfrak{A})$ e $\mathfrak{l}_T(\mathbf{1})=T$, segue que T também é um ponto interior de $\mathcal{U}(\mathfrak{A})$. □

6.27. **Corolário.** *Se $\mathfrak{A}$ é uma álgebra de Banach então o fecho de um ideal próprio I de $\mathfrak{A}$ é novamente um ideal próprio de $\mathfrak{A}$.*

Demonstração. Se I é um ideal próprio de $\mathfrak{A}$ então sabemos que $\overline{I}$ é um ideal de $\mathfrak{A}$, pelo Lema 6.22. Se fosse $\overline{I}=\mathfrak{A}$ então I seria denso em $\mathfrak{A}$ e portanto $I\cap\mathcal{U}(\mathfrak{A})\ne\emptyset$, já que $\mathcal{U}(\mathfrak{A})$ é um aberto não vazio de $\mathfrak{A}$ (Corolário 6.26). Mas isso implicaria que $I=A$ (veja Observação 6.14). □

Note que se $\mathfrak{A}$ é uma álgebra de Banach então a aplicação:

$$\mathbb{K}\ni\lambda\longmapsto\lambda\mathbf{1}\in\mathfrak{A}\tag{6.3}$$

é um homomorfismo e também uma isometria sobre sua imagem. Além do mais, para todos $\lambda\in\mathbb{K}$, $T\in\mathfrak{A}$, temos $\lambda T=(\lambda\mathbf{1})T$. Identificaremos então cada escalar $\lambda\in\mathbb{K}$ com o elemento $\lambda\mathbf{1}\in\mathfrak{A}$.

6.28. **Definição.** Seja $\mathfrak{A}$ uma álgebra de Banach. Dado um elemento $T\in\mathfrak{A}$ então o *espectro* de T é o conjunto $\sigma(T)\subset\mathbb{K}$ definido por:

$$\sigma(T)=\big\{\lambda\in\mathbb{K}:\lambda-T\text{ não é inversível em }\mathfrak{A}\big\},$$

e o *resolvente* de T é o conjunto $\rho(T)\subset\mathbb{K}$ definido por:

$$\rho(T)=\mathbb{K}\setminus\sigma(T)=\big\{\lambda\in\mathbb{K}:\lambda-T\text{ é inversível em }\mathfrak{A}\big\}.$$

Note que se $\mathfrak{A}_0$ é uma subálgebra fechada de uma álgebra de Banach $\mathfrak{A}$ então é perfeitamente possível que um elemento de $\mathfrak{A}_0$ seja inversível em $\mathfrak{A}$ mas não seja inversível em $\mathfrak{A}_0$; daí, dado $T\in\mathfrak{A}_0$, temos que o espectro e o resolvente de T *visto como elemento de* $\mathfrak{A}_0$ não necessariamente coincidem respectivamente com o espectro e o resolvente de T *visto como elemento de* $\mathfrak{A}$ (veja Exemplo 6.31 abaixo). De modo geral, preferimos usar a notação simplificada $\sigma(T)$ e $\rho(T)$ introduzida na Definição 6.28, mas quando for necessário usaremos a notação mais precisa $\sigma_{\mathfrak{A}}(T)$ e $\rho_{\mathfrak{A}}(T)$ para o espectro e o resolvente de T visto como elemento de $\mathfrak{A}$. Em geral, se $\mathfrak{A}_0$ é uma subálgebra fechada de $\mathfrak{A}$ então temos:

$$\rho_{\mathfrak{A}_0}(T) \subset \rho_{\mathfrak{A}}(T), \quad \sigma_{\mathfrak{A}}(T) \subset \sigma_{\mathfrak{A}_0}(T).$$

6.29. **Exemplo.** Seja X um espaço de Banach não nulo e seja $\mathfrak{A} = \mathrm{Lin}(X)$ a álgebra de Banach dos operadores lineares contínuos em X (recorde Exemplo 6.19). Temos que um elemento $T \in \mathfrak{A}$ é inversível se e somente se T é um operador linear bijetor; de fato, se $T : X \to X$ é linear, bijetor e contínuo então o Teorema da Aplicação Aberta garante que $T^{-1} : X \to X$ também é contínuo e portanto $T^{-1} \in \mathfrak{A}$. O espectro de T é dado então por:

$$\sigma(T) = \big\{\lambda \in \mathbb{K} : \lambda - T \text{ não é bijetor}\big\}.$$

Note que $\lambda \in \mathbb{K}$ é um autovalor de T se e somente se o operador $\lambda - T$ não é injetor. Quando X tem dimensão finita então o espectro de T coincide exatamente com o conjunto dos autovalores de T; quando X tem dimensão infinita então $\sigma(T)$ contém (mas em geral não coincide com) o conjunto dos autovalores de T.

6.30. **Exemplo.** Seja K um espaço topológico compacto não vazio e seja $C(K)$ a álgebra de Banach comutativa das funções contínuas em K (recorde Exemplo 6.20). Temos que um elemento $f \in C(K)$ é inversível se e somente se $0 \notin f(K)$. Segue portanto que o espectro de f é precisamente a imagem de f, ou seja:

$$\sigma(f) = f(K),$$

para toda $f \in C(K)$.

6.31. **Exemplo.** Seja $S^1 \subset \mathbb{C}$ o círculo unitário $\big\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\big\}$ e considere a álgebra de Banach complexa $\mathfrak{A} = C(S^1)$ constituída pelas funções contínuas $f : S^1 \to \mathbb{C}$. Seja $\mathfrak{i} \in \mathfrak{A}$ a aplicação inclusão, i.e., $\mathfrak{i}(z) = z$, para todo $z \in S^1$. A subálgebra gerada por $\mathfrak{i}$ em $\mathfrak{A}$ é a álgebra das funções polinomiais

$$S^1 \ni z \longmapsto \sum_{k=0}^{n} a_k z^k \in \mathbb{C}, \quad k \geq 0,\ a_0, \ldots, a_k \in \mathbb{C}.$$

Seja $\mathfrak{A}_0$ o fecho da subálgebra gerada por $\mathfrak{i}$, i.e., a subálgebra de Banach gerada por $\mathfrak{i}$ em $\mathfrak{A}$. Obviamente $\mathfrak{i}$ é um elemento inversível de $\mathfrak{A}$, já que $\mathfrak{i}$ não se anula em S^1. Vamos ver que $\mathfrak{i}$ não é inversível na álgebra de Banach $\mathfrak{A}_0$, i.e., a função $z \mapsto z^{-1}$ não pertence a $\mathfrak{A}_0$. Em primeiro lugar, note que se f pertence à subálgebra gerada por $\mathfrak{i}$ então a integral de linha $\int_{|z|=1} f(z)\,\mathrm{d}z$ é nula, já que f é a restrição de uma função inteira. Como toda função $f \in \mathfrak{A}_0$ é o limite uniforme em S^1 de uma seqüência de elementos da subálgebra gerada por $\mathfrak{i}$, temos na verdade $\int_{|z|=1} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$, para toda $f \in \mathfrak{A}_0$. Como $\int_{|z|=1} z^{-1}\,\mathrm{d}z = 2\pi i$, temos que $\mathfrak{i}^{-1} \notin \mathfrak{A}_0$. Como vimos no

Exemplo 6.30, o espectro de $\mathfrak{i}$ visto como elemento de $\mathfrak{A}$ é dado por:

$$\sigma_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{i}) = S^1.$$

Vamos calcular o espectro de $\mathfrak{i}$ visto como elemento de $\mathfrak{A}_0$. Obviamente, $\sigma_{\mathfrak{A}_0}(\mathfrak{i})$ contém $\sigma_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{i}) = S^1$. Seja $\lambda \in \mathbb{C}$. Se $|\lambda| < 1$ então:

$$\int_{|z|=1} (\lambda - z)^{-1} \, \mathrm{d}z = -2\pi i$$

e portanto $z \mapsto (\lambda - z)^{-1}$ não pertence a $\mathfrak{A}_0$; logo $\lambda \in \sigma_{\mathfrak{A}_0}(\mathfrak{i})$. Suponha agora que $|\lambda| > 1$. Nesse caso, a série de Taylor da função $z \mapsto (\lambda - z)^{-1}$ centrada na origem converge uniformemente no disco unitário $|z| \le 1$ e portanto $z \mapsto (\lambda - z)^{-1}$ é o limite uniforme em S^1 de uma seqüência de funções polinomiais. Logo $z \mapsto \lambda - z$ é inversível em $\mathfrak{A}_0$ e $\lambda \notin \sigma_{\mathfrak{A}_0}(\mathfrak{i})$. Concluímos então que:

$$\sigma_{\mathfrak{A}_0}(\mathfrak{i}) = \mathrm{B}[0, 1] = \big\{ z \in \mathbb{C} : |z| \le 1 \big\}.$$

Continuemos agora o estudo das propriedades do espectro e do resolvente de um elemento de uma álgebra de Banach.

6.32. **Lema.** *Se $\mathfrak{A}$ é uma álgebra de Banach então para todo $T \in \mathfrak{A}$ temos que o resolvente de T é aberto em $\mathbb{K}$ e portanto o espectro de T é fechado em $\mathbb{K}$.*

Demonstração. O resolvente de T é a imagem inversa do conjunto $\mathcal{U}(\mathfrak{A})$ pela função contínua $\mathbb{K} \ni \lambda \mapsto \lambda - T \in \mathfrak{A}$. Pelo Corolário 6.26, $\mathcal{U}(\mathfrak{A})$ é aberto em $\mathfrak{A}$ e portanto $\rho(T)$ é aberto em $\mathbb{K}$. □

6.33. **Lema.** *Se $\mathfrak{A}$ é uma álgebra de Banach então para todo $T \in \mathfrak{A}$ temos que o espectro de T está contido na bola fechada de centro na origem e raio $\|T\|$ em $\mathfrak{A}$.*

Demonstração. Basta mostrar que se $\lambda \in \mathbb{K}$ e $|\lambda| > \|T\|$ então $\lambda - T$ é inversível em $\mathfrak{A}$. Temos:

$$\lambda - T = \lambda(\mathbf{1} - T\lambda^{-1}).$$

Como $\|T\lambda^{-1}\| = \|T\||\lambda|^{-1} < 1$, segue do Lema 6.24 que $\mathbf{1} - T\lambda^{-1}$ é inversível em $\mathfrak{A}$. Logo $\lambda - T$ também é inversível em $\mathfrak{A}$. □

6.34. **Corolário.** *Se $\mathfrak{A}$ é uma álgebra de Banach então o espectro de um elemento arbitrário $T \in \mathfrak{A}$ é compacto.*

Demonstração. Segue dos Lemas 6.32 e 6.33. □

6.35. **Lema.** *Seja $\mathfrak{A}$ uma álgebra de Banach. Então a* aplicação inversão

$$\mathrm{inv} : \mathcal{U}(\mathfrak{A}) \ni T \longmapsto T^{-1} \in \mathfrak{A}$$

é de classe C^∞ (holomorfa, se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) e sua diferencial é dada por:

$$\mathrm{d}(\mathrm{inv})(T) \cdot H = -T^{-1} H T^{-1}, \tag{6.4}$$

para todos $T \in \mathcal{U}(\mathfrak{A})$ e $H \in \mathfrak{A}$.

Demonstração. Começamos mostrando que inv é diferenciável no ponto $\mathbf{1}$ e que $\mathrm{d}(\mathrm{inv})(\mathbf{1}) \cdot H = -H$, para todo $H \in \mathfrak{A}$; para isso, é suficiente verificar que:

$$\lim_{H \to 0} \frac{(\mathbf{1} + H)^{-1} - \mathbf{1} - (-H)}{\|H\|} = 0. \tag{6.5}$$

Pelo Lema 6.24, se $\|H\| < 1$ então $(\mathbf{1} + H)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n H^n$ e portanto:

$$(\mathbf{1} + H)^{-1} - \mathbf{1} - (-H) = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n H^n. \tag{6.6}$$

Observe também que:

$$\Big\| \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n H^n \Big\| \le \sum_{n=2}^{\infty} \|H\|^n = \frac{\|H\|^2}{1 - \|H\|}. \tag{6.7}$$

A igualdade (6.5) segue então diretamente de (6.6) e (6.7). Seja agora T um elemento inversível arbitrário de $\mathfrak{A}$. Considere os homeomorfismos lineares $\mathfrak{l}_T$ e $\mathfrak{r}_T$ de $\mathfrak{A}$ definidos por $\mathfrak{l}_T(S) = TS$, $\mathfrak{r}_T(S) = ST$, para todos $S \in \mathfrak{A}$. Temos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{A} \arrow[r, "\mathrm{inv}"] & \mathfrak{A} \\ \mathfrak{A} \arrow[u, "\mathfrak{l}_T"] \arrow[r, "\mathrm{inv}"'] & \mathfrak{A} \arrow[u, "\mathfrak{r}_{T^{-1}}"'] \end{tikzcd}$$

ou seja:

$$\mathrm{inv} = \mathfrak{r}_{T^{-1}} \circ \mathrm{inv} \circ \mathfrak{l}_{T^{-1}}. \tag{6.8}$$

Como as aplicações lineares contínuas $\mathfrak{l}_{T^{-1}}$ e $\mathfrak{r}_{T^{-1}}$ são de classe C^∞ e inv é diferenciável no ponto $\mathbf{1}$, segue da igualdade (6.8) que inv é diferenciável no ponto T; diferenciando (6.8) no ponto T e usando a regra da cadeia, obtemos a fórmula (6.4). Para mostrar que inv é de classe C^∞, considere a aplicação:

$$\mathfrak{A} \times \mathfrak{A} \ni (T_1, T_2) \longmapsto -\mathfrak{l}_{T_1} \circ \mathfrak{r}_{T_2} \in \mathrm{Lin}(\mathfrak{A}); \tag{6.9}$$

temos que (6.9) é bilinear e contínua e portanto de classe C^∞. A fórmula (6.4) mostra que $\mathrm{d}(\mathrm{inv}) : \mathcal{U}(\mathfrak{A}) \to \mathrm{Lin}(\mathfrak{A})$ é igual à composta da aplicação $\mathrm{inv} : \mathcal{U}(\mathfrak{A}) \to \mathfrak{A}$, com a aplicação diagonal $\mathfrak{A} \ni T \mapsto (T, T) \in \mathfrak{A} \times \mathfrak{A}$, com a aplicação (6.9). Segue então por indução em k que inv é de classe C^k, para todo $k \ge 0$; logo inv é de classe C^∞. Finalmente, se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ então a fórmula (6.4) mostra que $\mathrm{d}(\mathrm{inv})(T) : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$ é $\mathbb{C}$-linear, para todo $T \in \mathcal{U}(\mathfrak{A})$ e portanto a aplicação inv é holomorfa. $\square$

6.36. **Definição.** Seja $\mathfrak{A}$ uma álgebra de Banach e seja $T \in \mathfrak{A}$. A aplicação:

$$\rho(T) \ni \lambda \longmapsto \rho(T; \lambda) \overset{\text{def}}{=} (\lambda - T)^{-1} \in \mathfrak{A}$$

é chamada a *aplicação resolvente* correspondente ao elemento T. O valor da aplicação resolvente num ponto $\lambda \in \rho(T)$ é chamado o *resolvente de T no ponto λ*.

6.37. **Corolário.** *Seja $\mathfrak{A}$ uma álgebra de Banach. A aplicação resolvente de um elemento $T \in \mathfrak{A}$ é de classe C^∞ (holomorfa, se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).*

Demonstração. A aplicação $\mathbb{K} \ni \lambda \mapsto \lambda - T \in \mathfrak{A}$ é claramente de classe C^∞ (holomorfa, se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). A conclusão segue do Lema 6.35 e da regra da cadeia. □

Temos a seguinte estimativa sobre o resolvente $\rho(T;\lambda)$ de um elemento T quando $|\lambda| \to \infty$.

6.38. **Lema.** *Seja $\mathfrak{A}$ uma álgebra de Banach. Dado $T \in \mathfrak{A}$ então:*

$$\lim_{|\lambda|\to\infty} \rho(T;\lambda) = 0.$$

Demonstração. Para $\lambda \in \rho(T)$, $\lambda \neq 0$, temos:

$$\rho(T;\lambda) = (\lambda - T)^{-1} = [\lambda(\mathbf{1} - T\lambda^{-1})]^{-1} = \lambda^{-1}(\mathbf{1} - T\lambda^{-1})^{-1}.$$

Como a aplicação inversão de $\mathfrak{A}$ é contínua (Lema 6.35), temos que:

$$\lim_{|\lambda|\to\infty} (\mathbf{1} - T\lambda^{-1})^{-1} = \mathbf{1}.$$

Obviamente, $\lim_{|\lambda|\to\infty} \lambda^{-1} = 0$. A conclusão segue. □

Estamos em condições de demonstrar agora o seguinte importante resultado:

6.39. **Proposição.** *Seja $\mathfrak{A}$ uma álgebra de Banach complexa. Então o espectro de um elemento $T \in \mathfrak{A}$ é um subconjunto compacto e não vazio do plano complexo $\mathbb{C}$.*

Demonstração. Já vimos que o espectro de T é compacto (Corolário 6.34). Suponha por absurdo que $\sigma(T) = \emptyset$, de modo que $\rho(T) = \mathbb{C}$. Daí a aplicação resolvente de T é uma função inteira (Corolário 6.37), i.e., holomorfa em todo o plano complexo $\mathbb{C}$. Segue do Lema 6.38 que a aplicação resolvente é limitada e portanto constante, pelo Teorema de Liouville (Teorema 4.19). Daí $\rho(T;\lambda) = 0$, para todo $\lambda \in \mathbb{C}$. Mas o elemento $\rho(T;\lambda) \in \mathfrak{A}$ é inversível para todo λ, o que nos dá uma contradição. □

6.40. **Corolário.** *Se $\mathfrak{A}$ é uma álgebra de Banach complexa com divisão então todo elemento de $\mathfrak{A}$ é da forma $\lambda\mathbf{1}$, com $\lambda \in \mathbb{C}$; em particular, a aplicação* (6.3) *é um isomorfismo e uma isometria de $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ sobre $\mathfrak{A}$.*

Demonstração. Dado $T \in \mathfrak{A}$ então, pela Proposição 6.39, existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $\lambda - T$ não é inversível; como $\mathfrak{A}$ é uma álgebra com divisão, isso implica que $\lambda - T = 0$ e portanto $T = \lambda\mathbf{1}$. □

6.41. **Lema** (expansão de Taylor do resolvente no infinito). *Seja $\mathfrak{A}$ uma álgebra de Banach e seja $T \in \mathfrak{A}$. Para todo $z \neq 0$ em $\mathbb{K}$ com $|z| < \|T\|^{-1}$, temos que o resolvente de T no ponto z^{-1} é dado pela série de potências:*

$$\rho(T; z^{-1}) = \sum_{n=0}^{\infty} T^n z^{n+1}. \tag{6.10}$$

Demonstração. Temos:

$$\rho(T; z^{-1}) = (z^{-1} - T)^{-1} = [z^{-1}(\mathbf{1} - zT)]^{-1} = z(\mathbf{1} - zT)^{-1}.$$

Como $\|zT\| = |z|\,\|T\| < 1$, segue do Lema 6.24 que:

$$\rho(T; z^{-1}) = z \sum_{n=0}^{\infty} T^n z^n. \qquad \square$$

6.42. **Definição.** Seja $\mathfrak{A}$ uma álgebra de Banach complexa e seja $T \in \mathfrak{A}$. O *raio espectral* de T é o número real não negativo definido por:

$$|\sigma(T)| \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{z \in \sigma(T)} |z|. \tag{6.11}$$

Segue da Proposição 6.39 que existe $z \in \sigma(T)$ tal que $|z| = |\sigma(T)|$, i.e., o supremo em (6.11) é na verdade um máximo. Temos que o raio espectral de T é o raio do menor disco fechado centrado na origem em $\mathbb{C}$ que contém o espectro de T. Note que, pelo Lema 6.33, temos sempre a desigualdade:

$$|\sigma(T)| \le \|T\|.$$

No que segue, determinaremos uma fórmula precisa para $|\sigma(T)|$.

6.43. **Lema.** *Seja $\mathfrak{A}$ uma álgebra de Banach complexa e seja $T \in \mathfrak{A}$. Então a fórmula* (6.10) *é válida para todo $z \in \mathbb{C}$ tal que $0 < |z| < |\sigma(T)|^{-1}$. Além do mais, temos $|\sigma(T)| \ge \limsup_{n\to\infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}}$.*

Demonstração. Considere o conjunto:

$$U = \big\{ z \in \mathbb{C} : z \neq 0 \text{ e } z^{-1} \in \rho(T) \big\} \cup \{0\}$$

e a função $f : U \to \mathfrak{A}$ definida por:

$$f(z) = \begin{cases} \rho(T; z^{-1}), & \text{se } z \in U \setminus \{0\}, \\ 0, & \text{se } z = 0. \end{cases}$$

Claramente $U \setminus \{0\}$ é um aberto e a função f é holomorfa em $U \setminus \{0\}$ (Lema 6.32 e Corolário 6.37). Além do mais, se $|z| < \|T\|^{-1}$ então segue do Lema 6.41 que $z \in U$ e que:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} T^n z^{n+1}. \tag{6.12}$$

A Proposição 3.7 e o Corolário 3.9 nos dizem então que f é holomorfa em U e que (6.12) é exatamente a série de Taylor de f centrada na origem. Como o disco aberto de centro na origem e raio $|\sigma(T)|^{-1}$ está contido em

U, segue da Proposição 4.15 que a igualdade (6.12) é válida para todo z com $|z| < |\sigma(T)|^{-1}$; logo (6.10) vale para todo z com $0 < |z| < |\sigma(T)|^{-1}$. Vemos também que o raio de convergência da série de potências em (6.12) é pelo menos $|\sigma(T)|^{-1}$. Obviamente as séries de potências $\sum_{n=0}^{\infty} T^n z^{n+1}$ e $\sum_{n=0}^{\infty} T^n z^n$ têm o mesmo raio de convergência e a fórmula (3.2) nos dá então:

$$\frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}}} \geq |\sigma(T)|^{-1}.$$

Isso completa a demonstração. □

Nosso objetivo agora é mostrar que o limite $\lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}}$ coincide exatamente com o raio espectral de T. Para isso, precisamos de um lema preparatório.

6.44. **Lema.** *Seja $\mathfrak{A}$ uma álgebra de Banach e seja $T \in \mathfrak{A}$. Se $\lambda \in \mathbb{K}$ pertence ao espectro de T então λ^n pertence ao espectro de T^n, para todo $n \geq 1$.*

Demonstração. Temos:

$$\lambda^n - T^n = (\lambda - T) \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^k T^{n-1-k}.$$

Como a subálgebra de $\mathfrak{A}$ gerada por T é comutativa (Corolário 6.9), segue que os elementos $\lambda - T$ e $\sum_{k=0}^{n-1} \lambda^k T^{n-1-k}$ comutam. Daí, se λ^n pertence ao resolvente de T^n então $\lambda^n - T^n$ é inversível e portanto, pelo Corolário 6.4, $\lambda - T$ também é inversível, i.e., λ pertence ao resolvente de T. □

6.45. **Proposição** (fórmula do raio espectral)**.** *Seja $\mathfrak{A}$ uma álgebra de Banach complexa e seja $T \in \mathfrak{A}$. Então o limite* $\lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}}$ *existe e valem as igualdades:*

$$|\sigma(T)| = \lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}} = \inf_{n\geq 1} \|T^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

Demonstração. Se $\lambda \in \sigma(T)$ então $\lambda^n \in \sigma(T^n)$ (Lema 6.44) e portanto $|\lambda^n| \leq \|T^n\|$ (Lema 6.33). Logo $|\lambda| \leq \|T^n\|^{\frac{1}{n}}$, para todo $n \geq 1$ e portanto, usando também o Lema 6.43, obtemos:

$$|\sigma(T)| \leq \inf_{n\geq 1} \|T^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \liminf_{n\to\infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \limsup_{n\to\infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}} \leq |\sigma(T)|.$$

A conclusão segue. □

Como vimos no Exemplo 6.31, se $\mathfrak{A}_0$ é uma subálgebra fechada de uma álgebra de Banach $\mathfrak{A}$ e se $T \in \mathfrak{A}_0$ então o espectro de T visto como elemento de $\mathfrak{A}_0$ pode conter propriamente o espectro de T visto como elemento de $\mathfrak{A}$. No entanto, temos o seguinte:

6.46. **Corolário.** *Sejam $\mathfrak{A}$ uma álgebra de Banach complexa, $\mathfrak{A}_0$ uma subálgebra fechada de $\mathfrak{A}$ e $T \in \mathfrak{A}_0$. Então:*

(6.13) $$\sup_{z\in\sigma_{\mathfrak{A}}(T)} |z| = \sup_{z\in\sigma_{\mathfrak{A}_0}(T)} |z|,$$

i.e., o raio espectral de T visto como elemento de $\mathfrak{A}$ coincide com o raio espectral de T visto como elemento de $\mathfrak{A}_0$.

Demonstração. Simplesmente observe que, pela Proposição 6.45, ambos os supremos que aparecem em (6.13) são iguais ao limite $\lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}}$. □

7. Cálculo funcional holomorfo

No que segue, consideramos fixada uma álgebra de Banach complexa $\mathfrak{A}$.

Se $\mathbb{C} \ni z \mapsto f(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k \in \mathbb{C}$ é uma função polinomial em $\mathbb{C}$ com coeficientes complexos $a_0, \ldots, a_k \in \mathbb{C}$ e se T é um elemento da álgebra de Banach complexa $\mathfrak{A}$ então podemos definir um elemento $f(T) \in \mathfrak{A}$ de forma natural fazendo $f(T) = \sum_{k=0}^{n} a_k T^k$. É fácil ver que se f e g são funções polinomiais então:

$$(f+g)(T) = f(T) + g(T), \quad (fg)(T) = f(T)g(T). \tag{7.1}$$

Mais geralmente, se $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ é uma função inteira então é natural definir $f(T) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k T^k$, onde $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ é a série de Taylor de f centrada na origem; note que a série $\sum_{k=0}^{\infty} a_k T^k$ é normalmente convergente em $\mathfrak{A}$, para todo $T \in \mathfrak{A}$, já que a série de potências $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ converge em todo o plano complexo $\mathbb{C}$. Utilizando propriedades elementares de séries de potências, não é difícil verificar que as igualdades (7.1) também são válidas se f e g são funções inteiras arbitrárias.

Nosso objetivo aqui é procurar uma definição para $f(T)$, quando $T \in \mathfrak{A}$ e $f : U \to \mathbb{C}$ é uma função holomorfa num aberto U do plano complexo. A primeira pergunta que devemos fazer é a seguinte: qual deve ser a relação entre o domínio de f e o elemento T para que $f(T)$ esteja bem-definido? Uma pista para responder a essa pergunta é obtida se consideramos a álgebra de Banach $\mathfrak{A} = \mathrm{Lin}(\mathbb{C}^n)$ das matrizes complexas $n \times n$. Seja $T = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathfrak{A}$ a matriz diagonal que tem os números complexos $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ em sua diagonal principal. Nesse caso, uma definição razoável para $f(T)$ deveria satisfazer:

$$f(T) = \mathrm{diag}\big(f(\lambda_1), \ldots, f(\lambda_n)\big). \tag{7.2}$$

Como $\sigma(T) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$, parece razoável que para definir $f(T)$ o domínio da função f deva conter o espectro de T.

Seja então $T \in \mathfrak{A}$ e $f : U \to \mathbb{C}$ uma função holomorfa num aberto $U \subset \mathbb{C}$ contendo $\sigma(T)$. Para definir $f(T)$ nesse caso geral, não é apropriado usar uma representação de f em série de potências, pois essa série pode não ser convergente num disco grande o suficiente para nossos propósitos. Uma idéia natural é utilizar a Fórmula Integral de Cauchy (recorde Proposição 5.3). Substituindo formalmente w por T na fórmula integral (5.1) somos levados a considerar a integral de linha:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z)(z-T)^{-1}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z)\rho(T;z)\,\mathrm{d}z, \tag{7.3}$$

na qual o integrando é uma função holomorfa em $U \setminus \sigma(T)$, tomando valores na álgebra de Banach complexa $\mathfrak{A}$. Olhemos novamente para o caso em que $\mathfrak{A} = \mathrm{Lin}(\mathbb{C}^n)$ e $T = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Se γ é uma cadeia de curvas fechadas de classe C^1 por partes em $U \setminus \sigma(T)$ tal que $\mathrm{ind}(\gamma, p) = 0$ para todo $p \in \mathbb{C} \setminus U$ então a Fórmula Integral de Cauchy nos diz que a integral (7.3) é igual à matriz diagonal cujo j-ésimo elemento da diagonal principal é igual a $\mathrm{ind}(\gamma, \lambda_j) f(\lambda_j)$. Para obter o resultado desejado (7.2), devemos portanto supor também que $\mathrm{ind}(\gamma, p) = 1$, para todo $p \in \sigma(T)$. Isso motiva a seguinte:

7.1. **Definição.** Sejam $U \subset \mathbb{C}$ um aberto e K um subconjunto compacto de U. Uma cadeia de curvas fechadas γ é dita *adaptada* ao par (U, K) se:

- $\mathrm{Im}(\gamma) \subset U \setminus K$;
- $\mathrm{ind}(\gamma, p) = 1$, para todo $p \in K$;
- $\mathrm{ind}(\gamma, p) = 0$, para todo $p \in \mathbb{C} \setminus U$.

7.2. **Definição.** Seja $T \in \mathfrak{A}$ e seja $f : U \to \mathbb{C}$ uma função holomorfa, onde U é um aberto de $\mathbb{C}$ contendo $\sigma(T)$. Definimos $f(T) \in \mathfrak{A}$ fazendo:

$$f(T) \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z)(z - T)^{-1} \, \mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z) \rho(T; z) \, \mathrm{d}z, \tag{7.4}$$

onde γ é uma cadeia de curvas fechadas de classe C^1 por partes adaptada ao par $\big(U, \sigma(T)\big)$.

Para justificar a Definição 7.2 precisamos verificar duas coisas. Em primeiro lugar, devemos saber que uma cadeia de curvas fechadas γ de classe C^1 por partes adaptada ao par $\big(U, \sigma(T)\big)$ de fato existe. A demonstração detalhada esse fato é um tanto técnica e deixamo-la para o apêndice. No momento, apenas enunciamos a seguinte:

7.3. **Proposição.** *Dados um aberto $U \subset \mathbb{C}$ e um compacto $K \subset U$ então existe uma cadeia de curvas fechadas γ de classe C^∞ por partes adaptada ao par (U, K).*

Demonstração. Veja Apêndice A. □

Devemos também verificar que a integral em (7.4) não depende da cadeia γ escolhida; temos o seguinte:

7.4. **Lema.** *Seja $T \in \mathfrak{A}$ e sejam γ, μ cadeias de curvas fechadas de classe C^1 por partes adaptadas ao par $\big(U, \sigma(T)\big)$. Então:*

$$\int_\gamma f(z) \rho(T; z) \, \mathrm{d}z = \int_\mu f(z) \rho(T; z) \, \mathrm{d}z.$$

Demonstração. Escreva $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ e $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_m)$; consideramos a seguinte cadeia de curvas fechadas de classe C^1 por partes:

$$\lambda = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n, \mu_1^{-1}, \ldots, \mu_m^{-1}).$$

Obviamente $\mathrm{Im}(\lambda) \subset U \setminus \sigma(T)$ e $\mathrm{ind}(\lambda, p) = \mathrm{ind}(\gamma, p) - \mathrm{ind}(\mu, p) = 0$, para todo $p \in \mathbb{C} \setminus U$ e todo $p \in \sigma(T)$. Como a função $z \mapsto f(z)\rho(T; z)$ é holomorfa no aberto $U \setminus \sigma(T)$ e como $\mathrm{ind}(\lambda, p) = 0$ para todo p no complementar de $U \setminus \sigma(T)$, segue do Teorema de Cauchy (Teorema 5.5) que a integral $\int_\lambda f(z)\rho(T; z)\,\mathrm{d}z$ é nula. Portanto:

$$\int_\lambda f(z)\rho(T; z)\,\mathrm{d}z = \int_\gamma f(z)\rho(T; z)\,\mathrm{d}z - \int_\mu f(z)\rho(T; z)\,\mathrm{d}z = 0. \qquad \square$$

Apêndice A. Construção de cadeias de curvas adaptadas

O objetivo deste apêndice é demonstrar a Proposição 7.3. A idéia para a construção de uma cadeia de curvas fechadas adaptada a um par (U, K) é intuitivamente simples. Ladrilhamos o plano por um reticulado de quadrados com diâmetro menor que a distância de K até o complementar de U. A cadeia é obtida então considerando as fronteiras (percorridas no sentido anti-horário) dos quadrados do reticulado que interceptam K. Temos, no entanto, que eliminar as arestas que são comuns a dois quadrados, para que a imagem da cadeia seja disjunta de K; note que arestas comuns a dois quadrados são percorridas em sentidos opostos e portanto cancelam-se nas integrais de linha. Devemos também concatenar as arestas remanescentes dos quadrados de modo a formar uma cadeia de curvas fechadas. Nosso objetivo aqui é apresentar uma exposição detalhada e rigorosa dessa construção. Para isso, será conveniente considerar a seguinte generalização da Definição 5.2.

A.1. **Definição.** Uma *cadeia de curvas* em $\mathbb{C}$ é uma seqüência finita:

$$\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n),$$

onde cada $\gamma_j : [a_j, b_j] \to \mathbb{C}$ é uma curva contínua. Dizemos que a cadeia γ é *de classe C^k* (resp., *de classe C^k por partes*) se cada curva γ_j é de classe C^k (resp., de classe C^k por partes). A *imagem* da cadeia γ é o conjunto:

$$\mathrm{Im}(\gamma) = \bigcup_{j=1}^{n} \mathrm{Im}(\gamma_j).$$

Se a imagem de γ está contida num subconjunto U de $\mathbb{C}$, diremos que γ é uma *cadeia de curvas em U*. Se $\mathrm{Im}(\gamma) \subset U$ e se ω é uma 1-forma contínua em U então a *integral de linha* $\int_\gamma \omega$ é definida por:

$$\int_\gamma \omega = \sum_{j=1}^{n} \int_{\gamma_j} \omega.$$

Note que definimos uma cadeia de curvas como sendo uma *seqüência* de curvas, e não apenas um conjunto de curvas. O motivo disso não é que estaremos particularmente interessados na ordem das curvas que aparecem numa dada cadeia; utilizamos seqüências em vez de conjuntos para permitir eventualmente que uma mesma curva apareça mais de uma vez numa mesma cadeia. Se $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ é uma cadeia de curvas, usaremos a notação $\mu \in \gamma$ e diremos que μ *pertence* a γ quando existe um índice $j = 1, \ldots, n$ tal que $\mu = \gamma_j$.

A.2. **Definição.** Seja $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ uma cadeia de curvas em $\mathbb{C}$, onde $\gamma_j : [a_j, b_j] \to \mathbb{C}$, para $j = 1, \ldots, n$. Dado um ponto $p \in \mathbb{C}$ então a *incidência* de γ em p é definida por:

$$\iota(\gamma, p) = \big|\{j = 1, \ldots, n : \gamma_j(b_j) = p\}\big| - \big|\{j = 1, \ldots, n : \gamma_j(a_j) = p\}\big|,$$

onde $|\cdot|$ denota a cardinalidade de um conjunto. A cadeia γ é dita *cíclica* se $\iota(\gamma, p) = 0$, para todo $p \in \mathbb{C}$.

Observe que toda cadeia de curvas fechadas é cíclica, mas nem toda cadeia cíclica de curvas é uma cadeia de curvas fechadas. Parte do nosso trabalho consiste em mostrar que uma cadeia cíclica de curvas pode ser reduzida, num sentido conveniente, a uma cadeia de curvas fechadas.

A.3. **Definição.** Seja $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ uma cadeia de curvas em $\mathbb{C}$, onde $\gamma_j : [a_j, b_j] \to \mathbb{C}$, para $j = 1, \ldots, n$. Dizemos que γ é *redutível* se existem índices $j, k \in \{1, \ldots, n\}$, $j \neq k$, tais que $\gamma_j(b_j) = \gamma_k(a_k)$; nesse caso, a cadeia constituída pelas curvas γ_r, $r \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{j, k\}$ e pela curva concatenada $\gamma_j \cdot \gamma_k$ é dita uma *redução simples* de γ. Se uma cadeia μ é obtida de γ por uma seqüência finita de reduções simples então dizemos que μ é uma *redução* de γ. Uma cadeia de curvas γ é dita *irredutível* quando não for redutível.

A.4. **Lema.** *Seja γ uma cadeia de curvas em $\mathbb{C}$ e seja μ uma redução de γ. Então:*

- *se γ é de classe C^k por partes então μ também é de classe C^k por partes;*
- $\mathrm{Im}(\gamma) = \mathrm{Im}(\mu)$*;*
- *se γ é de classe C^1 por partes e se ω é uma 1-forma contínua num subconjunto U de $\mathbb{C}$ que contém $\mathrm{Im}(\gamma)$ então $\int_\gamma \omega = \int_\mu \omega$;*
- *para todo $p \in \mathbb{C}$, temos $\iota(\gamma, p) = \iota(\mu, p)$;*
- *a cadeia γ é cíclica se e somente se a cadeia μ é cíclica.*

Demonstração. Claramente é suficiente considerar o caso em que μ é uma redução simples de γ. Nesse caso, a verificação das afirmações acima é imediata. □

A.5. **Lema.** *Toda cadeia de curvas em $\mathbb{C}$ admite uma redução irredutível.*

Demonstração. Senão, seria possível executar uma seqüência infinita de reduções simples numa cadeia; como cada redução simples reduz em uma unidade o número de curvas de uma cadeia e como toda cadeia é finita, isso é impossível. □

A.6. **Lema.** *Se uma cadeia de curvas γ em $\mathbb{C}$ é cíclica e irredutível então γ é uma cadeia de curvas fechadas.*

Demonstração. Escreva $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$, com $\gamma_j : [a_j, b_j] \to \mathbb{C}$, $j = 1, \ldots, n$. Seja $j = 1, \ldots, n$ fixado. Devemos mostrar que $\gamma_j(a_j) = \gamma_j(b_j)$. Tomando $p = \gamma_j(a_j)$ então, como $\iota(\gamma, p) = 0$, deve existir um índice $k = 1, \ldots, n$ tal que $\gamma_k(b_k) = p$. Se fosse $k \neq j$, a cadeia γ seria redutível. Logo $k = j$ e portanto $\gamma_j(b_j) = p = \gamma_j(a_j)$. □

A.7. **Definição.** Seja $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ uma cadeia de curvas em $\mathbb{C}$ e suponha que existam índices $j, k \in \{1, \ldots, n\}$ (não necessariamente distintos) tais que $\gamma_j = \gamma_k^{-1}$. Se μ denota a cadeia obtida de γ pela remoção das curvas γ_j e γ_k então diremos que μ é obtida de γ por uma *operação de cancelamento*.

A.8. **Lema.** *Seja γ uma cadeia de curvas em $\mathbb{C}$ e suponha que μ é obtida de γ por um número finito de operações de cancelamento. Então:*

- *se γ é de classe C^k (resp., de classe C^k por partes) então μ também é de classe C^k (resp., de classe C^k por partes);*
- $\mathrm{Im}(\mu) \subset \mathrm{Im}(\gamma)$*;*
- *se γ é de classe C^1 por partes e se ω é uma 1-forma contínua num subconjunto U de $\mathbb{C}$ que contém $\mathrm{Im}(\gamma)$ então $\int_\gamma \omega = \int_\mu \omega$;*
- *para todo $p \in \mathbb{C}$, temos $\iota(\gamma, p) = \iota(\mu, p)$;*
- *a cadeia γ é cíclica se e somente se a cadeia μ é cíclica.*

Demonstração. Claramente é suficiente considerar o caso em que μ é obtida de γ por uma única operação de cancelamento. Nesse caso, a verificação das afirmações acima é imediata. Observamos, no entanto, que o seguinte caso merece uma atenção especial: se μ é obtida de γ pela remoção de uma curva γ_j tal que $\gamma_j = \gamma_j^{-1}$. Nesse caso, a curva γ_j é obrigatoriamente fechada e, se γ_j é de classe C^1 por partes, a integral $\int_{\gamma_j} \omega$ é necessariamente nula, já que $\int_{\gamma_j} \omega = -\int_{\gamma_j} \omega$. □

A.9. *Observação.* Suponha que $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ é uma cadeia de curvas duas a duas distintas, i.e., $\gamma_j \neq \gamma_k$, para $j, k = 1, \ldots, n$, $j \neq k$. Considere a cadeia μ constituída pelas curvas γ_j pertencentes a γ tais que γ_j^{-1} não pertence a γ. É fácil ver que μ é obtida de γ por um número finito de operações de cancelamento e portanto a tese do Lema A.8 aplica-se às curvas γ e μ.

Dado um ponto $p = (p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ e um número real positivo l então denotamos por $Q(p, l)$ o *quadrado* $Q(p, l) = [p_1, p_1 + l] \times [p_2, p_2 + l]$; consideramos também os caminhos retilíneos:

$$\partial^1 Q(p, l) = [p, p + (l, 0)], \quad \partial^2 Q(p, l) = [p + (l, 0), p + (l, l)],$$
$$\partial^3 Q(p, l) = [p + (l, l), p + (0, l)], \quad \partial^4 Q(p, l) = [p + (0, l), p],$$

e a curva fechada:

$$\partial Q(p, l) = \partial^1 Q(p, l) \cdot \partial^2 Q(p, l) \cdot \partial^3 Q(p, l) \cdot \partial^4 Q(p, l).$$

As curvas $\partial^i Q(p, l)$, $i = 1, 2, 3, 4$, são chamadas as *arestas* do quadrado $Q(p, l)$. É fácil verificar que se $Q = Q(p, l)$ é um quadrado então

$\mathrm{ind}(\partial Q, z) = 1$ se z pertence ao interior de Q e $\mathrm{ind}(\partial Q, z) = 0$ se z não pertence a Q.

Dado $l > 0$ então o *reticulado padrão de lado* l é o conjunto de quadrados:

$$\mathcal{Q}_l = \big\{ Q(p, l) : p = (lm, ln),\ m, n \in \mathbb{Z} \big\}.$$

Se $\widetilde{\mathcal{Q}}$ é um subconjunto finito de $\mathcal{Q}_l$ então denotamos por $\partial\widetilde{\mathcal{Q}}$ a cadeia de curvas de classe C^∞ constituída pelas curvas $\partial^i Q$, com $Q \in \widetilde{\mathcal{Q}}$, $i = 1, 2, 3, 4$. Note que a cadeia de curvas fechadas constituída pelas curvas ∂Q, $Q \in \widetilde{\mathcal{Q}}$, é uma redução da cadeia $\partial\widetilde{\mathcal{Q}}$; segue então do Lema A.4 que a cadeia $\partial\widetilde{\mathcal{Q}}$ é cíclica. Denote por $\bar\partial\widetilde{\mathcal{Q}}$ a cadeia formada pelas curvas γ pertencentes à cadeia $\partial\widetilde{\mathcal{Q}}$ tais que γ^{-1} não pertence à cadeia $\partial\widetilde{\mathcal{Q}}$; dito de outra forma, $\bar\partial\widetilde{\mathcal{Q}}$ é a cadeia formada pelas curvas $\gamma \in \partial\widetilde{\mathcal{Q}}$ tais que $\mathrm{Im}(\gamma)$ não está contida na interseção de dois quadrados distintos pertencentes ao conjunto $\widetilde{\mathcal{Q}}$. Temos que $\bar\partial\widetilde{\mathcal{Q}}$ é obtida de $\partial\widetilde{\mathcal{Q}}$ por um número finito de operações de cancelamento (veja Observação A.9). Segue então do Lema A.8 que $\bar\partial\widetilde{\mathcal{Q}}$ é uma cadeia cíclica de curvas de classe C^∞ cuja imagem está contida na imagem de $\partial\widetilde{\mathcal{Q}}$; além do mais, se ω é uma 1-forma contínua num subconjunto $U \subset \mathbb{C}$ contendo a imagem de $\partial\widetilde{\mathcal{Q}}$ então:

$$\int_{\partial\widetilde{\mathcal{Q}}} \omega = \int_{\bar\partial\widetilde{\mathcal{Q}}} \omega. \tag{A.1}$$

Estamos agora prontos para a:

Demonstração da Proposição 7.3. Sejam $U \subset \mathbb{C}$ um aberto e K um subconjunto compacto de U. Considere o reticulado padrão $\mathcal{Q}_l$, onde l é escolhido de forma que $l\sqrt{2}$ (i.e., o diâmetro de um quadrado de lado l) é menor que a distância de K até o complementar de U. Seja $\widetilde{\mathcal{Q}}$ o conjunto dos quadrados $Q \in \mathcal{Q}_l$ tais que $Q \cap K \neq \emptyset$; como K é limitado, temos que $\widetilde{\mathcal{Q}}$ é finito. Além do mais, pela nossa escolha de l, temos $Q \subset U$, para todo $Q \in \widetilde{\mathcal{Q}}$. Como vimos acima nos comentários que precedem a demonstração, $\partial\widetilde{\mathcal{Q}}$ e $\bar\partial\widetilde{\mathcal{Q}}$ são cadeias cíclicas de curvas de classe C^∞. Seja γ uma redução irredutível de $\bar\partial\widetilde{\mathcal{Q}}$ (Lema A.5). Então γ é uma cadeia cíclica de curvas de classe C^∞ por partes tal que $\mathrm{Im}(\gamma) = \mathrm{Im}(\bar\partial\widetilde{\mathcal{Q}})$ (Lema A.4); pelo Lema A.6, γ é uma cadeia de curvas fechadas. Para completar a demonstração, devemos verificar que γ é adaptada ao par (U, K). Se um ponto $z_0 \in \mathbb{C}$ não pertence à fronteira de nenhum dos quadrados $Q \in \widetilde{\mathcal{Q}}$ então $z_0 \notin \mathrm{Im}(\partial\widetilde{\mathcal{Q}})$, $z_0 \notin \mathrm{Im}(\gamma)$ e:

$$\begin{aligned} \mathrm{ind}(\gamma, z_0) &\overset{\text{Lema}}{\underset{4.8}{=}} \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z - z_0} \overset{\text{Lema}}{\underset{A.4}{=}} \frac{1}{2\pi i}\int_{\bar\partial\widetilde{\mathcal{Q}}} \frac{\mathrm{d}z}{z - z_0} \\ &\overset{(A.1)}{=} \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\widetilde{\mathcal{Q}}} \frac{\mathrm{d}z}{z - z_0} = \sum_{Q \in \widetilde{\mathcal{Q}}} \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial Q} \frac{\mathrm{d}z}{z - z_0} = \sum_{Q \in \widetilde{\mathcal{Q}}} \mathrm{ind}(\partial Q, z_0). \end{aligned} \tag{A.2}$$

Se $z_0 \notin U$ então z_0 não pertence a nenhum dos quadrados $Q \in \widetilde{\mathcal{Q}}$ e portanto (A.2) implica que $\mathrm{ind}(\gamma, z_0) = 0$. Seja agora $z_0 \in K$. Devemos mostrar que $z_0 \notin \mathrm{Im}(\gamma)$ e que $\mathrm{ind}(\gamma, z_0) = 1$. Consideramos dois casos.

Caso 1. *z_0 pertence ao interior de algum quadrado de $\mathcal{Q}_l$.*

Nesse caso, z_0 não pertence à fronteira de nenhum dos quadrados de $\widetilde{\mathcal{Q}}$, de modo que $z_0 \notin \mathrm{Im}(\gamma)$ e as igualdades em (A.2) são válidas. Seja $Q \in \mathcal{Q}_l$ tal que z_0 pertence ao interior de Q. Temos $\mathrm{ind}(\partial Q, z_0) = 1$ e $\mathrm{ind}(\partial Q', z_0) = 0$, para qualquer quadrado $Q' \in \mathcal{Q}_l$ com $Q' \neq Q$. Como $z_0 \in Q \cap K$, vemos que Q está em $\widetilde{\mathcal{Q}}$. Segue então de (A.2) que $\mathrm{ind}(\gamma, z_0) = 1$.

Caso 2. *z_0 pertence à fronteira de algum quadrado de $\mathcal{Q}_l$.*

Vamos mostrar em primeiro lugar que $z_0 \notin \mathrm{Im}(\gamma) = \mathrm{Im}(\bar{\partial}\widetilde{\mathcal{Q}})$. Suponha por absurdo que $z_0 \in \mathrm{Im}(\mu)$, onde $\mu \in \bar{\partial}\widetilde{\mathcal{Q}}$. Temos que $\mu \in \partial\widetilde{\mathcal{Q}}$, i.e., μ é uma aresta de um quadrado $Q \in \widetilde{\mathcal{Q}}$; daí μ^{-1} é uma aresta de um outro quadrado $Q' \in \mathcal{Q}_l$. Como $z_0 \in Q' \cap K$, temos $Q' \in \widetilde{\mathcal{Q}}$. Logo ambas as curvas μ e μ^{-1} pertencem à cadeia $\partial\widetilde{\mathcal{Q}}$, contradizendo $\mu \in \bar{\partial}\widetilde{\mathcal{Q}}$.

Vamos agora mostrar que $\mathrm{ind}(\gamma, z_0) = 1$. Como $z_0 \notin \mathrm{Im}(\gamma)$, existe uma bola aberta B de centro z_0 que é disjunta de $\mathrm{Im}(\gamma)$. Temos que $\mathrm{ind}(\gamma, z) = \mathrm{ind}(\gamma, z_0)$, para todo $z \in B$ (Corolário 1.19). Seja $Q \in \mathcal{Q}_l$ tal que z_0 pertence à fronteira de Q; como $z_0 \in Q \cap K$, temos $Q \in \widetilde{\mathcal{Q}}$. Seja z um ponto de B pertencente ao interior de Q. Como z pertence ao interior de um quadrado de $\widetilde{\mathcal{Q}}$, podemos argumentar como no caso 1 e usar as igualdades (A.2) para concluir que $\mathrm{ind}(\gamma, z) = 1$. Obtivemos então que $\mathrm{ind}(\gamma, z_0) = \mathrm{ind}(\gamma, z) = 1$, completando a demonstração. □

Referências

[1] D. V. Tausk, *Integration of Banach Space Valued Functions*, http://www.ime.usp.br/~tausk/texts/bochner.dvi

[2] E. L. Lima, *Análise no Espaço* $\mathbb{R}^n$, Brasília, Ed. Universidade de Brasília. São Paulo, Ed. E. Blücher Ltda., 1970.