Notas Para o Curso de Análise Matemática I

Daniel V. Tausk

Sumário

CAPÍTULO 1

Medida de Lebesgue e Espaços de Medida

1.1. Aritmética na Reta Estendida

Medidas associam números reais não negativos a conjuntos, mas a alguns conjuntos fica associado o valor *infinito*. Precisamos então tratar infinitudes como objetos que podem ser operados com somas e produtos. Introduzimos então formalmente a *reta estendida* que é a reta real usual acrescida de dois objetos $+\infty$, $-\infty$ e com operações e relação de ordem definidas de maneira natural. Por uma questão de completude, listamos nesta seção em detalhes várias definições e propriedades relacionadas à reta estendida. Na Subseção 1.1.1 definimos o conceito de limite de uma seqüência na reta estendida e na Subseção 1.1.2 formalizamos o conceito de soma de uma família (possivelmente infinita) de elementos não negativos da reta estendida.

As noções formalizadas nesta seção são de caráter bastante intuitivo e acreditamos que o leitor pode optar pela omissão de sua leitura sem prejuízo significativo de compreensão das seções seguintes.

1.1.1. Notação. Denotamos por $\mathbb{R}$ o corpo ordenado dos números reais.

Escolha dois objetos quaisquer não pertencentes à reta real $\mathbb{R}$ e denote-os por $+\infty$ e $-\infty$.

1.1.2. Definição. O conjunto $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ será chamado a *reta estendida*. Um elemento $a \in \overline{\mathbb{R}}$ é dito *finito* (resp., *infinito*) quando $a \in \mathbb{R}$ (resp., $a \notin \mathbb{R}$).

A natureza dos objetos $+\infty$ e $-\infty$ é totalmente irrelevante; o que importa é a forma como eles interagem com os números reais através das operações e relações que definiremos a seguir em $\overline{\mathbb{R}}$.

1.1.3. Definição. Dados $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, escrevemos $a < b$ e dizemos que a é *menor que* b quando uma das seguintes condições é satisfeita:

- $a, b \in \mathbb{R}$ e $a < b$ na ordem usual de $\mathbb{R}$;
- $b = +\infty$ e $a \neq +\infty$;
- $a = -\infty$ e $b \neq -\infty$.

Escrevemos $a > b$ quando $b < a$, $a \leq b$ quando $a < b$ ou $a = b$ e escrevemos $a \geq b$ quando $b \leq a$.

A relação binária $<$ define uma *relação de ordem total* na reta estendida $\overline{\mathbb{R}}$, ou seja, possui as seguintes propriedades:

- (*anti-reflexividade*) para todo $a \in \overline{\mathbb{R}}$, não é o caso que $a < a$;
- (*transitividade*) para todos $a, b, c \in \overline{\mathbb{R}}$, se $a < b$ e $b < c$ então $a < c$;

- (*tricotomia*) dados $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ então $a < b$, $b < a$ ou $a = b$.

A relação de ordem em $\overline{\mathbb{R}}$ nos permite introduzir as notações de intervalo $[a,b]$, $]a,b]$, $[a,b[$ e $]a,b[$, com $a,b \in \overline{\mathbb{R}}$, da maneira usual. Se A é um subconjunto de $\overline{\mathbb{R}}$ podemos definir também o *supremo* (resp., o *ínfimo*) de A em $\overline{\mathbb{R}}$ como sendo a menor cota superior (resp., a maior cota inferior) de A em $\overline{\mathbb{R}}$. O supremo (resp., o ínfimo) de um conjunto $A \subset \overline{\mathbb{R}}$ é denotado por $\sup A$ (resp., $\inf A$); se $(a_i)_{i \in I}$ é uma família em $\overline{\mathbb{R}}$, denotamos também o supremo (resp., o ínfimo) do conjunto $\{a_i : i \in I\}$ por $\sup_{i \in I} a_i$ (resp., $\inf_{i \in I} a_i$). No Exercício 1.1 pedimos ao leitor para mostrar que todo subconjunto de $\overline{\mathbb{R}}$ possui supremo e ínfimo.

1.1.4. Definição. A *soma* na reta estendida é definida da seguinte forma:

- se $a, b \in \mathbb{R}$ então $a + b$ é igual à soma usual de a e b em $\mathbb{R}$;
- $(+\infty) + a = a + (+\infty) = +\infty$, se $a \in \overline{\mathbb{R}}$ e $a \neq -\infty$;
- $(-\infty) + a = a + (-\infty) = -\infty$, se $a \in \overline{\mathbb{R}}$ e $a \neq +\infty$.

As somas $(+\infty) + (-\infty)$ e $(-\infty) + (+\infty)$ são consideradas *indefinidas*. Para $a \in \overline{\mathbb{R}}$ denotamos por $-a$ o elemento de $\overline{\mathbb{R}}$ definido pelas condições:

- se $a \in \mathbb{R}$ então $-a$ é o inverso de a com relação à soma de $\mathbb{R}$;
- se $a = +\infty$ então $-a = -\infty$;
- se $a = -\infty$ então $-a = +\infty$.

Para $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, escrevemos $a - b = a + (-b)$. Definimos também o *módulo* de $a \in \overline{\mathbb{R}}$ fazendo $|a| = a$ para $a \geq 0$ e $|a| = -a$ para $a < 0$. O *produto* na reta estendida é definido da seguinte forma:

- se $a, b \in \mathbb{R}$ então $a \cdot b$ (ou, simplesmente, ab) é igual ao produto usual de a e b em $\mathbb{R}$;
- $ab = 0$ se $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ e $a = 0$ ou $b = 0$;
- $ab = ba = a$, se $a \in \{+\infty, -\infty\}$ e $b > 0$;
- $ab = ba = -a$, se $a \in \{+\infty, -\infty\}$ e $b < 0$.

Note que o produto é uma operação binária no conjunto $\overline{\mathbb{R}}$, mas a soma é apenas uma *operação binária parcialmente definida* em $\overline{\mathbb{R}}$, já que não atribuímos significado para $(+\infty) + (-\infty)$ e $(-\infty) + (+\infty)$. Note também que, de acordo com nossas convenções, $0 \cdot (\pm\infty) = (\pm\infty) \cdot 0 = 0$; essa convenção é conveniente em teoria da medida, embora possa parecer estranha para quem está acostumado com as propriedades usuais de limites de funções.

Na proposição abaixo resumimos as propriedades da ordem e das operações de $\overline{\mathbb{R}}$; a demonstração é obtida simplesmente por uma verificação tediosa de diversos casos.

1.1.5. Proposição. *A ordem e as operações da reta estendida satisfazem as seguintes propriedades:*

- *a soma é associativa onde estiver bem-definida, i.e.,* $(a + b) + c = a + (b + c)$, *para todos* $a, b, c \in \overline{\mathbb{R}}$, *desde que ou* $a, b, c \neq +\infty$ *ou* $a, b, c \neq -\infty$;

- *a soma é comutativa onde estiver bem-definida, i.e.,* $a + b = b + a$*, para todos* $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$*, desde que ou* $a, b \neq +\infty$ *ou* $a, b \neq -\infty$*;*
- *o zero de* $\mathbb{R}$ *é o elemento neutro para a soma de* $\overline{\mathbb{R}}$*, i.e.,* $a + 0 = 0 + a = a$*, para todo* $a \in \overline{\mathbb{R}}$*;*
- *o produto é associativo, i.e.,* $(ab)c = a(bc)$*, para todos* $a, b, c \in \overline{\mathbb{R}}$*;*
- *o produto é comutativo, i.e.,* $ab = ba$*, para todos* $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$*;*
- *a unidade de* $\mathbb{R}$ *é o elemento neutro para o produto de* $\overline{\mathbb{R}}$*, i.e.,* $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$*, para todo* $a \in \overline{\mathbb{R}}$*;*
- *a soma é distributiva com relação ao produto, i.e.,* $(a+b)c = ac+bc$*, para todos* $a, b, c \in \overline{\mathbb{R}}$*, desde que as somas* $a + b$ *e* $ac + bc$ *estejam bem-definidas;*
- *a ordem é compatível com a soma, i.e., se* $a \leq b$ *então* $a+c \leq b+c$*, para todos* $a, b, c \in \overline{\mathbb{R}}$*, desde que as somas* $a + c$ *e* $b + c$ *estejam bem-definidas;*
- *a ordem é compatível com o produto, i.e., se* $a \leq b$ *então* $ac \leq bc$*, para todos* $a, b, c \in \overline{\mathbb{R}}$ *com* $c \geq 0$*.* □

Algumas observações importantes seguem. A identidade $a + (-a) = 0$ é válida *apenas para* $a \in \mathbb{R}$; os elementos $+\infty$ e $-\infty$ não possuem inverso com respeito à soma. Em particular, as implicações:

$$a + c = b + c \Longrightarrow a = b \quad \text{e} \quad a = b + c \Longrightarrow a - c = b$$

são válidas apenas quando $c \in \mathbb{R}$. A implicação:

$$a < b \Longrightarrow a + c < b + c$$

é também *apenas válida para* $c \in \mathbb{R}$ e a implicação:

$$a < b \Longrightarrow ac < bc$$

é válida *apenas para* $0 < c < +\infty$.

1.1.1. Limites de seqüências na reta estendida. Limites de seqüências em $\overline{\mathbb{R}}$ podem ser definidos através da introdução de uma topologia em $\overline{\mathbb{R}}$ (veja Exercício 1.8). Para o leitor não familiarizado com a noção de espaço topológico, definimos a noção de limite de seqüência em $\overline{\mathbb{R}}$ diretamente.

1.1.6. Definição. Seja $(a_k)_{k\geq 1}$ uma seqüência em $\overline{\mathbb{R}}$. Dizemos que $(a_k)_{k\geq 1}$ *converge* para um elemento $a \in \overline{\mathbb{R}}$ e escrevemos $a_k \to a$ se uma das situações abaixo ocorre:

- $a \in \mathbb{R}$ e para todo $\varepsilon > 0$ existe $k_0 \geq 1$ tal que $a_k \in \left]a - \varepsilon, a + \varepsilon\right[$ para todo $k \geq k_0$;
- $a = +\infty$ e para todo $M < +\infty$ existe $k_0 \geq 1$ tal que $a_k > M$ para todo $k \geq k_0$;
- $a = -\infty$ e para todo $M > -\infty$ existe $k_0 \geq 1$ tal que $a_k < M$ para todo $k \geq k_0$.

Quando existe $a \in \overline{I\!R}$ com $a_k \to a$ dizemos que a seqüência $(a_k)_{k\geq 1}$ é *convergente* em $\overline{I\!R}$. Nesse caso, é fácil mostrar que tal $a \in \overline{I\!R}$ é único e é chamado o *limite* da seqüência $(a_k)_{k\geq 1}$; denotâmo-lo por $\lim_{k\to\infty} a_k$.

Deixamos a demonstração do seguinte resultado simples a cargo do leitor.

1.1.7. LEMA. *Toda seqüência monótona em $\overline{I\!R}$ é convergente em $\overline{I\!R}$. Mais especificamente, se $(a_k)_{k\geq 1}$ é uma seqüência crescente (resp., decrescente) em $\overline{I\!R}$ então $\lim_{k\to\infty} a_k = \sup_{k\geq 1} a_k$ (resp., $\lim_{k\to\infty} a_k = \inf_{k\geq 1} a_k$).*

DEMONSTRAÇÃO. Veja Exercício 1.2. □

Enunciamos a seguir as propriedades operatórias dos limites na reta estendida:

1.1.8. LEMA. *Sejam $(a_k)_{k\geq 1}$, $(b_k)_{k\geq 1}$ seqüências convergentes em $\overline{I\!R}$, com $\lim_{k\to\infty} a_k = a$ e $\lim_{k\to\infty} b_k = b$. Então:*

- *se a soma $a + b$ estiver bem-definida então a soma $a_k + b_k$ está bem-definida para todo k suficientemente grande e:*

$$\lim_{k\to\infty} a_k + b_k = a + b;$$

- *se $\{|a|, |b|\} \neq \{0, +\infty\}$ então $\lim_{k\to\infty} a_k b_k = ab$.*

DEMONSTRAÇÃO. Veja Exercício 1.4. □

1.1.9. DEFINIÇÃO. Seja $(a_k)_{k\geq 1}$ uma seqüência em $\overline{I\!R}$. O *limite superior* e o *limite inferior* da seqüência $(a_k)_{k\geq 1}$, denotados respectivamente por $\limsup_{k\to\infty} a_k$ e $\liminf_{k\to\infty} a_k$, são definidos por:

$$\limsup_{k\to\infty} a_k = \inf_{k\geq 1} \sup_{r\geq k} a_r, \quad \liminf_{k\to\infty} a_k = \sup_{k\geq 1} \inf_{r\geq k} a_r.$$

Temos a seguinte:

1.1.10. PROPOSIÇÃO. *Seja $(a_k)_{k\geq 1}$ uma seqüência em $\overline{I\!R}$. Então:*

$$\liminf_{k\to\infty} a_k \leq \limsup_{k\to\infty} a_k,$$

sendo que a igualdade vale se e somente se a seqüência $(a_k)_{k\geq 1}$ é convergente; nesse caso:

$$\lim_{k\to\infty} a_k = \liminf_{k\to\infty} a_k = \limsup_{k\to\infty} a_k.$$

DEMONSTRAÇÃO. Veja Exercício 1.6 □

1.1.2. Somas infinitas em $[0, +\infty]$. Se $(a_i)_{i\in I}$ é uma família finita em $\overline{I\!R}$ então, já que a soma de $\overline{I\!R}$ é associativa e comutativa, podemos definir a soma $\sum_{i\in I} a_i$ de maneira óbvia, desde que $a_i \neq +\infty$ para todo $i \in I$ ou $a_i \neq -\infty$ para todo $i \in I$. Definiremos a seguir um significado para somas de famílias infinitas de elementos não negativos de $\overline{I\!R}$. É possível também definir somas de famílias que contenham elementos negativos de $\overline{I\!R}$, mas esse conceito não será necessário no momento.

1.1.11. DEFINIÇÃO. Seja $(a_i)_{i\in I}$ uma família arbitrária em $[0,+\infty]$. A *soma* $\sum_{i\in I} a_i$ é definida por:

$$\sum_{i\in I} a_i = \sup\Big\{\sum_{i\in F} a_i : F \subset I \text{ um subconjunto finito}\Big\}.$$

Se I é o conjunto dos inteiros positivos então denotamos a soma $\sum_{i\in I} a_i$ também por $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$; segue facilmente do Lema 1.1.7 que:

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i = \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{k} a_i.$$

Deixamos a demonstração do seguinte resultado a cargo do leitor.

1.1.12. PROPOSIÇÃO. *Somas de famílias em $[0,+\infty]$ satisfazem as seguintes propriedades:*

- *se $(a_i)_{i\in I}$ e $(b_i)_{i\in I}$ são famílias em $[0,+\infty]$ então:*
$$\sum_{i\in I}(a_i + b_i) = \sum_{i\in I} a_i + \sum_{i\in I} b_i;$$
- *se $(a_i)_{i\in I}$ é uma família em $[0,+\infty]$ e $c \in [0,+\infty]$ então*
$$\sum_{i\in I} c\, a_i = c \sum_{i\in I} a_i;$$
- *se $(a_i)_{i\in I}$ é uma família em $[0,+\infty]$ e se $\phi : I' \to I$ é uma função bijetora então:*
$$\sum_{i\in I'} a_{\phi(i)} = \sum_{i\in I} a_i;$$
- *se $(a_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ é uma família em $[0,+\infty]$ e se $(J_i)_{i\in I}$ é uma família de conjuntos dois a dois disjuntos com $\Lambda = \bigcup_{i\in I} J_i$ então:*
$$\sum_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda = \sum_{i\in I}\Big(\sum_{\lambda\in J_i} a_\lambda\Big).$$

DEMONSTRAÇÃO. Veja Exercício 1.7. □

A última propriedade no enunciado da Proposição 1.1.12 implica em particular que:

$$\sum_{i\in I}\Big(\sum_{j\in J} a_{ij}\Big) = \sum_{(i,j)\in I\times J} a_{ij} = \sum_{j\in J}\Big(\sum_{i\in I} a_{ij}\Big),$$

onde $(a_{ij})_{(i,j)\in I\times J}$ é uma família em $[0,+\infty]$. Basta tomar $\Lambda = I \times J$ e $J_i = \{i\} \times J$, para todo $i \in I$.

1.2. O Problema da Medida

1.2.1. Notação. Denotamos por $\wp(X)$ o conjuntos de todas as partes de um conjunto X, por $\mathbb{Q}$ o corpo ordenado dos números racionais e por $\mathbb{Z}$ o anel dos números inteiros.

Queremos investigar a existência de uma função $\mu : \wp(\mathbb{R}) \to [0, +\infty]$ satisfazendo as seguintes propriedades:

(a) dada uma seqüência $(A_n)_{n\geq 1}$ de subconjuntos de $\mathbb{R}$ dois a dois disjuntos então:

$$\mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n);$$

(b) $\mu(A + x) = \mu(A)$, para todo $A \subset \mathbb{R}$ e todo $x \in \mathbb{R}$, onde:

$$A + x = \big\{a + x : a \in A\big\}$$

denota a *translação* de A por x;

(c) $0 < \mu\big([0, 1]\big) < +\infty$.

Nosso objetivo é mostrar que tal função μ *não existe.* Antes disso, observamos algumas conseqüências simples das propriedades (a), (b) e (c) acima.

1.2.2. Lema. *Se uma função $\mu : \wp(\mathbb{R}) \to [0, +\infty]$ satisfaz as propriedades (a), (b) e (c) acima então ela também satisfaz as seguintes propriedades:*

(d) $\mu(\emptyset) = 0$;

(e) *dada uma coleção finita $(A_k)_{k=1}^n$ de subconjuntos de $\mathbb{R}$ dois a dois disjuntos então:*

$$\mu\Big(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\Big) = \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k);$$

(f) *se $A \subset B \subset \mathbb{R}$ então $\mu(A) \leq \mu(B)$;*

(g) *dados $a, b \in \mathbb{R}$ com $a \leq b$ então $\mu\big([a, b]\big) < +\infty$.*

Demonstração.

- *Prova de* (d).
  Tome $A_1 = [0, 1]$ e $A_n = \emptyset$ para $n \geq 2$ na propriedade (a) e use a propriedade (c).

- *Prova de* (e).
  Tome $A_k = \emptyset$ para $k > n$ e use as propriedades (a) e (d).

- *Prova de* (f).
  Basta observar que a propriedade (e) implica que:

$$\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A),$$

onde $\mu(B \setminus A) \geq 0$.

- *Prova de* (g).

  Seja n um inteiro positivo tal que $b < a + n$. As propriedades (e) e (f) implicam que:

$$\mu\big([a,b]\big) \le \mu\big(\,[a,a+n[\,\big) = \sum_{k=0}^{n-1} \mu\big(\,[a+k,a+k+1[\,\big)$$
$$\le \sum_{k=0}^{n-1} \mu\big([a+k,a+k+1]\big),$$

  e as propriedades (b) e (c) implicam que:

$$\mu\big([a+k,a+k+1]\big) = \mu\big([0,1]\big) < +\infty,$$

  para todo k. □

Finalmente, mostramos a seguinte:

1.2.3. Proposição. *Não existe uma função* $\mu : \wp(\mathbb{R}) \to [0,+\infty]$ *satisfazendo as propriedades (a), (b) e (c) acima.*

Demonstração. Pelo Lema 1.2.2, as propriedades (a), (b) e (c) implicam as propriedades (d), (e), (f) e (g). Considere a relação binária $\sim$ no intervalo $[0,1]$ definida por:

$$x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Q},$$

para todos $x, y \in [0,1]$. É fácil ver que $\sim$ é uma relação de equivalência em $[0,1]$. Seja $A \subset [0,1]$ um *conjunto escolha* para $\sim$, i.e., A possui exatamente um elemento de cada classe de equivalência. Temos então que $x - y \notin \mathbb{Q}$, para todos $x, y \in A$ com $x \ne y$. Em particular, os conjuntos $(A+q)_{q\in\mathbb{Q}}$ são dois a dois disjuntos. Note também que para todo $x \in [0,1]$ existe $y \in A$ com $x - y \in \mathbb{Q}$; na verdade, temos $x - y \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]$, já que $x, y \in [0,1]$. Segue então que:

$$[0,1] \subset \bigcup_{q\in\mathbb{Q}\cap[-1,1]} (A+q) \subset [-1,2].$$

Como $\mathbb{Q} \cap [-1,1]$ é enumerável, as propriedades (a), (b) e (f) implicam:

$$\mu\big([0,1]\big) \le \sum_{q\in\mathbb{Q}\cap[-1,1]} \mu(A+q) = \sum_{q\in\mathbb{Q}\cap[-1,1]} \mu(A) \le \mu\big([-1,2]\big).$$

Agora, se $\mu(A) = 0$ concluímos que $\mu\big([0,1]\big) = 0$, contradizendo (c); se $\mu(A) > 0$ concluímos que $\mu\big([-1,2]\big) = +\infty$, contradizendo (g). □

1.3. Volume de Blocos Retangulares

1.3.1. Definição. Um *bloco retangular n-dimensional* é um subconjunto B de $\mathbb{R}^n$ ($n \ge 1$) que é ou vazio, ou da forma:

$$B = \prod_{i=1}^{n} [a_i, b_i] = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n],$$

onde $a_i, b_i \in I\!R$, $a_i \le b_i$, para $i = 1, 2, \ldots, n$. O *volume* do bloco B acima é definido por:

$$|B| = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i) = (b_1 - a_1) \cdots (b_n - a_n),$$

e por $|B| = 0$, caso $B = \emptyset$.

Quando $n = 1$ então um bloco retangular n-dimensional B é simplesmente um intervalo fechado e limitado (possivelmente um conjunto unitário ou vazio) e o escalar $|B|$ será chamado também o *comprimento* de B. Quando $n = 2$, um bloco retangular n-dimensional B será chamado também um *retângulo* e o escalar $|B|$ será chamado também a *área* de B.

1.3.2. Definição. Dados $a, b \in I\!R$, $a < b$, então uma *partição* do intervalo $[a, b]$ é um subconjunto finito $P \subset [a, b]$ com $a, b \in P$; tipicamente escrevemos $P : a = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = b$ quando $P = \{t_0, t_1, \ldots, t_k\}$. Os *sub-intervalos* de $[a, b]$ determinados pela partição P são os intervalos $[t_i, t_{i+1}]$, $i = 0, \ldots, k-1$. Denotamos por $\overline{P}$ o conjunto dos sub-intervalos de $[a, b]$ deterninados por P, ou seja:

$$\overline{P} = \big\{[t_i, t_{i+1}]; i = 0, 1, \ldots, k-1\big\}.$$

Se $B = \prod_{i=1}^{n} [a_i, b_i]$ é um bloco retangular n-dimensional com $|B| > 0$ (ou seja, $a_i < b_i$, para $i = 1, \ldots, n$), então uma *partição* de B é uma n-upla $P = (P_1, \ldots, P_n)$, onde P_i é uma partição do intervalo $[a_i, b_i]$, para cada $i = 1, \ldots, n$. Os *sub-blocos* de B determinados pela partição P são os blocos retangulares n-dimensionais da forma $\prod_{r=1}^{n} I_r$, onde I_r é um sub-intervalo de $[a_r, b_r]$ determinado pela partição P_r, para $r = 1, \ldots, n$. Denotamos por $\overline{P}$ o conjunto dos sub-blocos de B determinados por P, ou seja:

$$\overline{P} = \big\{I_1 \times \cdots \times I_n : I_r \in \overline{P_r},\ r = 1, \ldots, n\big\}.$$

1.3.3. Lema. *Se $B = \prod_{i=1}^{n} [a_i, b_i]$ é um bloco retangular n-dimensional com $|B| > 0$ e se $P = (P_1, \ldots, P_n)$ é uma partição de B então:*

$$|B| = \sum_{\mathfrak{b} \in \overline{P}} |\mathfrak{b}|.$$

Demonstração. Usamos indução em n. O caso $n = 1$ é trivial. Suponha então que $n > 1$ e que o resultado é válido para blocos retangulares de dimensão menor que n. Sejam $B' = \prod_{i=1}^{n-1} [a_i, b_i]$ e $P' = (P_1, \ldots, P_{n-1})$, de modo que P' é uma partição do bloco retangular $(n-1)$-dimensional B'. Escrevendo $P_n : a_n = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = b_n$ temos:

$$|B| = |B'|(b_n - a_n) = \Big(\sum_{\mathfrak{b}' \in \overline{P'}} |\mathfrak{b}'|\Big)\Big(\sum_{i=0}^{k-1} (t_{i+1} - t_i)\Big) = \sum_{\substack{\mathfrak{b}' \in \overline{P'} \\ i=0,\ldots,k-1}} \big|\mathfrak{b}' \times [t_i, t_{i+1}]\big|.$$

A conclusão segue observando que os blocos $\mathfrak{b}' \times [t_i, t_{i+1}]$ com $\mathfrak{b}' \in \overline{P'}$ e $i = 0, \dots, k-1$ são precisamente os sub-blocos de B determinados pela partição P. □

1.3.4. Observação. Note que a interseção de dois blocos retangulares n-dimensionais é também um bloco retangular n-dimensional. Note também que se B e B' são blocos retangulares n-dimensionais com $B \subset B'$ então $|B| \le |B'|$.

1.3.5. Lema. *Sejam B, B_1, ..., B_t blocos retangulares n-dimensionais com $B \subset \bigcup_{r=1}^t B_r$. Então $|B| \le \sum_{r=1}^t |B_r|$.*

Demonstração. Em vista da Observação 1.3.4, substituindo cada bloco B_r por $B_r \cap B$ e descartando os índices r com $B_r \cap B = \emptyset$, podemos supor sem perda de generalidade que $B = \bigcup_{r=1}^t B_r$ e que $B_r \ne \emptyset$ para todo $r = 1, \dots, t$. Podemos supor também que $|B| > 0$, senão o resultado é trivial. Escreva então $B = \prod_{i=1}^n [a_i, b_i]$ com $a_i < b_i$, $i = 1, \dots, n$, e $B_r = \prod_{i=1}^n [a_i^r, b_i^r]$ com $a_i^r \le b_i^r$, $i = 1, \dots, n$. Para cada $i = 1, \dots, n$, o conjunto

$$P_i = \{a_i, b_i\} \cup \{a_i^r, b_i^r; r = 1, \dots, t\}$$

é uma partição do intervalo $[a_i, b_i]$ e portanto $P = (P_1, \dots, P_n)$ é uma partição do bloco B. Para cada $r = 1, \dots, t$ com $|B_r| > 0$, tomamos $P_i^r = P_i \cap [a_i^r, b_i^r]$, $i = 1, \dots, n$ e $P^r = (P_1^r, \dots, P_n^r)$, de modo que P^r é uma partição do bloco B_r. Temos que se $\mathfrak{b} = \prod_{i=1}^n [\alpha_i, \beta_i]$ é um sub-bloco de B determinado pela partição P então existe um índice $r = 1, \dots, t$ tal que $|B_r| > 0$ e $\mathfrak{b}$ é um sub-bloco de B_r determinado pela partiação P^r. De fato, como $B = \bigcup_{r=1}^t B_r$ então $\prod_{i=1}^n]\alpha_i, \beta_i[$ intercepta B_r, para algum $r = 1, \dots, t$ tal que[1] $|B_r| > 0$. Daí é fácil ver que $[\alpha_i, \beta_i]$ é um sub-intervalo de $[a_i^r, b_i^r]$ determinado pela partição P_i^r para $i = 1, \dots, n$ e portanto $\mathfrak{b}$ é um sub-bloco de B_r determinado pela partição P^r. Mostramos então que:

$$\overline{P} \subset \bigcup_{\substack{r=1,\dots,t \\ |B_r|>0}} \overline{P^r}.$$

A conclusão segue agora do Lema 1.3.3 observando que:

$$|B| = \sum_{\mathfrak{b} \in \overline{P}} |\mathfrak{b}| \le \sum_{\substack{r=1,\dots,t \\ |B_r|>0}} \sum_{\mathfrak{b} \in \overline{P^r}} |\mathfrak{b}| = \sum_{r=1}^t |B_r|. \qquad \square$$

1.4. Medida de Lebesgue em $I\!R^n$

1.4.1. Definição. Seja $A \subset I\!R^n$ um subconjunto arbitrário. A *medida exterior de Lebesgue* de A, denotada por $\mathfrak{m}^*(A)$, é definida como sendo o ínfimo do conjunto de todas as somas da forma $\sum_{k=1}^\infty |B_k|$, onde $(B_k)_{k \ge 1}$

[1]Os blocos de volume zero são conjuntos fechados de interior vazio e portanto a união de um número finito deles também tem interior vazio. Assim, o aberto não vazio $\prod_{i=1}^n]\alpha_i, \beta_i[$ não pode estar contido na união dos blocos B_r de volume zero.

é uma seqüência de blocos retangulares n-dimensionais com $A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$; em símbolos:

$$\mathfrak{m}^*(A) = \inf \mathcal{C}(A),$$

onde:

(1.4.1)

$$\mathcal{C}(A) = \Big\{ \sum_{k=1}^{\infty} |B_k| : A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k,\ B_k \text{ bloco retangular } n\text{-dimensional,} \\ \text{para todo } k \geq 1 \Big\}.$$

Note que é sempre possível cobrir um subconjunto A de $I\!R^n$ com uma coleção enumerável de blocos retangulares n-dimensionais (i.e., $\mathcal{C}(A) \neq \emptyset$), já que, por exemplo, $I\!R^n = \bigcup_{k=1}^{\infty} [-k, k]^n$. Obviamente temos $\mathfrak{m}^*(A) \in [0, +\infty]$, para todo $A \subset I\!R^n$.

1.4.2. Observação. Todo subconjunto limitado de $I\!R^n$ possui medida exterior finita. De fato, se $A \subset I\!R^n$ é limitado então existe um bloco retangular n-dimensional B contendo A. Tomando $B_1 = B$ e $B_k = \emptyset$ para $k \geq 2$, temos $A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$ e portanto $\mathfrak{m}^*(A) \leq \sum_{k=1}^{\infty} |B_k| = |B| < +\infty$. Veremos logo adiante (Corolários 1.4.6 e 1.4.7) que a recíproca dessa afirmação não é verdadeira, i.e., subconjuntos de $I\!R^n$ com medida exterior finita não precisam ser limitados.

1.4.3. Lema. *Se $B \subset I\!R^n$ é um bloco retangular n-dimensional então:*

$$\mathfrak{m}^*(B) = |B|,$$

ou seja, a medida exterior de um bloco retangular n-dimensional coincide com seu volume.

Demonstração. Tomando $B_1 = B$ e $B_k = \emptyset$ para $k \geq 2$, obtemos uma cobertura $(B_k)_{k\geq 1}$ de B por blocos retangulares com $\sum_{k=1}^{\infty} |B_k| = |B|$; isso mostra que $\mathfrak{m}^*(B) \leq |B|$. Para mostrar a desigualdade oposta, devemos escolher uma cobertura arbitrária $B \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$ de B por blocos retangulares B_k e mostrar que $|B| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |B_k|$. Seja dado $\varepsilon > 0$ e seja para cada $k \geq 1$, B'_k um bloco retangular n-dimensional que contém B_k no seu interior e tal que $|B'_k| \leq |B_k| + \frac{\varepsilon}{2^k}$. Os interiores dos blocos B'_k, $k \geq 1$, constituem então uma cobertura aberta do compacto B e dessa cobertura aberta podemos extrair uma subcobertura finita; existe portanto $t \geq 1$ tal que $B \subset \bigcup_{k=1}^{t} B'_k$. Usando o Lema 1.3.5 obtemos:

$$|B| \leq \sum_{k=1}^{t} |B'_k| \leq \sum_{k=1}^{t} \Big(|B_k| + \frac{\varepsilon}{2^k} \Big) \leq \Big(\sum_{k=1}^{\infty} |B_k| \Big) + \varepsilon.$$

Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, a conclusão segue. $\square$

1.4.4. Lema. *Se $A_1 \subset A_2 \subset I\!R^n$ então $\mathfrak{m}^*(A_1) \leq \mathfrak{m}^*(A_2)$.*

Demonstração. Basta observar que $\mathcal{C}(A_2) \subset \mathcal{C}(A_1)$ (recorde (1.4.1)). $\square$

1.4.5. LEMA. *Se $A_1, \ldots, A_t$ são subconjuntos de $I\!R^n$ então:*

$$\mathfrak{m}^*\Big(\bigcup_{k=1}^{t} A_k\Big) \le \sum_{k=1}^{t} \mathfrak{m}^*(A_k).$$

Além do mais, se $(A_k)_{k\ge1}$ é uma seqüência de subconjuntos de $I\!R^n$ então:

$$\mathfrak{m}^*\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big) \le \sum_{k=1}^{\infty} \mathfrak{m}^*(A_k).$$

DEMONSTRAÇÃO. Como $\mathfrak{m}^*(\emptyset) = 0$, tomando $A_k = \emptyset$ para $k > t$, podemos considerar apenas o caso de uma seqüência infinita de subconjuntos de $I\!R^n$. Seja dado $\varepsilon > 0$. Para cada $k \ge 1$ existe uma cobertura $A_k \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} B_k^j$ de A_k por blocos retangulares n-dimensionais B_k^j de modo que:

$$\sum_{j=1}^{\infty} |B_k^j| \le \mathfrak{m}^*(A_k) + \frac{\varepsilon}{2^k}.$$

Daí $(B_k^j)_{k,j\ge1}$ é uma cobertura enumerável do conjunto $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ por blocos retangulares n-dimensionais e portanto:

$$\mathfrak{m}^*\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big) \le \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} |B_k^j| \le \sum_{k=1}^{\infty}\Big(\mathfrak{m}^*(A_k) + \frac{\varepsilon}{2^k}\Big) = \Big(\sum_{k=1}^{\infty} \mathfrak{m}^*(A_k)\Big) + \varepsilon.$$

Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, a conclusão segue. □

1.4.6. COROLÁRIO. *A união de uma coleção enumerável de conjuntos de medida exterior nula tem medida exterior nula. Em particular, todo conjunto enumerável tem medida exterior nula.* □

1.4.7. COROLÁRIO. *Dado $i = 1, \ldots, n$ e $c \in I\!R$ então todo subconjunto do hiperplano afim $\big\{x = (x_1, \ldots, x_n) \in I\!R^n : x_i = c\big\}$ tem medida exterior nula.*

DEMONSTRAÇÃO. Basta observar que $\big\{x \in I\!R^n : x_i = c\big\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$, onde:

$$B_k = \big\{x \in I\!R^n : x_i = c \text{ e } |x_j| \le k,\ j = 1, \ldots, n,\ j \ne i\big\}$$

é um bloco retangular n-dimensional de volume zero. □

1.4.8. COROLÁRIO. *Todo subconjunto da fronteira de um bloco retangular n-dimensional tem medida exterior nula.*

DEMONSTRAÇÃO. Basta observar que a fronteira de um bloco retangular n-dimensional é uma união finita de blocos retangulares n-dimensionais de volume zero. □

1.4.9. COROLÁRIO. *Sejam $A_1, A_2 \subset I\!R^n$ tais que $\mathfrak{m}^*(A_1) < +\infty$ ou $\mathfrak{m}^*(A_2) < +\infty$; então:*

$$\mathfrak{m}^*(A_1) - \mathfrak{m}^*(A_2) \le \mathfrak{m}^*(A_1 \setminus A_2). \tag{1.4.2}$$

Demonstração. Como $A_1 \subset (A_1 \setminus A_2) \cup A_2$, os Lemas 1.4.4 e 1.4.5 implicam que:

$$\mathfrak{m}^*(A_1) \le \mathfrak{m}^*(A_1 \setminus A_2) + \mathfrak{m}^*(A_2). \tag{1.4.3}$$

Se $\mathfrak{m}^*(A_2) = +\infty$ e $\mathfrak{m}^*(A_1) < +\infty$, a desigualdade (1.4.2) é trivial; se $\mathfrak{m}^*(A_2) < +\infty$, ela segue de (1.4.3). $\square$

1.4.10. Lema. *A medida exterior é* invariante por translação*, i.e., dados um subconjunto A de $I\!R^n$ e $x \in I\!R^n$ então:*

$$\mathfrak{m}^*(A + x) = \mathfrak{m}^*(A),$$

onde $A + x = \big\{a + x : a \in A\big\}$ denota a translação *de A por x.*

Demonstração. É fácil ver que se B é um bloco retangular n-dimensional então $B + x$ também é um bloco retangular n-dimensional e:

$$|B + x| = |B|;$$

em particular, se $A \subset \bigcup_{k=1}^\infty B_k$ é uma cobertura de A por blocos retangulares n-dimensionais então $A + x \subset \bigcup_{k=1}^\infty (B_k + x)$ é uma cobertura de $A + x$ por blocos retangulares n-dimensionais e $\sum_{k=1}^\infty |B_k + x| = \sum_{k=1}^\infty |B_k|$. Isso mostra que $\mathcal{C}(A) \subset \mathcal{C}(A + x)$ (recorde (1.4.1)). Como $A = (A + x) + (-x)$, o mesmo argumento mostra que $\mathcal{C}(A + x) \subset \mathcal{C}(A)$; logo:

$$\mathfrak{m}^*(A) = \inf \mathcal{C}(A) = \inf \mathcal{C}(A + x) = \mathfrak{m}^*(A + x). \qquad \square$$

1.4.11. Notação. Dado um subconjunto $A \subset I\!R^n$, denotamos por $\overset{\circ}{A}$ ou por $\mathrm{int}(A)$ o interior do conjunto A.

1.4.12. Lema. *Dados $A \subset I\!R^n$ e $\varepsilon > 0$ então existe um aberto $U \subset I\!R^n$ com $A \subset U$ e $\mathfrak{m}^*(U) \le \mathfrak{m}^*(A) + \varepsilon$.*

Demonstração. Seja $A \subset \bigcup_{k=1}^\infty B_k$ uma cobertura de A por blocos retangulares n-dimensionais tal que $\sum_{k=1}^\infty |B_k| \le \mathfrak{m}^*(A) + \frac{\varepsilon}{2}$. Para cada $k \ge 1$, seja B'_k um bloco retangular que contém B_k no seu interior e tal que $|B'_k| \le |B_k| + \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}$. Seja $U = \bigcup_{k=1}^\infty \mathrm{int}(B'_k)$. Temos que U é aberto e $U \supset A$; além do mais, usando os Lemas 1.4.4 e 1.4.5 obtemos:

$$\begin{aligned}\mathfrak{m}^*(U) \le \mathfrak{m}^*\Big(\bigcup_{k=1}^\infty B'_k\Big) \le \sum_{k=1}^\infty \mathfrak{m}^*(B'_k) = \sum_{k=1}^\infty |B'_k| \le \sum_{k=1}^\infty \Big(|B_k| + \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}\Big) \\ = \Big(\sum_{k=1}^\infty |B_k|\Big) + \frac{\varepsilon}{2} \le \mathfrak{m}^*(A) + \varepsilon. \quad \square\end{aligned}$$

Note que *não podemos* concluir do Lema 1.4.12 que $\mathfrak{m}^*(U \setminus A) \le \varepsilon$, nem mesmo se $\mathfrak{m}^*(A) < +\infty$; quando A tem medida exterior finita, o Corolário 1.4.9 nos garante que $\mathfrak{m}^*(U) - \mathfrak{m}^*(A) \le \mathfrak{m}^*(U \setminus A)$, mas veremos adiante que é possível que a desigualdade estrita ocorra.

1.4.13. Definição. Um subconjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ é dito (*Lebesgue*) *mensurável* se para todo $\varepsilon > 0$, existe um aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ contendo A tal que $\mathfrak{m}^*(U \setminus A) < \varepsilon$.

1.4.14. Observação. Obviamente, todo aberto em $\mathbb{R}^n$ é mensurável; de fato, se $A \subset \mathbb{R}^n$ é aberto, podemos tomar $U = A$ na Definição 1.4.13, para todo $\varepsilon > 0$.

1.4.15. Lema. *A união de uma coleção enumerável de subconjuntos mensuráveis de $\mathbb{R}^n$ é mensurável.*

Demonstração. Seja $(A_k)_{k\geq 1}$ uma seqüência de subconjuntos mensuráveis de $\mathbb{R}^n$. Dado $\varepsilon > 0$ então, para cada $k \geq 1$, podemos encontrar um aberto U_k contendo A_k tal que $\mathfrak{m}^*(U_k \setminus A_k) < \frac{\varepsilon}{2^k}$. Tomando $U = \bigcup_{k=1}^{\infty} U_k$ então U é aberto, U contém $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ e:

$$\mathfrak{m}^*(U \setminus A) \leq \mathfrak{m}^*\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty}(U_k \setminus A_k)\Big) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mathfrak{m}^*(U_k \setminus A_k) < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon. \qquad \square$$

1.4.16. Lema. *Todo subconjunto de $\mathbb{R}^n$ com medida exterior nula é mensurável.*

Demonstração. Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ com $\mathfrak{m}^*(A) = 0$. Dado $\varepsilon > 0$ então, pelo Lema 1.4.12, existe um aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ contendo A tal que $\mathfrak{m}^*(U) \leq \varepsilon$. Concluímos então que:

$$\mathfrak{m}^*(U \setminus A) \leq \mathfrak{m}^*(U) \leq \varepsilon. \qquad \square$$

1.4.17. Notação. No que segue, $d(x, y)$ denota a *distância Euclideana* entre os pontos $x, y \in \mathbb{R}^n$, i.e., $d(x, y) = \big(\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2\big)^{\frac{1}{2}}$. Dados $x \in \mathbb{R}^n$ e um subconjunto não vazio $A \subset \mathbb{R}^n$ denotamos por $d(x, A)$ a *distância entre x e A* definida por:

$$d(x, A) = \inf\big\{d(x, y) : y \in A\big\},$$

e dados subconjuntos não vazios $A, B \subset \mathbb{R}^n$ denotamos por $d(A, B)$ a *distância entre os conjuntos A e B* definida por:

$$d(A, B) = \inf\big\{d(x, y) : x \in A,\ y \in B\big\}.$$

1.4.18. Lema. *Dados subconjuntos $A_1, A_2 \subset \mathbb{R}^n$ com $d(A_1, A_2) > 0$ então $\mathfrak{m}^*(A_1 \cup A_2) = \mathfrak{m}^*(A_1) + \mathfrak{m}^*(A_2)$.*

Demonstração. Em vista do Lema 1.4.5 é suficiente mostrar a desigualdade:

$$\mathfrak{m}^*(A_1 \cup A_2) \geq \mathfrak{m}^*(A_1) + \mathfrak{m}^*(A_2).$$

Para isso, seja $A_1 \cup A_2 \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$ uma cobertura de $A_1 \cup A_2$ por blocos retangulares n-dimensionais B_k e vamos mostrar que:

$$\mathfrak{m}^*(A_1) + \mathfrak{m}^*(A_2) \leq \sum_{k=1}^{\infty} |B_k|. \tag{1.4.4}$$

Como $d(A_1, A_2) > 0$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $d(x, y) \geq \varepsilon$, para todos $x \in A_1$, $y \in A_2$. Para cada $k \geq 1$ com $|B_k| > 0$, podemos escolher uma partição P_k de B_k de modo que os sub-blocos de B_k determinados por P_k tenham todos diâmetro menor do que ε. Seja $\overline{P_k^1}$ (respectivamente, $\overline{P_k^2}$) o conjunto dos sub-blocos de B_k determinados por P_k que interceptam A_1 (respectivamente, interceptam A_2). Um bloco de diâmetro menor do que ε não pode interceptar ambos os conjuntos A_1 e A_2 e portanto $\overline{P_k^1}$ e $\overline{P_k^2}$ são subconjuntos disjuntos de $\overline{P_k}$. Segue do Lema 1.3.3 que:

$$\sum_{\mathfrak{b} \in \overline{P_k^1}} |\mathfrak{b}| + \sum_{\mathfrak{b} \in \overline{P_k^2}} |\mathfrak{b}| \leq |B_k|. \tag{1.4.5}$$

Como $A_1 \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$, temos que a coleção formada pelos blocos B_k com $|B_k| = 0$ e pelos blocos pertencentes a $\overline{P_k^1}$ para algum k com $|B_k| > 0$ constitui uma cobertura enumerável de A_1 por blocos retangulares n-dimensionais; logo:

$$\mathfrak{m}^*(A_1) \leq \sum_{\substack{k \geq 1 \\ |B_k| > 0}} \sum_{\mathfrak{b} \in \overline{P_k^1}} |\mathfrak{b}|. \tag{1.4.6}$$

Similarmente:

$$\mathfrak{m}^*(A_2) \leq \sum_{\substack{k \geq 1 \\ |B_k| > 0}} \sum_{\mathfrak{b} \in \overline{P_k^2}} |\mathfrak{b}|. \tag{1.4.7}$$

Somando as desigualdades (1.4.6) e (1.4.7) e usando (1.4.5) obtemos (1.4.4), o que completa a demonstração. □

1.4.19. COROLÁRIO. *Se $K_1, \ldots, K_t$ são subconjuntos compactos dois a dois disjuntos de $I\!R^n$ então* $\mathfrak{m}^*\big(\bigcup_{i=1}^t K_i\big) = \sum_{i=1}^t \mathfrak{m}^*(K_i)$.

DEMONSTRAÇÃO. O caso $t = 2$ segue do Lema 1.4.18, observando que a distância entre compactos disjuntos é positiva. O caso geral segue por indução. □

1.4.20. COROLÁRIO. *Se $B_1, \ldots, B_t$ são blocos retangulares n-dimensionais com interiores dois a dois disjuntos então* $\mathfrak{m}^*\big(\bigcup_{r=1}^t B_r\big) = \sum_{r=1}^t |B_r|$.

DEMONSTRAÇÃO. Dado $\varepsilon > 0$, podemos para cada $r = 1, \ldots, t$ encontrar um bloco retangular n-dimensional B_r' contido no interior de B_r e satisfazendo $|B_r'| \geq (1 - \varepsilon)|B_r|$ (note que no caso $|B_r| = 0$ podemos tomar $B_r' = \emptyset$). Os blocos B_r', $r = 1, \ldots, t$ são subconjuntos compactos dois a dois disjuntos de $I\!R^n$ e portanto o Corolário 1.4.19 nos dá:

$$\mathfrak{m}^*\Big(\bigcup_{r=1}^t B_r\Big) \geq \mathfrak{m}^*\Big(\bigcup_{r=1}^t B_r'\Big) = \sum_{r=1}^t \mathfrak{m}^*(B_r') = \sum_{r=1}^t |B_r'| \geq (1 - \varepsilon) \sum_{r=1}^t |B_r|.$$

Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, concluímos que:

$$\mathfrak{m}^*\Big(\bigcup_{r=1}^{t} B_r\Big) \geq \sum_{r=1}^{t} |B_r|.$$

A desigualdade oposta segue do Lema 1.4.5. □

1.4.21. Corolário. *Se $(B_r)_{r\geq 1}$ é uma seqüência de blocos retangulares n-dimensionais com interiores dois a dois disjuntos então:*

$$\mathfrak{m}^*\Big(\bigcup_{r=1}^{\infty} B_r\Big) = \sum_{r=1}^{\infty} |B_r|.$$

Demonstração. O Corolário 1.4.20 nos dá:

$$\mathfrak{m}^*\Big(\bigcup_{r=1}^{\infty} B_r\Big) \geq \mathfrak{m}^*\Big(\bigcup_{r=1}^{t} B_r\Big) = \sum_{r=1}^{t} |B_r|,$$

para todo $t \geq 1$. Fazendo $t \to \infty$ obtemos:

$$\mathfrak{m}^*\Big(\bigcup_{r=1}^{\infty} B_r\Big) \geq \sum_{r=1}^{\infty} |B_r|.$$

A desigualdade oposta segue do Lema 1.4.5. □

1.4.22. Definição. Um *cubo n-dimensional* é um bloco retangular n-dimensional não vazio $B = \prod_{i=1}^{n} [a_i, b_i]$ tal que:

$$b_1 - a_1 = b_2 - a_2 = \cdots = b_n - a_n;$$

o valor comum aos escalares $b_i - a_i$ é chamado a *aresta* de B.

1.4.23. Lema. *Se $U \subset I\!R^n$ é um aberto então existe um conjunto enumerável $\mathcal{R}$ de cubos n-dimensionais com interiores dois a dois disjuntos tal que $U = \bigcup_{B\in\mathcal{R}} B$. Em particular, U é igual à união de uma coleção enumerável de blocos retangulares n-dimensionais com interiores dois a dois disjuntos.*

Demonstração. Para cada $k \geq 1$ seja $\mathcal{R}_k$ o conjunto de todos os cubos n-dimensionais de aresta $\frac{1}{2^k}$ e com vértices em pontos de $I\!R^n$ cujas coordenadas são múltiplos inteiros de $\frac{1}{2^k}$; mais precisamente:

$$\mathcal{R}_k = \Big\{ \big[\tfrac{a_1}{2^k}, \tfrac{a_1+1}{2^k}\big] \times \cdots \times \big[\tfrac{a_n}{2^k}, \tfrac{a_n+1}{2^k}\big] : a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Z} \Big\}.$$

Cada $\mathcal{R}_k$ é portanto um conjunto enumerável de cubos n-dimensionais. As seguintes propriedades são de fácil verificação:

(a) os cubos pertencentes a $\mathcal{R}_k$ possuem interiores dois a dois disjuntos, para todo $k \geq 1$;
(b) $I\!R^n = \bigcup_{B\in\mathcal{R}_k} B$, para todo $k \geq 1$;
(c) dados $k, l \geq 1$ com $k \geq l$ então todo cubo pertencente a $\mathcal{R}_k$ está contido em algum cubo pertencente a $\mathcal{R}_l$;
(d) todo cubo pertencente a $\mathcal{R}_k$ tem diâmetro igual a $\frac{\sqrt{n}}{2^k}$.

Construiremos agora indutivamente uma seqüência $(\mathcal{R}'_k)_{k\geq 1}$ onde cada $\mathcal{R}'_k$ é um subconjunto de $\mathcal{R}_k$. Seja $\mathcal{R}'_1$ o conjunto dos cubos $B \in \mathcal{R}_1$ tais que $B \subset U$. Supondo $\mathcal{R}'_i$ construído para $i = 1, \ldots, k$, seja $\mathcal{R}'_{k+1}$ o conjunto dos cubos $B \in \mathcal{R}_{k+1}$ que estão contidos em U e que tem interior disjunto do interior de todos os cubos pertencentes a $\bigcup_{i=1}^{k} \mathcal{R}'_i$. Tome $\mathcal{R} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{R}'_k$. Como cada $\mathcal{R}_k$ é enumerável, segue que $\mathcal{R}$ é enumerável. Afirmamos que os cubos pertencentes a $\mathcal{R}$ possuem interiores dois a dois disjuntos. De fato, sejam $B_1, B_2 \in \mathcal{R}$ cubos distintos, digamos $B_1 \in \mathcal{R}'_k$ e $B_2 \in \mathcal{R}'_l$ com $k \geq l$. Se $k > l$ então, por construção, o interior de B_1 é disjunto do interior de qualquer cubo pertencente a $\bigcup_{i=1}^{k-1} \mathcal{R}'_i$; em particular, o interior de B_1 é disjunto do interior de B_2. Se $k = l$, segue da propriedade (a) acima que os cubos B_1 e B_2 possuem interiores disjuntos. Para terminar a demonstração, verifiquemos que $U = \bigcup_{B\in\mathcal{R}} B$. Obviamente temos $\bigcup_{B\in\mathcal{R}} B \subset U$. Seja $x \in U$. Como U é aberto, existe $k \geq 1$ tal que a bola fechada de centro x e raio $\frac{\sqrt{n}}{2^k}$ está contida em U. Em vista das propriedades (b) e (d) acima, vemos que existe $B \in \mathcal{R}_k$ com $x \in B$ e, além disso, $B \subset U$. Se $B \in \mathcal{R}'_k$ então $x \in B \in \mathcal{R}$; caso contrário, existem $l < k$ e um cubo $B_1 \in \mathcal{R}'_l$ tal que os interiores de B e B_1 se interceptam. Em vista da propriedade (c), existe um cubo $B_2 \in \mathcal{R}_l$ contendo B. Daí $B_1, B_2 \in \mathcal{R}_l$ e os interiores de B_1 e B_2 se interceptam; a propriedade (a) implica então que $B_1 = B_2$ e portanto $x \in B \subset B_2 = B_1 \in \mathcal{R}$. Em qualquer caso, mostramos que $x \in \bigcup_{B\in\mathcal{R}} B$, o que completa a demonstração. $\square$

1.4.24. LEMA. *Todo subconjunto compacto de $I\!R^n$ é mensurável.*

DEMONSTRAÇÃO. Seja $K \subset I\!R^n$ um subconjunto compacto e seja dado $\varepsilon > 0$. Pelo Lema 1.4.12 existe um aberto $U \supset K$ tal que $\mathfrak{m}^*(U) \leq \mathfrak{m}^*(K)+\varepsilon$. Vamos mostrar que $\mathfrak{m}^*(U\backslash K) \leq \varepsilon$. Pelo Lema 1.4.23, o aberto $U\backslash K$ pode ser escrito como uma união enumerável $U\backslash K = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$ de blocos retangulares n-dimensionais com interiores dois a dois disjuntos. Para cada $t \geq 1$ os conjuntos K e $\bigcup_{k=1}^{t} B_k$ são compactos e disjuntos; os Corolários 1.4.19 e 1.4.20 implicam então que:

$$\mathfrak{m}^*(K) + \sum_{k=1}^{t} |B_k| = \mathfrak{m}^*(K) + \mathfrak{m}^*\Big(\bigcup_{k=1}^{t} B_k\Big) = \mathfrak{m}^*\Big(K \cup \bigcup_{k=1}^{t} B_k\Big) \leq \mathfrak{m}^*(U).$$

Como K é limitado, a Observação 1.4.2 nos diz que $\mathfrak{m}^*(K) < +\infty$ e portanto a desigualdade acima implica que:

$$\sum_{k=1}^{t} |B_k| \leq \mathfrak{m}^*(U) - \mathfrak{m}^*(K) \leq \varepsilon.$$

Como $t \geq 1$ é arbitrário, concluímos que $\sum_{k=1}^{\infty} |B_k| \leq \varepsilon$ e, finalmente, o Corolário 1.4.21 nos dá $\mathfrak{m}^*(U \setminus K) \leq \varepsilon$. $\square$

1.4.25. COROLÁRIO. *Todo subconjunto fechado de $I\!R^n$ é mensurável.*

Demonstração. Se $F \subset \mathbb{R}^n$ é fechado então $F = \bigcup_{k=1}^{\infty} \big(F \cap [-k,k]^n\big)$ é uma união enumerável de compactos. A conclusão segue do Lema 1.4.15. $\square$

1.4.26. Definição. Um subconjunto de $\mathbb{R}^n$ é dito *de tipo G_δ* (ou, simplesmente, um *conjunto G_δ*) se pode ser escrito como uma interseção de uma coleção enumerável de abertos de $\mathbb{R}^n$. Similarmente, um subconjunto de $\mathbb{R}^n$ é dito *de tipo F_σ* (ou, simplesmente, um *conjunto F_σ*) se pode ser escrito como uma união de uma coleção enumerável de fechados de $\mathbb{R}^n$.

Obviamente o complementar de um conjunto de tipo G_δ é de tipo F_σ (e vice-versa).

1.4.27. Corolário. *Todo subconjunto de $\mathbb{R}^n$ de tipo F_σ é mensurável.*

Demonstração. Segue do Corolário 1.4.25 e do Lema 1.4.15. $\square$

1.4.28. Lema. *Se $A \subset \mathbb{R}^n$ é mensurável então existe um subconjunto Z de $\mathbb{R}^n$ de tipo G_δ tal que $A \subset Z$ e $\mathfrak{m}^*(Z \setminus A) = 0$.*

Demonstração. Para todo $k \geq 1$ existe um aberto $U_k \subset \mathbb{R}^n$ contendo A tal que $\mathfrak{m}^*(U_k \setminus A) < \frac{1}{k}$. Daí o conjunto $Z = \bigcap_{k=1}^{\infty} U_k$ é um G_δ que contém A e:

$$\mathfrak{m}^*(Z \setminus A) \leq \mathfrak{m}^*(U_k \setminus A) < \frac{1}{k},$$

para todo $k \geq 1$. Logo $\mathfrak{m}^*(Z \setminus A) = 0$. $\square$

1.4.29. Corolário. *O complementar de um subconjunto mensurável de $\mathbb{R}^n$ também é mensurável.*

Demonstração. Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto mensurável. Pelo Lema 1.4.28 existe um conjunto Z de tipo G_δ contendo A tal que $\mathfrak{m}^*(Z \setminus A) = 0$. Daí $Z^c \subset A^c$ e $A^c \setminus Z^c = Z \setminus A$; logo:

$$A^c = Z^c \cup (Z \setminus A).$$

O conjunto Z^c é de tipo F_σ e portanto mensurável, pelo Corolário 1.4.27. A conclusão segue dos Lemas 1.4.15 e 1.4.16. $\square$

1.4.30. Corolário. *Se $A \subset \mathbb{R}^n$ é mensurável então para todo $\varepsilon > 0$ existe um subconjunto fechado $F \subset \mathbb{R}^n$ contido em A tal que $\mathfrak{m}^*(A \setminus F) < \varepsilon$.*

Demonstração. Pelo Corolário 1.4.29, A^c é mensurável e portanto existe um aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ contendo A^c tal que $\mathfrak{m}^*(U \setminus A^c) < \varepsilon$. Tomando $F = U^c$ então F é fechado e $F \subset A$. Como $A \setminus F = U \setminus A^c$, segue que $\mathfrak{m}^*(A \setminus F) < \varepsilon$. $\square$

1.4.31. Corolário. *Se $A \subset \mathbb{R}^n$ é mensurável então existe um subconjunto W de $\mathbb{R}^n$ de tipo F_σ tal que $W \subset A$ e $\mathfrak{m}^*(A \setminus W) = 0$.*

Demonstração. Pelo Corolário 1.4.29, A^c também é mensurável e portanto, pelo Lema 1.4.28 existe um subconjunto Z de $\mathbb{R}^n$ de tipo G_δ tal que $A^c \subset Z$ e $\mathfrak{m}^*(Z \setminus A^c) = 0$. Tomando $W = Z^c$ então W é de tipo F_σ e $W \subset A$. Como $A \setminus W = Z \setminus A^c$, segue que $\mathfrak{m}^*(A \setminus W) = 0$. $\square$

1.4.32. Definição. Seja X um conjunto arbitrário. Uma *álgebra* de partes de X é um subconjunto não vazio $\mathcal{A} \subset \wp(X)$ tal que:

- se $A, B \in \mathcal{A}$ então $A \cup B \in \mathcal{A}$;
- se $A \in \mathcal{A}$ então $A^c \in \mathcal{A}$.

Uma *σ-álgebra* de partes de X é um subconjunto não vazio $\mathcal{A} \subset \wp(X)$ tal que:

- se $(A_k)_{k \ge 1}$ é uma seqüência de elementos de $\mathcal{A}$ então $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{A}$;
- se $A \in \mathcal{A}$ então $A^c \in \mathcal{A}$.

Note que toda σ-álgebra é também uma álgebra. De fato, se $\mathcal{A}$ é uma σ-álgebra de partes de X e se $A, B \in \mathcal{A}$, podemos tomar $A_1 = A$ e $A_k = B$ para $k \ge 2$; daí $A \cup B = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{A}$.

1.4.33. Observação. Se $\mathcal{A}$ é uma álgebra (em particular, se $\mathcal{A}$ é uma σ-álgebra) de partes de X então $X \in \mathcal{A}$ e $\emptyset \in \mathcal{A}$. De fato, como $\mathcal{A} \ne \emptyset$, existe algum elemento $A \in \mathcal{A}$. Daí $A^c \in \mathcal{A}$ e portanto $X = A \cup A^c \in \mathcal{A}$; além do mais, $\emptyset = X^c \in \mathcal{A}$.

1.4.34. Teorema. *A coleção de todos os subconjuntos mensuráveis de $\mathbb{R}^n$ é uma σ-álgebra de partes de $\mathbb{R}^n$ que contém todos os subconjuntos abertos de $\mathbb{R}^n$ e todos os subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ com medida exterior nula.*

Demonstração. Segue da Observação 1.4.14, dos Lemas 1.4.15 e 1.4.16 e do Corolário 1.4.29. □

1.4.35. Definição. Se X é um conjunto arbitrário e se $\mathcal{C} \subset \wp(X)$ é uma coleção arbitrária de partes de X então a *σ-álgebra de partes de X gerada por $\mathcal{C}$*, denotada por $\sigma[\mathcal{C}]$, é a menor σ-álgebra de partes de X que contém $\mathcal{C}$, i.e., $\sigma[\mathcal{C}]$ é uma σ-álgebra de partes de X tal que:

(1) $\mathcal{C} \subset \sigma[\mathcal{C}]$;
(2) se $\mathcal{A}$ é uma σ-álgebra de partes de X tal que $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}$ então $\sigma[\mathcal{C}] \subset \mathcal{A}$.

Dizemos também que $\mathcal{C}$ é um *conjunto de geradores* para a σ-álgebra $\sigma[\mathcal{C}]$. A σ-álgebra de partes de $\mathbb{R}^n$ gerada pela coleção de todos os subconjuntos abertos de $\mathbb{R}^n$ é chamada a *σ-álgebra de Borel* de $\mathbb{R}^n$ e é denotada por $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Os elementos de $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ são chamados *conjuntos Boreleanos* de $\mathbb{R}^n$.

No Exercício 1.20 pedimos ao leitor para justificar o fato que a σ-álgebra gerada por uma coleção $\mathcal{C} \subset \wp(X)$ está de fato bem definida, ou seja, existe uma única σ-álgebra $\sigma[\mathcal{C}]$ satisfazendo as propriedades (1) e (2) acima.

1.4.36. Corolário. *Todo conjunto Boreleano de $\mathbb{R}^n$ é mensurável.*

Demonstração. Pelo Teorema 1.4.34, os conjuntos mensuráveis formam uma σ-álgebra que contém os abertos de $\mathbb{R}^n$; portanto, deve conter também a σ-álgebra de Borel. □

1.4.37. Lema. *Se $\mathcal{A}$ é uma álgebra de partes de um conjunto X e se $A, B \in \mathcal{A}$ então $A \cap B$ e $A \setminus B$ pertencem a $\mathcal{A}$. Além do mais, se $\mathcal{A}$ é uma σ-álgebra de partes de X e se $(A_k)_{k \ge 1}$ é uma seqüência de elementos de $\mathcal{A}$ então $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{A}$.*

DEMONSTRAÇÃO. Se $\mathcal{A}$ é uma álgebra e $A, B \in \mathcal{A}$ então $A^c, B^c \in \mathcal{A}$ e portanto $A \cap B = (A^c \cup B^c)^c \in \mathcal{A}$; além do mais, $A \setminus B = A \cap B^c \in \mathcal{A}$. Se $\mathcal{A}$ é uma σ-álgebra e $(A_k)_{k \geq 1}$ é uma seqüência de elementos de $\mathcal{A}$ então $A_k^c \in \mathcal{A}$ para todo $k \geq 1$ e portanto $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = \big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k^c\big)^c \in \mathcal{A}$. □

1.4.38. COROLÁRIO. *A interseção de uma coleção enumerável de subconjuntos mensuráveis de $I\!R^n$ é mensurável e a diferença de dois subconjuntos mensuráveis de $I\!R^n$ é mensurável.*

DEMONSTRAÇÃO. Segue do Teorema 1.4.34 e do Lema 1.4.37. □

1.4.39. LEMA. *Para todo $A \subset I\!R^n$ com $\mathfrak{m}^*(A) < +\infty$ e para todo $\varepsilon > 0$ existe um subconjunto limitado $A_0 \subset A$ tal que:*

$$\mathfrak{m}^*(A) - \mathfrak{m}^*(A_0) \leq \mathfrak{m}^*(A \setminus A_0) < \varepsilon.$$

Além do mais, se A é mensurável, podemos escolher o conjunto A_0 também mensurável.

DEMONSTRAÇÃO. Pelo Lema 1.4.12 existe um aberto $U \subset I\!R^n$ contendo A tal que $\mathfrak{m}^*(U) \leq \mathfrak{m}^*(A) + 1 < +\infty$. O Lema 1.4.23 nos permite escrever $U = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$, onde $(B_k)_{k \geq 1}$ é uma seqüência de blocos retangulares n-dimensionais com interiores dois a dois disjuntos. O Corolário 1.4.21 nos dá:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |B_k| = \mathfrak{m}^*(U) < +\infty;$$

portanto a série $\sum_{k=1}^{\infty} |B_k|$ é convergente e existe $t \geq 1$ tal que:

$$\sum_{k=t+1}^{\infty} |B_k| < \varepsilon.$$

Seja $A_0 = A \cap \big(\bigcup_{k=1}^{t} B_k\big)$. Temos que $A_0 \subset A$ e A_0 é limitado. Note que se A é mensurável então A_0 também é mensurável. Como $A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$ segue que $A \setminus A_0 \subset \bigcup_{k=t+1}^{\infty} B_k$ e portanto:

$$\mathfrak{m}^*(A \setminus A_0) \leq \mathfrak{m}^*\Big(\bigcup_{k=t+1}^{\infty} B_k\Big) \leq \sum_{k=t+1}^{\infty} |B_k| < \varepsilon.$$

A desigualdade $\mathfrak{m}^*(A) - \mathfrak{m}^*(A_0) \leq \mathfrak{m}^*(A \setminus A_0)$ segue do Corolário 1.4.9. □

1.4.40. COROLÁRIO. *Se $A \subset I\!R^n$ é mensurável e $\mathfrak{m}^*(A) < +\infty$ então para todo $\varepsilon > 0$ existe um subconjunto compacto $K \subset I\!R^n$ contido em A tal que:*

$$\mathfrak{m}^*(A) - \mathfrak{m}^*(K) \leq \mathfrak{m}^*(A \setminus K) < \varepsilon.$$

DEMONSTRAÇÃO. Pelo Lema 1.4.39, existe um subconjunto limitado mensurável $A_0 \subset A$ tal que $\mathfrak{m}^*(A \setminus A_0) < \frac{\varepsilon}{2}$ e pelo Corolário 1.4.30 existe um subconjunto fechado $K \subset I\!R^n$ contido em A_0 tal que $\mathfrak{m}^*(A_0 \setminus K) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Obviamente $K \subset A$ e K é compacto. Como $A \setminus K = (A \setminus A_0) \cup (A_0 \setminus K)$, obtemos:

$$\mathfrak{m}^*(A \setminus K) \leq \mathfrak{m}^*(A \setminus A_0) + \mathfrak{m}^*(A_0 \setminus K) < \varepsilon.$$

A desigualdade $\mathfrak{m}^*(A) - \mathfrak{m}^*(K) \leq \mathfrak{m}^*(A \setminus K)$ segue do Corolário 1.4.9. □

1.4.41. PROPOSIÇÃO. *Se $A_1, \ldots, A_t$ são subconjuntos mensuráveis dois a dois disjuntos de $I\!R^n$ então:*

$$\mathfrak{m}^*\Big(\bigcup_{r=1}^{t} A_r\Big) = \sum_{r=1}^{t} \mathfrak{m}^*(A_r). \tag{1.4.8}$$

Além do mais, se $(A_r)_{r\geq 1}$ é uma seqüência de subconjuntos mensuráveis dois a dois disjuntos de $I\!R^n$ então:

$$\mathfrak{m}^*\Big(\bigcup_{r=1}^{\infty} A_r\Big) = \sum_{r=1}^{\infty} \mathfrak{m}^*(A_r). \tag{1.4.9}$$

DEMONSTRAÇÃO. Comecemos provando (1.4.8). Se $\mathfrak{m}^*(A_r) = +\infty$ para algum $r = 1, \ldots, t$ então também $\mathfrak{m}^*\big(\bigcup_{r=1}^{t} A_r\big) = +\infty$ e portanto não há nada a mostrar. Se $\mathfrak{m}^*(A_r) < +\infty$ para todo $r = 1, \ldots, t$ então para todo $\varepsilon > 0$ o Corolário 1.4.40 nos dá um subconjunto compacto K_r de A_r tal que $\mathfrak{m}^*(A_r) - \mathfrak{m}^*(K_r) < \frac{\varepsilon}{t}$. Usando o Corolário 1.4.19 obtemos:

$$\begin{aligned}\mathfrak{m}^*\Big(\bigcup_{r=1}^{t} A_r\Big) \geq \mathfrak{m}^*\Big(\bigcup_{r=1}^{t} K_r\Big) = \sum_{r=1}^{t} \mathfrak{m}^*(K_r) > \sum_{r=1}^{t} \big(\mathfrak{m}^*(A_r) - \tfrac{\varepsilon}{t}\big) \\ = \Big(\sum_{r=1}^{t} \mathfrak{m}^*(A_r)\Big) - \varepsilon.\end{aligned}$$

Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, concluímos que:

$$\mathfrak{m}^*\Big(\bigcup_{r=1}^{t} A_r\Big) \geq \sum_{r=1}^{t} \mathfrak{m}^*(A_r).$$

O Lema 1.4.5 nos dá a desigualdade oposta, provando (1.4.8). Passemos então à prova de (1.4.9). A identidade (1.4.8) nos dá:

$$\mathfrak{m}^*\Big(\bigcup_{r=1}^{\infty} A_r\Big) \geq \mathfrak{m}^*\Big(\bigcup_{r=1}^{t} A_r\Big) = \sum_{r=1}^{t} \mathfrak{m}^*(A_r),$$

para todo $t \geq 1$. Fazendo $t \to \infty$ concluímos que:

$$\mathfrak{m}^*\Big(\bigcup_{r=1}^{\infty} A_r\Big) \geq \sum_{r=1}^{\infty} \mathfrak{m}^*(A_r).$$

Novamente a desigualdade oposta segue do Lema 1.4.5, o que prova (1.4.9). □

1.4.42. DEFINIÇÃO. Sejam X um conjunto e $\mathcal{A}$ uma σ-álgebra de partes de X. O par $(X,\mathcal{A})$ é chamado um *espaço mensurável* ; uma *medida* no espaço mensurável $(X,\mathcal{A})$ é uma função $\mu:\mathcal{A}\to[0,+\infty]$ tal que $\mu(\emptyset)=0$ e tal que, se $(A_k)_{k\ge1}$ é uma seqüência de elementos dois a dois disjuntos de $\mathcal{A}$ então:

$$\mu\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k\Big)=\sum_{k=1}^{\infty}\mu(A_k). \tag{1.4.10}$$

Os elementos da σ-álgebra $\mathcal{A}$ são ditos *subconjuntos mensuráveis* de X. A trinca $(X,\mathcal{A},\mu)$ é chamada um *espaço de medida* .

Se $(X,\mathcal{A},\mu)$ é um espaço de medida e se $A_1,\ldots,A_t$ é uma coleção finita de elementos dois a dois disjuntos de $\mathcal{A}$ então $\mu\big(\bigcup_{k=1}^{t}A_k\big)=\sum_{k=1}^{t}\mu(A_k)$. De fato, basta tomar $A_k=\emptyset$ para $k>t$ e usar (1.4.10).

1.4.43. NOTAÇÃO. Denotaremos por $\mathcal{M}(I\!R^n)$ a σ-álgebra de todos os subconjuntos Lebesgue mensuráveis de $I\!R^n$ e por $\mathfrak{m}:\mathcal{M}(I\!R^n)\to[0,+\infty]$ a restrição à $\mathcal{M}(I\!R^n)$ da função $\mathfrak{m}^*:\wp(I\!R^n)\to[0,+\infty]$ que associa a cada parte de $I\!R^n$ sua medida exterior de Lebesgue.

1.4.44. DEFINIÇÃO. Se $A\subset I\!R^n$ é um subconjunto mensurável então o escalar $\mathfrak{m}(A)\in[0,+\infty]$ é chamado a *medida de Lebesgue* de A.

Note que $\mathfrak{m}(A)=\mathfrak{m}^*(A)$ para todo $A\in\mathcal{M}(I\!R^n)$, i.e., a medida de Lebesgue de um conjunto mensurável simplesmente coincide com sua medida exterior de Lebesgue; apenas nos permitimos remover o adjetivo "exterior" quando lidamos com conjuntos mensuráveis.

Provamos o seguinte:

1.4.45. TEOREMA. *A trinca* $\big(I\!R^n,\mathcal{M}(I\!R^n),\mathfrak{m}\big)$ *é um espaço de medida.*

DEMONSTRAÇÃO. Segue do Teorema 1.4.34 e da Proposição 1.4.41. □

1.4.46. LEMA. *Seja $(X,\mathcal{A},\mu)$ um espaço de medida e sejam $A_1,A_2\in\mathcal{A}$ com $A_1\subset A_2$. Então $\mu(A_1)\le\mu(A_2)$; além do mais, se $\mu(A_1)<+\infty$ então:*

$$\mu(A_2\setminus A_1)=\mu(A_2)-\mu(A_1).$$

DEMONSTRAÇÃO. Basta observar que $A_2=A_1\cup(A_2\setminus A_1)$ é uma união disjunta de elementos de $\mathcal{A}$ e portanto $\mu(A_2)=\mu(A_1)+\mu(A_2\setminus A_1)$. □

1.4.47. NOTAÇÃO. Se $(A_k)_{k\ge1}$ é uma seqüência de conjuntos então a notação $A_k\nearrow A$ indica que $A_k\subset A_{k+1}$ para todo $k\ge1$ (i.e., a seqüência $(A_k)_{k\ge1}$ é *crescente*) e que $A=\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k$. Analogamente, escreveremos $A_k\searrow A$ para indicar que $A_k\supset A_{k+1}$ para todo $k\ge1$ (i.e., a seqüência $(A_k)_{k\ge1}$ é *decrescente*) e que $A=\bigcap_{k=1}^{\infty}A_k$.

1.4.48. LEMA. *Seja $(X,\mathcal{A},\mu)$ um espaço de medida e seja $(A_k)_{k\ge1}$ uma seqüência de elementos de $\mathcal{A}$. Temos:*

(a) *se $A_k\nearrow A$ então $\mu(A)=\lim_{k\to\infty}\mu(A_k)$;*
(b) *se $A_k\searrow A$ e se $\mu(A_1)<+\infty$ então $\mu(A)=\lim_{k\to\infty}\mu(A_k)$.*

Demonstração. Provemos inicialmente o item (a). Se $\mu(A_r) = +\infty$ para algum $r \geq 1$ então, $\mu(A_k) = +\infty$ para todo $k \geq r$ e $\mu(A) = +\infty$, donde $\lim_{k\to\infty} \mu(A_k) = +\infty = \mu(A)$. Suponha então que $\mu(A_k) < +\infty$ para todo $k \geq 1$. Defina $A_0 = \emptyset$ e $B_k = A_k \setminus A_{k-1}$ para todo $k \geq 1$. É fácil ver que os conjuntos B_k pertencem a $\mathcal{A}$, são dois a dois disjuntos e $\bigcup_{k=1}^\infty B_k = \bigcup_{k=1}^\infty A_k$; logo:

$$\mu\Big(\bigcup_{k=1}^\infty A_k\Big) = \mu\Big(\bigcup_{k=1}^\infty B_k\Big) = \sum_{k=1}^\infty \mu(B_k). \tag{1.4.11}$$

Usando o Lema 1.4.46 obtemos:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^\infty \mu(B_k) = \sum_{k=1}^\infty \big(\mu(A_k) - \mu(A_{k-1})\big) &= \lim_{r\to\infty} \sum_{k=1}^r \big(\mu(A_k) - \mu(A_{k-1})\big) \\ &= \lim_{r\to\infty} \mu(A_r).\end{aligned} \tag{1.4.12}$$

O item (a) segue então de (1.4.11) e (1.4.12). Passemos à prova do item (b). Se $\mu(A_1) < +\infty$ então $\mu(A_k) < +\infty$ para todo $k \geq 1$. Como $(A_1 \setminus A_k)_{k\geq 1}$ é uma seqüência de elementos de $\mathcal{A}$ e $(A_1 \setminus A_k) \nearrow (A_1 \setminus A)$, segue do item (a) que:

$$\lim_{k\to\infty} \mu(A_1 \setminus A_k) = \mu(A_1 \setminus A).$$

Usando o Lema 1.4.46 obtemos:

$$\lim_{k\to\infty} \big(\mu(A_1) - \mu(A_k)\big) = \mu(A_1) - \mu(A).$$

Como $\mu(A_1) < +\infty$, a conclusão segue. □

1.4.49. Definição. Um *envelope mensurável* de um subconjunto A de $I\!R^n$ é um subconjunto mensurável E de $I\!R^n$ tal que $A \subset E$ e $\mathfrak{m}^*(A) = \mathfrak{m}(E)$.

1.4.50. Lema. *Para todo $A \subset I\!R^n$ existe um subconjunto E de $I\!R^n$ de tipo G_δ contendo A tal que $\mathfrak{m}^*(A) = \mathfrak{m}(E)$.*

Demonstração. Para cada $k \geq 1$ o Lema 1.4.12 nos dá um aberto U_k contendo A tal que $\mathfrak{m}(U_k) \leq \mathfrak{m}^*(A) + \frac{1}{k}$. Daí $E = \bigcap_{k=1}^\infty U_k$ é um G_δ contendo A e:

$$\mathfrak{m}^*(A) \leq \mathfrak{m}(E) \leq \mathfrak{m}(U_k) \leq \mathfrak{m}^*(A) + \frac{1}{k},$$

para todo $k \geq 1$. A conclusão segue. □

1.4.51. Corolário. *Todo subconjunto de $I\!R^n$ admite um envelope mensurável.*

Demonstração. Basta observar que todo G_δ é mensurável (vide Corolário 1.4.38). □

1.4.52. LEMA. *Sejam A_1, ..., A_t subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ e suponha que existam subconjuntos mensuráveis dois a dois disjuntos E_1, ..., E_t de $\mathbb{R}^n$ de modo que $A_k \subset E_k$, para $k = 1, \ldots, t$. Então:*

$$\mathfrak{m}^*\Big(\bigcup_{k=1}^{t} A_k\Big) = \sum_{k=1}^{t} \mathfrak{m}^*(A_k).$$

Além do mais, se $(A_k)_{k\geq 1}$ é uma seqüência de subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ tal que existe uma seqüência $(E_k)_{k\geq 1}$ de subconjuntos mensuráveis de $\mathbb{R}^n$ dois a dois disjuntos de modo que $A_k \subset E_k$ para todo $k \geq 1$ então:

$$\mathfrak{m}^*\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathfrak{m}^*(A_k).$$

DEMONSTRAÇÃO. Tomando $A_k = E_k = \emptyset$ para $k > t$, podemos considerar apenas o caso de uma seqüência infinita de subconjuntos de $\mathbb{R}^n$. Seja E um envelope mensurável do conjunto $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$. Daí, para todo $k \geq 1$, o conjunto $E'_k = E \cap E_k$ é mensurável e $A_k \subset E'_k$. Como os conjuntos E'_k são dois a dois disjuntos e $\bigcup_{k=1}^{\infty} E'_k \subset E$, temos:

$$\mathfrak{m}^*\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big) = \mathfrak{m}(E) \geq \mathfrak{m}\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} E'_k\Big) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathfrak{m}(E'_k) \geq \sum_{k=1}^{\infty} \mathfrak{m}^*(A_k).$$

A desigualdade $\mathfrak{m}^*\big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\big) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mathfrak{m}^*(A_k)$ segue do Lema 1.4.5. □

1.4.53. PROPOSIÇÃO (Carathéodory). *Um subconjunto $E \subset \mathbb{R}^n$ é mensurável se e somente se para todo $A \subset \mathbb{R}^n$ vale:*

$$\mathfrak{m}^*(A) = \mathfrak{m}^*(A \cap E) + \mathfrak{m}^*(A \cap E^{c}). \tag{1.4.13}$$

DEMONSTRAÇÃO. Se E é mensurável então $A = (A \cap E) \cup (A \cap E^{c})$, onde $A \cap E$ e $A \cap E^{c}$ estão respectivamente contidos nos conjuntos mensuráveis disjuntos E e E^{c}. A identidade (1.4.13) segue portanto do Lema 1.4.52. Reciprocamente, suponha que a identidade (1.4.13) vale para todo $A \subset \mathbb{R}^n$. Para cada $k \geq 1$ seja $E_k = E \cap [-k, k]^n$ e seja Z_k um envelope mensurável para E_k. A identidade (1.4.13) com $A = Z_k$ nos dá:

$$\mathfrak{m}^*(E_k) = \mathfrak{m}(Z_k) = \mathfrak{m}^*(Z_k \cap E) + \mathfrak{m}^*(Z_k \cap E^{c}).$$

Como $Z_k \cap E \supset E_k$ vemos que:

$$\mathfrak{m}^*(E_k) \geq \mathfrak{m}^*(E_k) + \mathfrak{m}^*(Z_k \cap E^{c}) \geq \mathfrak{m}^*(E_k);$$

como E_k é limitado, temos que $\mathfrak{m}^*(E_k) < +\infty$ (vide Observação 1.4.2) e portanto $\mathfrak{m}^*(Z_k \cap E^{c}) = 0$. Em particular, pelo Lema 1.4.16, $Z_k \cap E^{c}$ é mensurável. Tomando $Z = \bigcup_{k\geq 1} Z_k$ vemos que $E \subset Z$, Z é mensurável e:

$$Z \setminus E = Z \cap E^{c} = \bigcup_{k\geq 1} (Z_k \cap E^{c}).$$

Daí $Z \setminus E$ é mensurável e portanto $E = Z \setminus (Z \setminus E)$ também é mensurável. □

1.4.54. Observação. Na verdade, a demonstração apresentada para a Proposição 1.4.53 mostra algo mais forte: se a identidade (1.4.13) vale para todo conjunto mensurável $A \subset \mathbb{R}^n$ então E é mensurável. Em vista do Lema 1.4.50, todo subconjunto de $\mathbb{R}^n$ admite um envelope mensurável de tipo G_δ e portanto a demonstração que apresentamos para a Proposição 1.4.53 mostra até mesmo o seguinte: se a identidade (1.4.13) vale para todo subconjunto A de $\mathbb{R}^n$ de tipo G_δ então E é mensurável.

1.4.55. Lema. *Seja $(A_k)_{k\ge 1}$ uma seqüência de subconjuntos (não necessariamente mensuráveis) de $\mathbb{R}^n$ tal que $A_k \nearrow A$. Então:*

$$\mathfrak{m}^*(A) = \lim_{k\to\infty} \mathfrak{m}^*(A_k).$$

Demonstração. Temos que a seqüência $\big(\mathfrak{m}^*(A_k)\big)_{k\ge 1}$ é crescente e limitada superiormente por $\mathfrak{m}^*(A)$, donde o limite $\lim_{k\to\infty} \mathfrak{m}^*(A_k)$ existe (em $[0,+\infty]$) e é menor ou igual a $\mathfrak{m}^*(A)$. Para provar que $\mathfrak{m}^*(A)$ é menor ou igual a $\lim_{k\to\infty} \mathfrak{m}^*(A_k)$, escolha um envelope mensurável E_k para A_k e defina $F_k = \bigcap_{r\ge k} E_r$, para todo $k \ge 1$. Daí cada F_k é mensurável e $A_k \subset F_k \subset E_k$, donde também F_k é um envelope mensurável de A_k. Além do mais, temos $F_k \nearrow F$, onde F é um conjunto mensurável que contém A. A conclusão segue agora do Lema 1.4.48 observando que:

$$\mathfrak{m}^*(A) \le \mathfrak{m}(F) = \lim_{k\to\infty} \mathfrak{m}(F_k) = \lim_{k\to\infty} \mathfrak{m}^*(A_k). \qquad \square$$

1.4.1. Medida interior. O conceito de medida interior é útil para entender melhor o fenômeno da não mensurabilidade de um subconjunto de $\mathbb{R}^n$.

1.4.56. Definição. Seja A um subconjunto de $\mathbb{R}^n$. A *medida interior de Lebesgue* de A é definida por:

$$\mathfrak{m}_*(A) = \sup\big\{\mathfrak{m}(K) : K \subset A,\ K \text{ compacto}\big\} \in [0,+\infty].$$

1.4.57. Lema. *Se $A \subset \mathbb{R}^n$ é mensurável então $\mathfrak{m}_*(A) = \mathfrak{m}^*(A)$. Reciprocamente, dado $A \subset \mathbb{R}^n$ com $\mathfrak{m}_*(A) = \mathfrak{m}^*(A) < +\infty$ então A é mensurável.*

Demonstração. Suponha que A é mensurável e mostremos que as medidas interior e exterior de A coincidem. Em primeiro lugar, se A tem medida exterior finita isso segue diretamente do Corolário 1.4.40. Suponha então que $\mathfrak{m}^*(A) = +\infty$. Pelo Corolário 1.4.30, existe um subconjunto fechado $F \subset \mathbb{R}^n$ contido em A tal que $\mathfrak{m}^*(A \setminus F) < 1$. Daí:

$$\mathfrak{m}^*(A) = \mathfrak{m}^*\big(F \cup (A \setminus F)\big) \le \mathfrak{m}^*(F) + \mathfrak{m}^*(A \setminus F) \le \mathfrak{m}^*(F) + 1,$$

e portanto $\mathfrak{m}^*(F) = +\infty$. Para cada $r \ge 1$, seja $K_r = F \cap [-r,r]^n$. Daí cada K_r é compacto e $K_r \nearrow F$; o Lema 1.4.48 nos dá:

$$\lim_{r\to\infty} \mathfrak{m}(K_r) = \mathfrak{m}(F) = +\infty.$$

Logo $\mathfrak{m}_*(A) \ge \sup_{r\ge 1} \mathfrak{m}(K_r) = +\infty = \mathfrak{m}^*(A)$. Suponha agora que as medidas interior e exterior de A são iguais e finitas e mostremos que A é mensurável. Seja dado $\varepsilon > 0$. Temos que existe um subconjunto compacto $K \subset A$ tal que:

$$\mathfrak{m}(K) \geq \mathfrak{m}_*(A) - \frac{\varepsilon}{2} = \mathfrak{m}^*(A) - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Pelo Lema 1.4.12, existe um aberto $U \subset I\!R^n$ contendo A tal que:

$$\mathfrak{m}(U) \leq \mathfrak{m}^*(A) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Portanto:

$$\begin{aligned}\mathfrak{m}^*(U \setminus A) \leq \mathfrak{m}(U \setminus K) &= \mathfrak{m}(U) - \mathfrak{m}(K) \\ &= \big(\mathfrak{m}(U) - \mathfrak{m}^*(A)\big) + \big(\mathfrak{m}^*(A) - \mathfrak{m}(K)\big) \leq \varepsilon.\end{aligned}$$

A conclusão segue. □

1.4.58. Corolário. *Se $A \subset I\!R^n$ é mensurável então:*

$$\mathfrak{m}(A) = \sup\big\{\mathfrak{m}(K) : K \subset A,\ K \text{ compacto}\big\}.$$ □

1.4.59. Lema. *Seja $E \subset I\!R^n$ um subconjunto mensurável e sejam A_1, A_2 tais que $E = A_1 \cup A_2$ e $A_1 \cap A_2 = \emptyset$. Então:*

$$\mathfrak{m}(E) = \mathfrak{m}^*(A_1) + \mathfrak{m}_*(A_2).$$

Demonstração. Seja $K \subset I\!R^n$ um subconjunto compacto de A_2. Daí $A_1 \subset E \setminus K$. Além do mais, K e $E \setminus K$ são subconjuntos disjuntos mensuráveis de E com $E = K \cup (E \setminus K)$ e portanto:

$$\mathfrak{m}(E) = \mathfrak{m}(E \setminus K) + \mathfrak{m}(K) \geq \mathfrak{m}^*(A_1) + \mathfrak{m}(K).$$

Tomando o supremo com respeito a todos os subconjuntos compactos K de A_2 obtemos:

$$\mathfrak{m}(E) \geq \mathfrak{m}^*(A_1) + \mathfrak{m}_*(A_2).$$

Para provar a desigualdade oposta, seja Z um envelope mensurável de A_1. Daí $E \setminus Z$ é um subconjunto mensurável de A_2, donde:

$$\mathfrak{m}(E \setminus Z) = \mathfrak{m}_*(E \setminus Z) \leq \mathfrak{m}_*(A_2),$$

pelo Lema 1.4.57 e pelo resultado do Exercício 1.26. Além do mais, $E \cap Z$ e $E \setminus Z$ são subconjuntos disjuntos mensuráveis de E com $E = (E \cap Z) \cup (E \setminus Z)$ e portanto:

$$\mathfrak{m}(E) = \mathfrak{m}(E \cap Z) + \mathfrak{m}(E \setminus Z) \leq \mathfrak{m}(E \cap Z) + \mathfrak{m}_*(A_2).$$

Como $A_1 \subset E \cap Z \subset Z$, concluímos que $\mathfrak{m}^*(A_1) = \mathfrak{m}(E \cap Z)$, o que mostra que $\mathfrak{m}(E) \leq \mathfrak{m}^*(A_1) + \mathfrak{m}_*(A_2)$ e completa a demonstração. □

1.5. Conjuntos de Cantor

Seja $I = [a, b]$, $a < b$, um intervalo fechado e limitado de comprimento positivo. Dado um escalar $\alpha > 0$, $\alpha < b - a = |I|$, consideramos o intervalo aberto J de comprimento α que possui o mesmo centro que I; denotamos então por $\lambda(I, \alpha; 0)$ e $\lambda(I, \alpha; 1)$ os dois intervalos remanescentes após remover J de I. Mais precisamente, sejam $c = \frac{1}{2}(a + b - \alpha)$ e $d = \frac{1}{2}(a + b + \alpha)$, de modo que $J =]c, d[$; definimos:

$$\lambda(I, \alpha; 0) = [a, c], \quad \lambda(I, \alpha; 1) = [d, b]. \tag{1.5.1}$$

Note que $a < c < d < b$, de modo que $\lambda(I, \alpha; 0)$ e $\lambda(I, \alpha; 1)$ são dois intervalos fechados e limitados disjuntos de comprimento positivo contidos em I; mais especificamente:

$$\big|\lambda(I, \alpha; 0)\big| = \big|\lambda(I, \alpha; 1)\big| = \frac{1}{2}\,(|I| - \alpha).$$

Dados um intervalo fechado e limitado I de comprimento positivo, um inteiro $n \geq 1$, escalares positivos $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ com $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i < |I|$ e $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n \in \{0, 1\}$, vamos definir um intervalo limitado e fechado $\lambda\big(I, (\alpha_i)_{i=1}^n; (\epsilon_i)_{i=1}^n\big)$ tal que:

$$\Big|\lambda\big(I, (\alpha_i)_{i=1}^n; (\epsilon_i)_{i=1}^n\big)\Big| = \frac{1}{2^n}\Big(|I| - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\Big) > 0. \tag{1.5.2}$$

A definição será feita recursivamente. Para $n = 1$, a definição já foi dada em (1.5.1). Dados um intervalo fechado e limitado I de comprimento positivo, escalares positivos $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1}$ com $\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i < |I|$ e $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_{n+1} \in \{0, 1\}$, definimos:

$$\lambda\big(I, (\alpha_i)_{i=1}^{n+1}; (\epsilon_i)_{i=1}^{n+1}\big) = \lambda\Big(\lambda\big(I, (\alpha_i)_{i=1}^n; (\epsilon_i)_{i=1}^n\big), \frac{\alpha_{n+1}}{2^n}; \epsilon_{n+1}\Big).$$

Assumindo (1.5.2), é fácil ver que $\lambda\big(I, (\alpha_i)_{i=1}^{n+1}; (\epsilon_i)_{i=1}^{n+1}\big)$ está bem definido e que:

$$\Big|\lambda\big(I, (\alpha_i)_{i=1}^{n+1}; (\epsilon_i)_{i=1}^{n+1}\big)\Big| = \frac{1}{2^{n+1}}\Big(|I| - \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i\Big) > 0.$$

Segue então por indução que temos uma família de intervalos fechados e limitados $\lambda\big(I, (\alpha_i)_{i=1}^n; (\epsilon_i)_{i=1}^n\big)$ satisfazendo (1.5.2).

Fixemos então um intervalo fechado e limitado I de comprimento positivo e uma seqüência $(\alpha_i)_{i \geq 1}$ de escalares positivos tal que $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \leq |I|$. Note que $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i < |I|$, para todo $n \geq 1$. Para simplificar a notação, escrevemos:

$$I(\epsilon) = I(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n) = \lambda\big(I, (\alpha_i)_{i=1}^n; (\epsilon_i)_{i=1}^n\big),$$

para todo $n \geq 1$ e todo $\epsilon = (\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n) \in \{0, 1\}^n$. Dada uma seqüência $(\epsilon_i)_{i \geq 1}$ em $\{0, 1\}$ obtemos uma seqüência decrescente de intervalos fechados e limitados:

$$I \supset I(\epsilon_1) \supset I(\epsilon_1, \epsilon_2) \supset \cdots \supset I(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n) \supset \cdots \tag{1.5.3}$$

Afirmamos que, para todo $n \geq 1$, os intervalos $I(\epsilon)$, $\epsilon \in \{0,1\}^n$, são dois a dois disjuntos. De fato, sejam dados $\epsilon, \epsilon' \in \{0,1\}^n$, com $\epsilon \neq \epsilon'$. Seja $k \in \{1,\ldots,n\}$ o menor índice tal que $\epsilon_k \neq \epsilon'_k$. Temos $I(\epsilon) \subset I(\epsilon_1,\ldots,\epsilon_k)$, $I(\epsilon') \subset I(\epsilon'_1,\ldots,\epsilon'_k)$, $J = I(\epsilon_1,\ldots,\epsilon_{k-1}) = I(\epsilon'_1,\ldots,\epsilon'_{k-1})$ e:

$$I(\epsilon_1,\ldots,\epsilon_k) = \lambda\Big(J, \frac{\alpha_k}{2^{k-1}}; \epsilon_k\Big), \quad I(\epsilon'_1,\ldots,\epsilon'_k) = \lambda\Big(J, \frac{\alpha_k}{2^{k-1}}; \epsilon'_k\Big).$$

Como $\epsilon_k \neq \epsilon'_k$, os intervalos $\lambda\big(J, \frac{\alpha_k}{2^{k-1}}; \epsilon_k\big)$ e $\lambda\big(J, \frac{\alpha_k}{2^{k-1}}; \epsilon'_k\big)$ são disjuntos e portanto também $I(\epsilon) \cap I(\epsilon') = \emptyset$. Para cada $n \geq 1$ definimos:

$$K_n = \bigcup_{\epsilon \in \{0,1\}^n} I(\epsilon).$$

Note que cada K_n é uma união disjunta de 2^n intervalos fechados e limitados de comprimento $\frac{1}{2^n}\big(|I| - \sum_{i=1}^n \alpha_i\big)$. Em particular, cada K_n é compacto e sua medida de Lebesgue é dada por:

$$\mathfrak{m}(K_n) = |I| - \sum_{i=1}^n \alpha_i. \tag{1.5.4}$$

1.5.1. Definição. O conjunto $K = \bigcap_{n=1}^\infty K_n$ é chamado o *conjunto de Cantor* determinado pelo intervalo fechado e limitado I e pela seqüência $(\alpha_i)_{i \geq 1}$ de escalares positivos com $\sum_{i=1}^\infty \alpha_i \leq |I|$.

Para cada seqüência $(\epsilon_i)_{i\geq 1}$ em $\{0,1\}$ temos que (1.5.3) é uma seqüência decrescente de intervalos fechados e limitados cujos comprimentos tendem a zero; de fato:

$$\big|I(\epsilon_1,\ldots,\epsilon_n)\big| = \frac{1}{2^n}\Big(|I| - \sum_{i=1}^n \alpha_i\Big) \leq \frac{1}{2^n}\,|I| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0. \tag{1.5.5}$$

Pelo princípio dos intervalos encaixantes, existe exatamente um ponto pertencente à interseção de todos os intervalos em (1.5.3). Definimos então uma aplicação:

$$\phi : \{0,1\}^\infty = \prod_{i=1}^\infty \{0,1\} \ni \epsilon = (\epsilon_i)_{i\geq 1} \longmapsto \phi(\epsilon) \in K,$$

de modo que:

$$\bigcap_{n=1}^\infty I(\epsilon_1,\ldots,\epsilon_n) = \big\{\phi(\epsilon)\big\}, \tag{1.5.6}$$

para todo $\epsilon = (\epsilon_i)_{i\geq 1} \in \{0,1\}^\infty$.

As principais propriedades do conjunto K podem ser sumarizadas no seguinte:

1.5.2. Teorema. *Seja I um intervalo fechado e limitado de comprimento positivo e seja $(\alpha_i)_{i\geq 1}$ uma seqüência de escalares positivos tal que:*

$$\sum_{i=1}^\infty \alpha_i \leq |I|.$$

Seja K o conjunto de Cantor determinado por I e por $(\alpha_i)_{i\geq 1}$. Então:

(a) *K é um subconjunto compacto de I;*
(b) *a medida de Lebesgue de K é $\mathfrak{m}(K) = |I| - \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i$;*
(c) *K tem interior vazio;*
(d) *K tem a mesma cardinalidade que a reta $\mathbb{R}$ (e é portanto não enumerável);*
(e) *K não tem pontos isolados.*

Demonstração.

- *Prova de* (a).

Basta observar que K é uma interseção de subconjuntos compactos de I.

- *Prova de* (b).

Segue de (1.5.4) e do Lema 1.4.48, observando que $K_n \searrow K$.

- *Prova de* (c).

Um intervalo contido em K_n deve estar contido em algum dos intervalos $I(\epsilon)$, $\epsilon \in \{0,1\}^n$, e portanto deve ter comprimento menor ou igual a $\frac{1}{2^n}\big(|I| - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\big)$. Segue de (1.5.5) que nenhum intervalo de comprimento positivo pode estar contido em K_n para todo $n \geq 1$. Logo $K = \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$ não pode conter um intervalo aberto não vazio.

- *Prova de* (d).

É fácil ver que a função ϕ definida em (1.5.6) é bijetora. A conclusão segue do fato bem conhecido que $\{0,1\}^{\infty}$ tem a mesma cardinalidade de $\mathbb{R}$.

- *Prova de* (e).

Seja $x \in K$. Como ϕ é bijetora, existe $\epsilon \in \{0,1\}^{\infty}$ tal que $x = \phi(\epsilon)$. Escolhendo $\epsilon' \in \{0,1\}^{\infty}$ com $\epsilon' \neq \epsilon$ e $(\epsilon'_1, \ldots, \epsilon'_n) = (\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n)$ então $\phi(\epsilon')$ é um ponto de K distinto de x. Além do mais, $\phi(\epsilon')$ e x ambos pertencem ao intervalo $I(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n)$ e portanto:

$$\big|x - \phi(\epsilon')\big| \leq \big|I(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n)\big| = \frac{1}{2^n}\Big(|I| - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\Big) \leq \frac{1}{2^n}\,|I|.$$

Concluímos que toda vizinhança de x contém um ponto de K distinto de x, i.e., x é um ponto de acumulação de K. □

1.5.3. Exemplo. Escolhendo os escalares α_i com $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i = |I|$ então o conjunto de Cantor K correspondente nos fornece um exemplo de um subconjunto não enumerável de $\mathbb{R}$ (com a mesma cardinalidade de $\mathbb{R}$) e com medida de Lebesgue zero.

1.5.4. Exemplo. Escolhendo os escalares α_i com $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i < |I|$ então o conjunto de Cantor K correspondente nos fornece um exemplo de um subconjunto compacto de $\mathbb{R}$ com interior vazio e medida de Lebesgue positiva. Na verdade, para todo $\varepsilon > 0$ podemos escolher os escalares α_i com $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i < \varepsilon$ e daí o conjunto de Cantor K correspondente nos fornece um exemplo de um subconjunto compacto do intervalo I com interior vazio e $\mathfrak{m}(K) > |I| - \varepsilon$.

1.6. Conjuntos não Mensuráveis

Uma forma de construir um exemplo de um subconjunto não mensurável de $\mathbb{R}^n$ é repetir os passos da demonstração da Proposição 1.2.3.

1.6.1. Exemplo. Considere a relação binária $\sim$ no bloco $[0,1]^n$ definida por:

$$x \sim y \Longleftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}^n,$$

para todos $x, y \in [0,1]^n$. É fácil ver que $\sim$ é uma relação de equivalência em $[0,1]^n$. Seja A um conjunto escolha para $\sim$. Como na demonstração da Proposição 1.2.3, vemos que os conjuntos $(A+q)_{q\in\mathbb{Q}^n}$ são dois a dois disjuntos e que:

$$[0,1]^n \subset \bigcup_{q\in\mathbb{Q}^n\cap[-1,1]^n} (A+q) \subset [-1,2]^n.$$

Usando o Lema 1.4.10 e o resultado do Exercício 1.10, vemos que a mensurabilidade de A implicaria em:

$$0 < 1 = \mathfrak{m}\big([0,1]^n\big) \le \sum_{q\in\mathbb{Q}^n\cap[-1,1]^n} \mathfrak{m}(A) \le \mathfrak{m}\big([-1,2]^n\big) = 3^n < +\infty,$$

já que $\mathbb{Q}^n \cap [-1,1]^n$ é enumerável. Obtemos então uma contradição, o que mostra que A é um subconjunto não mensurável do bloco $[0,1]^n$.

No que segue, investigaremos mais a fundo o fenômeno da não mensurabilidade, produzindo alguns exemplos mais radicais de conjuntos não mensuráveis. Começamos com alguns lemas.

1.6.2. Lema. *Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto. Então, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in \mathbb{R}^n$ com $\|x\| < \delta$, temos:*

$$\mathfrak{m}\big(U \cup (U+x)\big) \le \mathfrak{m}(U) + \varepsilon. \tag{1.6.1}$$

Demonstração. A desigualdade (1.6.1) é trivial para $\mathfrak{m}(U) = +\infty$, de modo que podemos supor que $\mathfrak{m}(U) < +\infty$. Para cada $k \ge 1$, consideramos o conjunto U_k definido por:

$$U_k = \big\{x \in \mathbb{R}^n : d(x, U^{\mathrm{c}}) > \tfrac{1}{k}\big\}.$$

Como U é aberto, temos que $d(x, U^{\mathrm{c}}) > 0$ se e somente se $x \in U$; isso implica que $U = \bigcup_{k=1}^{\infty} U_k$ e portanto $U_k \nearrow U$. A continuidade da função $x \mapsto d(x, U^{\mathrm{c}})$ implica que cada U_k é aberto e portanto mensurável. Pelo Lema 1.4.48, temos $\mathfrak{m}(U) = \lim_{k\to\infty} \mathfrak{m}(U_k)$ e portanto existe $k \ge 1$ tal que:

$$\mathfrak{m}(U_k) \ge \mathfrak{m}(U) - \varepsilon.$$

Tome $\delta = \frac{1}{k}$ e seja $x \in I\!R^n$ com $\|x\| < \delta$. Para todo $y \in U_k$, temos $d(y, y-x) = \|x\| < \frac{1}{k}$ e portanto $y - x \in U$, i.e., $y \in U + x$. Segue então que $U_k \subset U \cap (U+x)$ e portanto:

$$\mathfrak{m}\big(U \cap (U+x)\big) \geq \mathfrak{m}(U) - \varepsilon.$$

A conclusão é obtida agora do cálculo abaixo:

$$\begin{aligned}\mathfrak{m}\big(U \cup (U+x)\big) &= \mathfrak{m}(U) + \mathfrak{m}(U+x) - \mathfrak{m}\big(U \cap (U+x)\big)\\ &= 2\mathfrak{m}(U) - \mathfrak{m}\big(U \cap (U+x)\big) \leq \mathfrak{m}(U) + \varepsilon,\end{aligned}$$

onde usamos o Lema 1.4.10 e o resultado do Exercício 1.17. □

1.6.3. Definição. Se A é um subconjunto de $I\!R^n$, então o *conjunto das diferenças* de A é definido por:

$$A^- = \big\{x - y : x, y \in A\big\}.$$

1.6.4. Lema. *Se $A \subset I\!R^n$ é um conjunto mensurável com medida de Lebesgue positiva então A^- contém uma vizinhança da origem.*

Demonstração. Se $\mathfrak{m}(A) = +\infty$ então A contém um conjunto mensurável A_0 tal que $0 < \mathfrak{m}(A_0) < +\infty$ (isso segue, por exemplo, do Corolário 1.4.58). Como $A_0^- \subset A^-$, podemos considerar apenas o caso em que $\mathfrak{m}(A) < +\infty$. Pelo Lema 1.4.12, existe um aberto $U \subset I\!R^n$ contendo A tal que $\mathfrak{m}(U) < 2\mathfrak{m}(A)$. Seja $\varepsilon > 0$ tal que $\mathfrak{m}(U) + \varepsilon < 2\mathfrak{m}(A)$. Pelo Lema 1.6.2, existe $\delta > 0$ tal que $\mathfrak{m}\big(U \cup (U+x)\big) \leq \mathfrak{m}(U) + \varepsilon$, para todo $x \in I\!R^n$ com $\|x\| < \delta$. Afirmamos que A^- contém a bola aberta de centro na origem e raio δ. Senão, existiria $x \in I\!R^n$ com $\|x\| < \delta$ e $x \notin A^-$; daí A e $A + x$ seriam conjuntos mensuráveis disjuntos (veja Exercício 1.10) e portanto, usando o Lema 1.4.10, concluiríamos que:

$$\begin{aligned}2\mathfrak{m}(A) = \mathfrak{m}(A) + \mathfrak{m}(A+x) = \mathfrak{m}\big(A \cup (A+x)\big) &\leq \mathfrak{m}\big(U \cup (U+x)\big)\\ &\leq \mathfrak{m}(U) + \varepsilon < 2\mathfrak{m}(A),\end{aligned}$$

e obteríamos portanto uma contradição. □

1.6.5. Corolário. *Seja A um subconjunto de $I\!R^n$. Se A^- não contém uma vizinhança da origem então $\mathfrak{m}_*(A) = 0$.*

Demonstração. Dado um compacto $K \subset A$ então K é mensurável e K^- não contém uma vizinhança da origem. Segue então do Lema 1.6.4 que $\mathfrak{m}(K) = 0$. □

Para construir exemplos de conjuntos não mensuráveis, vamos aplicar algumas técnicas da teoria de colorimento de grafos.

1.6.6. Definição. Um *grafo* é um par ordenado $G = (V, \mathcal{E})$, onde V é um conjunto arbitrário e $\mathcal{E}$ é uma relação binária anti-reflexiva e simétrica em V; mais precisamente, $\mathcal{E}$ é um subconjunto de $V \times V$ tal que:

- $(x, x) \notin \mathcal{E}$, para todo $x \in V$;
- $(x, y) \in \mathcal{E}$ implica $(y, x) \in \mathcal{E}$, para todos $x, y \in V$.

Os elementos de V são chamados os *vértices* do grafo G. Dados vértices $x, y \in V$ com $(x, y) \in \mathcal{E}$ então dizemos que x e y são *vértices adjacentes* no grafo G.

Se V' é um subconjunto de V então $\mathcal{E}' = \mathcal{E} \cap (V' \times V')$ é um relação binária anti-reflexiva e simétrica em V', de modo que $G' = (V', \mathcal{E}')$ é um grafo. Dizemos que $G' = (V', \mathcal{E}')$ é o *subgrafo cheio* de G determinado pelo conjunto de vértices V'.

1.6.7. Definição. Seja $G = (V, \mathcal{E})$ um grafo. Um *colorimento* para G é uma função f definida em V tal que $f(x) \neq f(y)$, para todo $(x, y) \in \mathcal{E}$. Para cada $x \in V$, dizemos que $f(x)$ é a *cor* do vértice x. Se k é um inteiro positivo então um *k-colorimento* de G é um colorimento $f : V \to \{0, 1, \ldots, k-1\}$ de G. Quando G admite um k-colorimento dizemos que G é *k-colorível*.

1.6.8. Definição. Seja $G = (V, \mathcal{E})$ um grafo. Um *caminho* em G é uma seqüência finita $(x_i)_{i=0}^p$, $p \geq 0$, de vértices de G tal que $(x_i, x_{i+1}) \in \mathcal{E}$ para todo $i = 0, \ldots, p-1$; dizemos também que $(x_i)_{i=0}^p$ é um caminho *começando* em x_0 e *terminando* em x_p. O caminho $(x_i)_{i=0}^p$ é dito *de comprimento p*. Por convenção, uma seqüência unitária formada por um único vértice $x_0 \in V$ é um caminho de comprimento zero começando em x_0 e terminando em x_0. Quando existe um caminho em G começando em x e terminando em y para todos $x, y \in V$, dizemos que G é um *grafo conexo*. Um *circuito* em G é um caminho $(x_i)_{i=0}^p$ em G tal que $x_0 = x_p$.

É fácil ver que a relação binária $\sim$ em V definida por:

$$x \sim y \iff \text{existe um caminho em } G \text{ começando em } x \text{ e terminando em } y,$$

é uma relação de equivalência em V. Seja $V_0 \subset V$ uma classe de equivalência determinada por $\sim$. Verifica-se facilmente que o subgrafo cheio G_0 de G determinado por V_0 é conexo; dizemos que G_0 é uma *componente conexa* do grafo G.

1.6.9. Lema. *Um grafo $G = (V, \mathcal{E})$ é 2-colorível se e somente se não possui circuitos de comprimento ímpar.*

Demonstração. Assuma que o grafo G é 2-colorível, i.e., existe um 2-colorimento $f : V \to \{0, 1\}$ de G. Seja $(x_i)_{i=0}^p$ um circuito de G. Mostremos que p é par. Para fixar as idéias, assuma que $f(x_0) = 0$. Como os vértices x_0 e x_1 são adjacentes, temos $f(x_1) \neq f(x_0)$ e portanto $f(x_1) = 1$. Similarmente, vemos que $f(x_2) = 0$ e, mais geralmente, $f(x_i) = 0$ para i par e $f(x_i) = 1$ para i ímpar. Como $f(x_p) = f(x_0) = 0$, concluímos que p deve ser par. Reciprocamente, assuma agora que o grafo G não possui circuito de comprimento ímpar e mostremos que G é 2-colorível. É fácil ver que:

- nenhuma componente conexa de G possui um circuito de comprimento ímpar;
- se cada componente conexa de G é 2-colorível então G é 2-colorível.

Podemos então supor que G é conexo. Dados vértices $x, y \in V$ de G então os comprimentos de dois caminhos em G começando em x e terminando em

y têm a mesma paridade. De fato, se $(x_i)_{i=0}^{p}$ e $(x_i')_{i=0}^{q}$ são caminhos em G começando em x e terminando em y então:

$$x = x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_p = y = x_q',\ x_{q-1}',\ \ldots,\ x_0' = x,$$

é um circuito em G de comprimento $p+q$. Logo $p+q$ é par e portanto p e q possuem a mesma paridade. Fixamos agora um vértice $x_0 \in V$ e definimos $f : V \to \{0,1\}$ fazendo $f(x) = 0$ se todo caminho começando em x_0 e terminando em x tem comprimento par e $f(x) = 1$ se todo caminho começando em x_0 e terminando em x tem comprimento ímpar. É fácil ver que f é um 2-colorimento para G. □

1.6.10. Definição. Seja S um subconjunto de $\mathbb{R}^n$ que não contém a origem. O *grafo de Cayley* associado ao par $(\mathbb{R}^n, S)$, denotado por $G(\mathbb{R}^n, S)$, é o grafo $(V, \mathcal{E})$ tal que $V = \mathbb{R}^n$ e:

$$\mathcal{E} = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n : x - y \in S \text{ ou } y - x \in S\big\}.$$

1.6.11. Lema. *Seja S um subconjunto de $\mathbb{R}^n$ que não contém a origem. O grafo de Cayley $G(\mathbb{R}^n, S)$ é 2-colorível se e somente se S possui a seguinte propriedade:*

(∗) *dados $s_1, \ldots, s_k \in S$ e $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{Z}$ com $\sum_{i=1}^{k} n_i s_i = 0$ então $\sum_{i=1}^{k} n_i$ é par.*

Demonstração. Em vista do Lema 1.6.9, basta mostrar que $G(\mathbb{R}^n, S)$ não possui circuito de comprimento ímpar se e somente se S possui a propriedade (∗). Assuma que S possui a propriedade (∗) e que $(x_i)_{i=0}^{p}$ é um circuito de $G(\mathbb{R}^n, S)$. Mostremos que p é par. Para cada $i = 0, \ldots, p-1$ temos que $x_{i+1} - x_i \in S$ ou $x_i - x_{i+1} \in S$; podemos então escrever $x_{i+1} - x_i = n_i s_i$, com $n_i \in \{\pm 1\}$ e $s_i \in S$. Daí:

$$\sum_{i=0}^{p-1} n_i s_i = \sum_{i=0}^{p-1} (x_{i+1} - x_i) = x_p - x_0 = 0$$

e logo $\sum_{i=0}^{p-1} n_i$ é par. Mas $\sum_{i=0}^{p-1} |n_i|$ tem a mesma paridade que $\sum_{i=0}^{p-1} n_i$ e portanto $\sum_{i=0}^{p-1} |n_i| = p$ é par. Reciprocamente, suponha que $G(\mathbb{R}^n, S)$ não possui circuito de comprimento ímpar e mostremos que S possui a propriedade (∗). Sejam $s_1, \ldots, s_k \in S$ e $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{Z}$ com $\sum_{i=1}^{k} n_i s_i = 0$. Escreva $s_i' = s_i$ se $n_i \geq 0$ e $s_i' = -s_i$ se $n_i < 0$, de modo que $n_i s_i = |n_i| s_i'$ e $s_i' \in S$ ou $-s_i' \in S$, para todo $i = 1, \ldots, k$. Temos que $\sum_{i=1}^{k} |n_i| s_i' = 0$, ou seja:

$$\underbrace{s_1' + s_1' + \cdots + s_1'}_{|n_1| \text{ termos}} + \underbrace{s_2' + s_2' + \cdots + s_2'}_{|n_2| \text{ termos}} + \cdots + \underbrace{s_k' + s_k' + \cdots + s_k'}_{|n_k| \text{ termos}} = 0. \tag{1.6.2}$$

Sejam $p = \sum_{i=1}^{k} |n_i|$, $x_0 = 0$ e, para $j = 1, 2, \ldots, p$, seja x_j a soma dos primeiros j termos da soma que aparece do lado esquerdo da identidade (1.6.2). Temos que $(x_j)_{j=0}^{p}$ é um circuito em $G(\mathbb{R}^n, S)$ de comprimento p

e portanto p é par. Finalmente, como $\sum_{i=1}^{k}|n_i|$ e $\sum_{i=1}^{k}n_i$ têm a mesma paridade, segue que $\sum_{i=1}^{k}n_i$ é par. $\square$

1.6.12. Lema. *Seja $S \subset I\!R^n \setminus \{0\}$ e suponha que exista um 2-colorimento $f : I\!R^n \to \{0,1\}$ do grafo de Cayley $G(I\!R^n, S)$. Se a origem é um ponto de acumulação de S então os conjuntos $A = f^{-1}(0)$ e $B = f^{-1}(1)$ possuem medida interior nula.*

Demonstração. Dados $x, y \in A$ então $f(x) = f(y) = 0$ e portanto os vértices x e y não podem ser adjacentes no grafo $G(I\!R^n, S)$. Em particular, $x - y \notin S$, o que mostra que o conjunto das diferenças A^- é disjunto de S. Como a origem é um ponto de acumulação de S, segue que A^- não pode conter uma vizinhança da origem e portanto, pelo Corolário 1.6.5, A tem medida interior nula. Analogamente, vemos que $B^- \cap S = \emptyset$ e portanto $\mathfrak{m}_*(B) = 0$. $\square$

1.6.13. Exemplo. Em vista dos Lemas 1.6.11 e 1.6.12, se exibirmos um subconjunto $S \subset I\!R^n \setminus \{0\}$ com a propriedade $(*)$ e que possui a origem como ponto de acumulação então obteremos uma partição $I\!R^n = A \cup B$ de $I\!R^n$ tal que $\mathfrak{m}_*(A) = \mathfrak{m}_*(B) = 0$. Por exemplo, é fácil mostrar que o conjunto:

$$S = \big\{\tfrac{1}{m} : m \text{ inteiro ímpar}\big\} \subset I\!R \setminus \{0\}$$

tem a propriedade $(*)$ e obviamente a origem é ponto de acumulução de S. Em $I\!R^n$, podemos considerar o conjunto S^n (ou até mesmo $S \times \{0\}^{n-1}$), que também tem a propriedade $(*)$ e a origem como ponto de acumulação.

1.6.14. Exemplo. Sejam $A, B \subset I\!R^n$ conjuntos disjuntos de medida interior nula tais que $I\!R^n = A \cup B$ (vide Exemplo 1.6.13). Definindo:

$$A' = A \cap [0,1]^n, \quad B' = B \cap [0,1]^n,$$

obtemos uma partição $[0,1]^n = A' \cup B'$ do bloco $[0,1]^n$ em conjuntos A', B' de medida interior nula. Usando o Lema 1.4.59 vemos que:

$$1 = \mathfrak{m}\big([0,1]^n\big) = \mathfrak{m}^*(A') + \mathfrak{m}_*(B') = \mathfrak{m}^*(A')$$

e portanto $\mathfrak{m}^*(A') = 1$. Similarmente, vemos que $\mathfrak{m}^*(B') = 1$. Obtivemos então subconjuntos do bloco $[0,1]^n$ com medida interior nula e medida exterior igual a 1. Obtivemos também uma partição do bloco $[0,1]^n$ em dois conjuntos de medida exterior igual a 1; note que:

$$1 = \mathfrak{m}\big([0,1]^n\big) < \mathfrak{m}^*(A') + \mathfrak{m}^*(B') = 2,$$

com $[0,1]^n = A' \cup B'$ e A', B' disjuntos!

Exercícios para o Capítulo 1

Aritmética na Reta Estendida.

Exercício 1.1. Mostre que todo subconjunto da reta estendida possui supremo e ínfimo.

Exercício 1.2. Prove o Lema 1.1.7.

EXERCÍCIO 1.3. Dadas famílias $(a_i)_{i\in I}$ e $(b_j)_{j\in J}$ em $\overline{I\!R}$ tais que a soma $a_i + b_j$ é bem definida para todos $i \in I$, $j \in J$, mostre que:

$$\sup\big\{a_i + b_j : i \in I,\ j \in J\big\} = \sup_{i\in I} a_i + \sup_{j\in J} b_j,$$

desde que a soma $\sup_{i\in I} a_i + \sup_{j\in J} b_j$ esteja bem definida. Mostre também que:

$$\inf\big\{a_i + b_j : i \in I,\ j \in J\big\} = \inf_{i\in I} a_i + \inf_{j\in J} b_j,$$

desde que a soma $\inf_{i\in I} a_i + \inf_{j\in J} b_j$ esteja bem definida.

EXERCÍCIO 1.4. Prove o Lema 1.1.8.

EXERCÍCIO 1.5. Sejam $(a_k)_{k\ge 1}$ e $(b_k)_{k\ge 1}$ seqüências crescentes no intervalo $[0, +\infty]$. Mostre que:

$$\lim_{k\to\infty} a_k b_k = \big(\lim_{k\to\infty} a_k\big)\big(\lim_{k\to\infty} b_k\big).$$

EXERCÍCIO 1.6. Prove a Proposição 1.1.10.

EXERCÍCIO 1.7. Prove a Proposição 1.1.12.

*EXERCÍCIO 1.8.

- Mostre que os conjuntos:

$$\begin{aligned} &]a, b[\,, \quad a, b \in \overline{I\!R},\ a < b,\\ &[-\infty, a[\,, \quad a \in \overline{I\!R},\ a > -\infty,\\ &]a, +\infty]\,, \quad a \in \overline{I\!R},\ a < +\infty, \end{aligned}$$

  constituem uma base de abertos para uma topologia em $\overline{I\!R}$.
- Mostre que a aplicação $f : [-1, 1] \to \overline{I\!R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} -\infty, & \text{se } x = -1,\\ \dfrac{x}{1 - x^2}, & \text{se } x \in\ ]-1, 1[,\\ +\infty, & \text{se } x = 1, \end{cases}$$

  é um homeomorfismo.
- Mostre que uma seqüência $(a_k)_{k\ge 1}$ em $\overline{I\!R}$ converge para um elemento $a \in \overline{I\!R}$ com respeito à topologia introduzida acima se e somente se $(a_k)_{k\ge 1}$ converge para a de acordo com a Definição 1.1.6.
- Mostre que a função $D_+ \ni (a, b) \mapsto a + b \in \overline{I\!R}$ é contínua, onde:

$$D_+ = (\,\overline{I\!R} \times \overline{I\!R}\,) \setminus \big\{(-\infty, +\infty), (+\infty, -\infty)\big\}$$

  é munido da topologia induzida pela topologia produto de $\overline{I\!R} \times \overline{I\!R}$.
- Mostre que a função $\overline{I\!R} \times \overline{I\!R} \ni (a, b) \mapsto ab \in \overline{I\!R}$ é contínua, *exceto* nos pontos $(+\infty, 0)$, $(-\infty, 0)$, $(0, +\infty)$ e $(0, -\infty)$.

Medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^n$.

EXERCÍCIO 1.9. Dado $A \subset \mathbb{R}^n$, mostre que:

$$\mathfrak{m}^*(A) = \inf \big\{ \mathfrak{m}(U) : U \text{ aberto em } \mathbb{R}^n \text{ e } A \subset U \big\}.$$

EXERCÍCIO 1.10. Se $A \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto mensurável, mostre que $A + x$ também é mensurável para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

EXERCÍCIO 1.11. Seja σ uma *permutação de n elementos*, ou seja, uma bijeção do conjunto $\{1, \ldots, n\}$ sobre si próprio. Considere o isomorfismo linear $\widehat{\sigma} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definido por:

$$\widehat{\sigma}(x_1, \ldots, x_n) = (x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}),$$

para todo $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Mostre que:

(a) se B é um bloco retangular n-dimensional então $\widehat{\sigma}(B)$ é também um bloco retangular n-dimensional e $|\widehat{\sigma}(B)| = |B|$;
(b) para todo $A \subset \mathbb{R}^n$, vale a igualdade $\mathfrak{m}^*\big(\widehat{\sigma}(A)\big) = \mathfrak{m}^*(A)$;
(c) se $A \subset \mathbb{R}^n$ é mensurável então $\widehat{\sigma}(A)$ também é mensurável.

EXERCÍCIO 1.12. Dado um vetor $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ com todas as coordenadas não nulas, consideramos o isomorfismo linear $D_\lambda : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definido por:

$$D_\lambda(x_1, \ldots, x_n) = (\lambda_1 x_1, \ldots, \lambda_n x_n),$$

para todo $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Mostre que:

(a) se B é um bloco retangular n-dimensional então $D_\lambda(B)$ é também um bloco retangular n-dimensional e:

$$|D_\lambda(B)| = |\lambda_1| \cdots |\lambda_n| \, |B| = |\det D_\lambda| \, |B|;$$

(b) para todo $A \subset \mathbb{R}^n$, vale a igualdade $\mathfrak{m}^*\big(D_\lambda(A)\big) = |\det D_\lambda| \, \mathfrak{m}^*(A)$;
(c) se $A \subset \mathbb{R}^n$ é mensurável então $D_\lambda(A)$ também é mensurável.

DEFINIÇÃO 1.1. Dados conjuntos A e B então a *diferença simétrica* de A e B é definida por:

$$A \bigtriangleup B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

EXERCÍCIO 1.13. Sejam $A, B \subset \mathbb{R}^n$ tais que $\mathfrak{m}^*(A \bigtriangleup B) = 0$. Mostre que:

- $\mathfrak{m}^*(A) = \mathfrak{m}^*(B)$;
- A é mensurável se e somente se B é mensurável.

EXERCÍCIO 1.14. Dado um subconjunto mensurável $A \subset \mathbb{R}^n$ tal que $\mathfrak{m}(A) < +\infty$, mostre que, para todo $\varepsilon > 0$, existem blocos retangulares n-dimensionais $B_1, \ldots, B_t$ com interiores dois a dois disjuntos de modo que:

$$\mathfrak{m}\Big(\big(\textstyle\bigcup_{k=1}^t B_k\big) \bigtriangleup A\Big) < \varepsilon.$$

EXERCÍCIO 1.15. Dados subconjuntos $A, B \subset \mathbb{R}^n$ com $\mathfrak{m}^*(A) < +\infty$ ou $\mathfrak{m}^*(B) < +\infty$, mostre que:

$$\big|\mathfrak{m}^*(A) - \mathfrak{m}^*(B)\big| \le \mathfrak{m}^*(A \bigtriangleup B).$$

EXERCÍCIO 1.16. Seja $A \subset I\!R^n$ e seja $E \subset I\!R^n$ um envelope mensurável de A. Se E' é um conjunto mensurável tal que $A \subset E' \subset E$, mostre que E' também é um envelope mensurável de A.

EXERCÍCIO 1.17. Seja $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida. Dados $A, B \in \mathcal{A}$ com $\mu(A \cap B) < +\infty$, mostre que:

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B).$$

EXERCÍCIO 1.18. Seja $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida e seja $(A_k)_{k\geq 1}$ uma seqüência de elementos de $\mathcal{A}$. Mostre que $\mu\big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\big) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$.

EXERCÍCIO 1.19. Seja $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida e seja $(A_k)_{k\geq 1}$ uma seqüência de elementos de $\mathcal{A}$ tal que $\mu(A_k \cap A_l) = 0$, para todos $k, l \geq 1$ com $k \neq l$. Mostre que $\mu\big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\big) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$.

EXERCÍCIO 1.20. Seja X um conjunto arbitrário.

(a) Se $(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ é uma família não vazia de σ-álgebras de partes de X, mostre que $\mathcal{A} = \bigcap_{i\in I} \mathcal{A}_i$ também é uma σ-álgebra de partes de X.
(b) Mostre que, fixada uma coleção $\mathcal{C} \subset \wp(X)$ de partes de X, existe *no máximo uma* σ-álgebra $\sigma[\mathcal{C}]$ de partes de X satisfazendo as propriedades (1) e (2) que aparecem na Definição 1.4.35.
(c) Dada uma coleção arbitrária $\mathcal{C} \subset \wp(X)$ de partes de X, mostre que a interseção de todas as σ-álgebras de partes de X que contém $\mathcal{C}$ é uma σ-álgebra de partes de X que satisfaz as propriedades (1) e (2) que aparecem na Definição 1.4.35 (note que sempre existe ao menos uma σ-álgebra de partes de X contendo $\mathcal{C}$, a saber, $\wp(X)$).

EXERCÍCIO 1.21. Seja X um conjunto arbitrário e sejam $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2 \subset \wp(X)$ coleções arbitrárias de partes de X. Se $\mathcal{C}_1 \subset \sigma[\mathcal{C}_2]$ e $\mathcal{C}_2 \subset \sigma[\mathcal{C}_1]$, mostre que $\sigma[\mathcal{C}_1] = \sigma[\mathcal{C}_2]$.

EXERCÍCIO 1.22. Mostre que todo subconjunto de $I\!R^n$ de tipo G_δ ou de tipo F_σ é Boreleano.

EXERCÍCIO 1.23. Mostre que a σ-álgebra de Borel de $I\!R$ coincide com a σ-álgebra gerada pelos intervalos da forma $]-\infty, c]$, $c \in I\!R$.

EXERCÍCIO 1.24. Se I é um intervalo fechado e limitado de comprimento positivo, mostre que o único subconjunto fechado $F \subset I$ com $\mathfrak{m}(F) = |I|$ é $F = I$. Conclua que não existe um subconjunto fechado com interior vazio $F \subset I$ tal que $\mathfrak{m}(F) = |I|$ (compare com o Exemplo 1.5.4).

EXERCÍCIO 1.25. Dado $A \subset I\!R^n$, mostre que $\mathfrak{m}_*(A) \leq \mathfrak{m}^*(A)$.

EXERCÍCIO 1.26. Mostre que a medida interior de Lebesgue é monotônica, i.e., se $A_1 \subset A_2 \subset I\!R^n$ então $\mathfrak{m}_*(A_1) \leq \mathfrak{m}_*(A_2)$.

EXERCÍCIO 1.27. Dado $A \subset I\!R^n$, mostre que:

$$\mathfrak{m}_*(A) = \sup\big\{\mathfrak{m}(E) : E \subset A,\ E \text{ mensurável}\big\}.$$

Mais geralmente, mostre que se $\mathcal{M}'$ é um subconjunto de $\mathcal{M}(I\!R^n)$ que contém todos os subconjuntos compactos de $I\!R^n$ então:

$$\mathfrak{m}_*(A) = \sup\big\{\mathfrak{m}(E) : E \subset A,\ E \in \mathcal{M}'\big\}.$$

EXERCÍCIO 1.28. Dado um subconjunto $A \subset \mathbb{R}^n$, mostre que existe um subconjunto W de $\mathbb{R}^n$ de tipo F_σ tal que $W \subset A$ e $\mathfrak{m}(W) = \mathfrak{m}_*(A)$.

EXERCÍCIO 1.29. Seja $(A_k)_{k\geq 1}$ uma seqüência de subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ tal que $A_k \searrow A$ e $\mathfrak{m}_*(A_k) < +\infty$ para algum $k \geq 1$. Mostre que:

$$\mathfrak{m}_*(A) = \lim_{k\to\infty} \mathfrak{m}_*(A_k).$$

*EXERCÍCIO 1.30. Sejam dados conjuntos $A \subset \mathbb{R}^m$, $B \subset \mathbb{R}^n$, de modo que $A \times B \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^{m+n}$.

(a) Mostre que $\mathfrak{m}^*(A \times B) \leq \mathfrak{m}^*(A)\mathfrak{m}^*(B)$.
(b) Mostre que se A e B são mensuráveis então $A \times B$ também é mensurável.
(c) Mostre que se A e B são mensuráveis então $\mathfrak{m}(A\times B) = \mathfrak{m}(A)\mathfrak{m}(B)$.

Conjuntos de Cantor.

DEFINIÇÃO 1.2. Um subconjunto de $\mathbb{R}^n$ é dito *magro* quando está contido numa reunião enumerável de subconjuntos fechados de $\mathbb{R}^n$ com interior vazio.

O famoso *Teorema de Baire* implica que todo subconjunto magro de $\mathbb{R}^n$ tem interior vazio.

EXERCÍCIO 1.31. Mostre que:

- existe um subconjunto magro e mensurável $A \subset [0,1]$ tal que $\mathfrak{m}(A) = 1$ (compare com o Exercício 1.24);
- se A é o conjunto do item anterior, mostre que $[0,1] \setminus A$ é um conjunto de medida de Lebesgue zero que não é magro.

EXERCÍCIO 1.32. Considere o intervalo $I = [0,1]$ e a seqüência $(\alpha_i)_{i\geq 1}$ definida por:

$$\alpha_i = \frac{2^{i-1}}{3^i},$$

para todo $i \geq 1$. O conjunto de Cantor K associado a I e à seqüência $(\alpha_i)_{i\geq 1}$ é conhecido como o *conjunto ternário de Cantor*. Mostre que:

- $\mathfrak{m}(K) = 0$;
- para todo $n \geq 1$ e todo $\epsilon = (\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n) \in \{0,1\}^n$ o intervalo $I(\epsilon)$ é dado por:

$$I(\epsilon) = \Big[\sum_{i=1}^n \frac{2\epsilon_i}{3^i}, \frac{1}{3^n} + \sum_{i=1}^n \frac{2\epsilon_i}{3^i}\Big];$$

- a bijeção $\phi : \{0,1\}^\infty \to K$ definida em (1.5.6) é dada por:

$$\phi(\epsilon) = \sum_{i=1}^\infty \frac{2\epsilon_i}{3^i},$$

para todo $\epsilon = (\epsilon_i)_{i\geq 1} \in \{0,1\}^\infty$.

Exercício 1.33. Considere a relação de *ordem lexicográfica* no conjunto $\{0,1\}^\infty$, i.e., para $\epsilon = (\epsilon_i)_{i\geq 1}, \epsilon' = (\epsilon'_i)_{i\geq 1} \in \{0,1\}^\infty$ dizemos que $\epsilon < \epsilon'$ quando existe um índice $i \geq 1$ tal que $(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_{i-1}) = (\epsilon'_1, \ldots, \epsilon'_{i-1})$ e $\epsilon_i < \epsilon'_i$. Mostre que a função $\phi : \{0,1\}^\infty \to K$ definida em (1.5.6) é *estritamente crescente*, i.e., se $\epsilon < \epsilon'$ então $\phi(\epsilon) < \phi(\epsilon')$.

Exercício 1.34. Utilizando a notação da Seção 1.5, mostre que para todo $n \geq 1$ e todo $\epsilon = (\epsilon_i)_{i=1}^n \in \{0,1\}^n$, a extremidade esquerda do intervalo $I(\epsilon)$ é $\phi(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n, 0, 0, \ldots)$ e a extremidade direita de $I(\epsilon)$ é $\phi(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n, 1, 1, \ldots)$.

Conjuntos não Mensuráveis.

Exercício 1.35. Mostre que existe um subconjunto não mensurável A de $\mathbb{R}^n$ tal que $\mathfrak{m}_*(A) = \mathfrak{m}^*(A) = +\infty$.

CAPÍTULO 2

Integrando Funções em Espaços de Medida

2.1. Funções Mensuráveis

Recorde da Definição 1.4.42 que um espaço mensurável é um conjunto X do qual destacamos uma certa coleção de subconjuntos $\mathcal{A} \subset \wp(X)$ (mais precisamente, uma σ-álgebra de partes de X) aos quais damos o nome de mensuráveis. A palavra "mensurável" nesse contexto não indica que os conjuntos possam ser medidos de alguma forma ou que estamos assumindo a existência de alguma medida não trivial definida em $\mathcal{A}$. Um mesmo conjunto X admite em geral diversas σ-álgebras; por exemplo, $\{\emptyset, X\}$ e $\wp(X)$ são sempre exemplos (triviais) de σ-álgebras de partes de X. Portanto, o termo "mensurável" só deve ser usado quando uma σ-álgebra específica estiver fixada pelo contexto. No conjunto $\mathbb{R}^n$, temos dois exemplos importantes de σ-álgebras; a σ-álgebra de Borel $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ e a σ-álgebra $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ de conjuntos Lebesgue mensuráveis. No que segue, precisaremos também introduzir uma σ-álgebra de Borel para a reta estendida $\overline{\mathbb{R}}$; temos a seguinte:

2.1.1. Definição. Um subconjunto $A \subset \overline{\mathbb{R}}$ é dito *Boreleano* quando $A \cap \mathbb{R}$ for um Boreleano de $\mathbb{R}$.

É fácil ver que os subconjuntos Boreleanos de $\overline{\mathbb{R}}$ constituem de fato uma σ-álgebra de partes de $\overline{\mathbb{R}}$. Tal σ-álgebra será chamada a *σ-álgebra de Borel* de $\overline{\mathbb{R}}$ e será denotada por $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$.

A σ-álgebra $\mathcal{A}$ de um espaço mensurável $(X, \mathcal{A})$ pode ser entendida como uma *estrutura* que colocamos no conjunto subjacente X (assim como, digamos, as operações de um espaço vetorial constituem uma estrutura no conjunto subjacente). Devemos então introduzir uma noção de *função que preserva a estrutura* de um espaço mensurável.

2.1.2. Definição. Sejam $(X, \mathcal{A})$, $(X', \mathcal{A}')$ espaços mensuráveis. Uma *função mensurável* $f : (X, \mathcal{A}) \to (X', \mathcal{A}')$ é uma função $f : X \to X'$ tal que para todo conjunto $E \in \mathcal{A}'$ temos que $f^{-1}(E)$ pertence a $\mathcal{A}$.

Em outras palavras, uma função é mensurável se a imagem inversa de conjuntos mensuráveis é mensurável. Quando as σ-álgebras em questão estiverem subentendidas pelo contexto, nos referiremos apenas à mensurabilidade da função $f : X \to X'$, omitindo a menção explícita a $\mathcal{A}$ e $\mathcal{A}'$.

O conjunto $\mathbb{R}^n$ aparecerá com muita freqüência como domínio ou contradomínio de nossas funções e introduzimos abaixo uma convenção que evita a necessidade de especificar a σ-álgebra considerada em $\mathbb{R}^n$ em cada situação.

2.1.3. CONVENÇÃO. A menos de menção explícita em contrário, o conjunto $\mathbb{R}^n$ será considerado munido da σ-álgebra de Borel $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ sempre que o mesmo aparecer no *contra-domínio* de uma função; mais explicitamente, se $(X, \mathcal{A})$ é um espaço mensurável então por uma *função mensurável* $f : (X, \mathcal{A}) \to \mathbb{R}^n$ entenderemos uma função $f : X \to \mathbb{R}^n$ tal que $f^{-1}(E) \in \mathcal{A}$, para todo Boreleano $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Similarmente, a reta estendida $\overline{\mathbb{R}}$ será considerada munida da σ-álgebra de Borel $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$, sempre que a mesma aparecer no contra-domínio de uma função. Por outro lado, o conjunto $\mathbb{R}^n$ será sempre considerado munido da σ-álgebra $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ de conjuntos Lebesgue mensuráveis, quando o mesmo aparecer no *domínio* de uma função; mais explicitamente, uma *função mensurável* $f : \mathbb{R}^n \to (X, \mathcal{A})$ é uma função $f : \mathbb{R}^n \to X$ tal que $f^{-1}(E) \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$, para todo $E \in \mathcal{A}$.

Por exemplo, em vista da convenção 2.1.3 acima, uma função mensurável $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função tal que $f^{-1}(E) \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$, para todo $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Nós dificilmente teremos qualquer interesse em considerar a σ-álgebra $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ em $\mathbb{R}^n$ quando o mesmo aparece no contra-domínio de uma função; por outro lado, em algumas situações é interessante considerar a σ-álgebra $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ em $\mathbb{R}^n$ quando o mesmo aparece no domínio de uma função (contrariando, portanto, a convenção 2.1.3). Introduzimos então a seguinte terminologia.

2.1.4. DEFINIÇÃO. Seja $(X, \mathcal{A})$ um espaço mensurável. Uma *função Borel mensurável* $f : \mathbb{R}^n \to (X, \mathcal{A})$ é uma função $f : \mathbb{R}^n \to X$ tal que $f : \big(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)\big) \to (X, \mathcal{A})$ é uma função mensurável, i.e., tal que $f^{-1}(E)$ é um Boreleano de $\mathbb{R}^n$ para todo $E \in \mathcal{A}$. Similarmente, uma *função Borel mensurável* $f : \overline{\mathbb{R}} \to (X, \mathcal{A})$ é uma função $f : \overline{\mathbb{R}} \to X$ tal que $f : \big(\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})\big) \to (X, \mathcal{A})$ é uma função mensurável.

Para verificar a mensurabilidade de uma função $f : (X, \mathcal{A}) \to (X', \mathcal{A}')$ não é necessário verificar que $f^{-1}(E) \in \mathcal{A}$ *para todo* $E \in \mathcal{A}'$, mas apenas para E pertencente a um conjunto de geradores de $\mathcal{A}'$. Esse é o conteúdo do seguinte:

2.1.5. LEMA. *Sejam $(X, \mathcal{A})$, $(X', \mathcal{A}')$ espaços mensuráveis e seja $\mathcal{C}$ um conjunto de geradores para a σ-álgebra $\mathcal{A}'$. Uma função $f : X \to X'$ é mensurável se e somente se $f^{-1}(E) \in \mathcal{A}$, para todo $E \in \mathcal{C}$.*

DEMONSTRAÇÃO. Como $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}'$, temos obviamente que $f^{-1}(E) \in \mathcal{A}$ para todo $E \in \mathcal{C}$, caso f seja mensurável. Suponha então que $f^{-1}(E) \in \mathcal{A}$ para todo $E \in \mathcal{C}$. Verifica-se diretamente que a coleção:

$$\big\{E \in \wp(X') : f^{-1}(E) \in \mathcal{A}\big\} \tag{2.1.1}$$

é uma σ-álgebra de partes de X'. Por hipótese, (2.1.1) contém $\mathcal{C}$ e portanto contém $\mathcal{A}' = \sigma[\mathcal{C}]$. Isso mostra que $f^{-1}(E) \in \mathcal{A}$ para todo $E \in \mathcal{A}'$, i.e., f é mensurável. $\square$

2.1.6. COROLÁRIO. *Se* $(X,\mathcal{A})$ *é um espaço mensurável então uma função* $f : X \to I\!R^n$ *é mensurável se e somente se* $f^{-1}(U) \in \mathcal{A}$*, para todo aberto* $U \subset I\!R^n$*.* $\square$

2.1.7. COROLÁRIO. *Se* $(X,\mathcal{A})$ *é um espaço mensurável então uma função* $f : X \to I\!R$ *é mensurável se e somente se o conjunto:*

$$f^{-1}\big(\,]-\infty,c]\,\big) = \big\{x \in X : f(x) \le c\big\}$$

está em $\mathcal{A}$ *para todo* $c \in I\!R$*.*

DEMONSTRAÇÃO. Segue do Lema 2.1.5, tendo em mente o resultado do Exercício 1.23. $\square$

2.1.8. COROLÁRIO. *Se* $(X,\mathcal{A})$ *é um espaço mensurável então uma função* $f : X \to \overline{I\!R}$ *é mensurável se e somente se o conjunto:*

$$f^{-1}\big([-\infty,c]\big) = \big\{x \in X : f(x) \le c\big\}$$

está em $\mathcal{A}$ *para todo* $c \in I\!R$*.*

DEMONSTRAÇÃO. Segue do Lema 2.1.5, tendo em mente o resultado do Exercício 2.4. $\square$

2.1.9. LEMA. *A composta de duas funções mensuráveis é uma função mensurável, i.e., se* $(X,\mathcal{A})$*,* $(X',\mathcal{A}')$*,* $(X'',\mathcal{A}'')$ *são espaços mensuráveis e se* $f : (X,\mathcal{A}) \to (X',\mathcal{A}')$*,* $g : (X',\mathcal{A}') \to (X'',\mathcal{A}'')$ *são funções mensuráveis então a função* $g \circ f : (X,\mathcal{A}) \to (X'',\mathcal{A}'')$ *também é mensurável.*

DEMONSTRAÇÃO. Dado $E \in \mathcal{A}''$ devemos verificar que $(g\circ f)^{-1}(E) \in \mathcal{A}$. Mas $(g \circ f)^{-1}(E) = f^{-1}\big(g^{-1}(E)\big)$; temos $g^{-1}(E) \in \mathcal{A}'$, pois g é mensurável, e $f^{-1}\big(g^{-1}(E)\big) \in \mathcal{A}$, pois f é mensurável. $\square$

É necessário cüidado na utilização do Lema 2.1.9; para concluir a mensurabilidade de $g \circ f$ a partir da mensurabilidade de f e de g é necessário que a σ-álgebra fixada para o contra-domínio de f e para o domínio de g sejam as mesmas. Em vista da convenção 2.1.3, se $f : (X,\mathcal{A}) \to I\!R^n$ e $g : I\!R^n \to (X',\mathcal{A}')$ são funções mensuráveis então *não podemos* usar o Lema 2.1.9 para concluir que $g \circ f$ é mensurável já que adotamos a σ-álgebra de Borel para o contra-domínio de f e a σ-álgebra de conjuntos Lebesgue mensuráveis para o domínio de g. Nós poderíamos utilizar o Lema 2.1.9 para concluir que $g \circ f$ é mensurável caso soubéssemos, por exemplo, que f é mensurável e que g é *Borel mensurável*.

Se f é uma função definida num espaço mensurável $(X,\mathcal{A})$ então em muitas situações é interessante considerar restrições de f a subconjuntos de X e gostaríamos que tais subconjuntos de X pudessem ser encarados como espaços mensuráveis. Dado então um subconjunto $Y \subset X$, definimos:

$$\mathcal{A}|_Y = \big\{E \cap Y : E \in \mathcal{A}\big\}; \tag{2.1.2}$$

é fácil ver que $\mathcal{A}|_Y$ é uma σ-álgebra de partes de Y.

2.1.10. Definição. Se $\mathcal{A}$ é uma σ-álgebra de partes de um conjunto X e se Y é um subconjunto de X então a σ-álgebra $\mathcal{A}|_Y$ de partes de Y definida em (2.1.2) é chamada a *σ-álgebra induzida em Y por $\mathcal{A}$*. Dizemos então que $(Y, \mathcal{A}|_Y)$ é um *subespaço* do espaço mensurável $(X, \mathcal{A})$.

Observe que se $(X, \mathcal{A})$ é um espaço mensurável e se $Y \in \mathcal{A}$ então os elementos da σ-álgebra induzida $\mathcal{A}|_Y$ são precisamente os elementos de $\mathcal{A}$ que estão contidos em Y; em símbolos:

$$\mathcal{A}|_Y = \mathcal{A} \cap \wp(Y).$$

Em outras palavras, se Y é mensurável então os subconjuntos mensuráveis do subespaço mensurável Y de X são precisamente os subconjuntos mensuráveis de X que estão contidos em Y.

2.1.11. Convenção. Se $(X, \mathcal{A})$ é um espaço mensurável e se Y é um subconjunto de X então, a menos de menção explícita em contrário, consideraremos sempre o conjunto Y munido da σ-álgebra induzida $\mathcal{A}|_Y$.

Em vista das convenções 2.1.11 e 2.1.3, observamos que:

- se um subconjunto Y de $\mathbb{R}^n$ (resp., um subconjunto Y de $\overline{\mathbb{R}}$) aparece no contra-domínio de uma função, consideramo-lo munido da σ-álgebra $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)|_Y$ induzida da σ-álgebra de Borel de $\mathbb{R}^n$ (resp., da σ-álgebra $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})|_Y$ induzida da σ-álgebra de Borel de $\overline{\mathbb{R}}$);
- se um subconjunto Y de $\mathbb{R}^n$ aparece no domínio de uma função, consideramo-lo munido da σ-álgebra $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)|_Y$ induzida da σ-álgebra de subconjuntos Lebesgue mensuráveis de $\mathbb{R}^n$;
- se Y é um subconjunto de $\mathbb{R}^n$ (resp., um subconjunto de $\overline{\mathbb{R}}$) e se $(X, \mathcal{A})$ é um espaço mensurável então uma função $f : Y \to (X, \mathcal{A})$ é dita *Borel mensurável* quando a função $f : \big(Y, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)|_Y\big) \to (X, \mathcal{A})$ (resp., a função $f : \big(Y, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})|_Y\big) \to (X, \mathcal{A})$) for mensurável.

2.1.12. Lema. *Sejam $(X, \mathcal{A})$, $(X', \mathcal{A}')$ espaços mensuráveis e $Y \subset X$ um subconjunto. Então:*

(a) *a aplicação inclusão $i : Y \to X$ é mensurável;*
(b) *se $f : X \to X'$ é uma função mensurável então $f|_Y : Y \to X'$ também é mensurável;*
(c) *dada uma função $f : X' \to X$ com imagem contida em Y, se $f_0 : X' \to Y$ denota a função que difere de f apenas pelo contra-domínio então f é mensurável se e somente se f_0 é mensurável.*

Demonstração.

- *Prova de* (a).

  Basta observar que $i^{-1}(E) = E \cap Y \in \mathcal{A}|_Y$, para todo $E \in \mathcal{A}$.

- *Prova de* (b).

  Basta observar que $f|_Y = f \circ i$ e usar o Lema 2.1.9 juntamente com o item (a) acima.

- *Prova de* (c).

  Se f_0 é mensurável então $f = i \circ f_0$ é mensurável, pelo Lema 2.1.9 e pelo item (a) acima. Reciprocamente, suponha que f é mensurável. Dado $E_1 \in \mathcal{A}|_Y$, devemos mostrar que $f_0^{-1}(E_1)$ (que é igual a $f^{-1}(E_1)$) pertence a $\mathcal{A}'$. Mas $E_1 = E \cap Y$ para algum $E \in \mathcal{A}$ e portanto, como $\mathrm{Im}(f) \subset Y$, temos $f^{-1}(E_1) = f^{-1}(E) \in \mathcal{A}'$. □

2.1.13. Lema. *Sejam $(X, \mathcal{A})$, $(X', \mathcal{A}')$ espaços mensuráveis e seja dada $X = \bigcup_{i \in I} X_i$ uma cobertura enumerável de X por conjuntos mensuráveis $X_i \in \mathcal{A}$. Então uma função $f : X \to X'$ é mensurável se e somente se $f|_{X_i} : X_i \to X'$ é mensurável para todo $i \in I$.*

Demonstração. Se f é mensurável então $f|_{X_i}$ é mensurável para todo $i \in I$, pelo Lema 2.1.12. Reciprocamente, suponha que $f|_{X_i}$ seja mensurável para todo $i \in I$. Dado $E \in \mathcal{A}'$, temos:

$$(f|_{X_i})^{-1}(E) = f^{-1}(E) \cap X_i \in \mathcal{A}|_{X_i},$$

para todo $i \in I$. Como $X_i \in \mathcal{A}$, temos $\mathcal{A}|_{X_i} = \mathcal{A} \cap \wp(X_i)$ e portanto $f^{-1}(E) \cap X_i \in \mathcal{A}$, para todo $i \in I$. Como I é enumerável segue que:

$$f^{-1}(E) = \bigcup_{i \in I} \big(f^{-1}(E) \cap X_i\big) \in \mathcal{A},$$

e portanto f é uma função mensurável. □

2.1.14. Corolário. *Sejam $(X, \mathcal{A})$ um espaço mensurável e Y um subconjunto de $\overline{I\!R}$. Uma função $f : Y \to X$ é Borel mensurável se e somente se $f|_{Y \cap I\!R} : Y \cap I\!R \to X$ é Borel mensurável.*

Demonstração. Temos que $Y = (Y \setminus I\!R) \cup (Y \cap I\!R)$, onde:

$$Y \cap I\!R \in \mathcal{B}(\overline{I\!R})|_Y, \quad Y \setminus I\!R = Y \cap \{+\infty, -\infty\} \in \mathcal{B}(\overline{I\!R})|_Y.$$

Segue do Lema 2.1.13 que f é Borel mensurável se e somente se suas restrições a $Y \setminus I\!R$ e a $Y \cap I\!R$ são Borel mensuráveis. Mas todos os quatro subconjuntos de $\{+\infty, -\infty\}$ são Boreleanos de $\overline{I\!R}$ e portanto a σ-álgebra induzida por $\mathcal{B}(\overline{I\!R})|_Y$ em $Y \setminus I\!R$ é $\wp(Y \setminus I\!R)$. Em particular, a restrição de f a $Y \setminus I\!R$ é Borel mensurável, seja qual for $f : Y \to X$. A conclusão segue. □

2.1.15. Lema. *Dado um subconjunto arbitrário $Y \subset I\!R^m$, então toda função contínua $f : Y \to I\!R^n$ é Borel mensurável.*

Demonstração. Pelo Corolário 2.1.6, é suficiente mostrar que:

$$f^{-1}(U) \in \mathcal{B}(I\!R^m)|_Y,$$

para todo aberto $U \subset I\!R^n$. Mas, como f é contínua, temos que $f^{-1}(U)$ é aberto relativamente a Y, i.e., existe um aberto $V \subset I\!R^m$ com:

$$f^{-1}(U) = V \cap Y;$$

daí $V \in \mathcal{B}(I\!R^m)$ e portanto $f^{-1}(U) = V \cap Y \in \mathcal{B}(I\!R^m)|_Y$. □

2.1.16. LEMA. *Seja* $(X, \mathcal{A})$ *um espaço mensurável e seja* $f : X \to \mathbb{R}^n$ *uma função com funções coordenadas* $f_i : X \to \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$. *Então* $f : X \to \mathbb{R}^n$ *é mensurável se e somente se* $f_i : X \to \mathbb{R}$ *for mensurável, para todo* $i = 1, \dots, n$.

DEMONSTRAÇÃO. Temos $f_i = \pi_i \circ f$, onde $\pi_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ denota a i-ésima projeção. A função π_i é contínua e portanto Borel mensurável, pelo Lema 2.1.15; segue então do Lema 2.1.9 que a mensurabilidade de f implica na mensurabilidade de cada f_i. Reciprocamente, suponha que cada f_i é mensurável. Em vista do Lema 1.4.23, a σ-álgebra de Borel de $\mathbb{R}^n$ coincide com a σ-álgebra gerada pelos blocos retangulares n-dimensionais. Segue então do Lema 2.1.5 que, para mostrar a mensurabilidade de f, é suficiente mostrar que $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ para todo bloco retangular n-dimensional B. Se $B = \prod_{i=1}^n [a_i, b_i]$, então:

$$f^{-1}(B) = \big\{x \in X : f_i(x) \in [a_i, b_i],\ i = 1, \dots, n\big\} = \bigcap_{i=1}^n f_i^{-1}\big([a_i, b_i]\big).$$

Como cada f_i é mensurável, temos $f_i^{-1}\big([a_i, b_i]\big) \in \mathcal{A}$ para todo i e portanto $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$. □

2.1.17. COROLÁRIO. *Sejam* $(X, \mathcal{A})$, $(X', \mathcal{A}')$ *espaços mensuráveis e sejam* $f_i : X \to \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$, *funções mensuráveis. Dada uma função Borel mensurável* $\phi : Y \to X'$ *definida num subconjunto* $Y \subset \mathbb{R}^n$ *tal que:*

$$\big(f_1(x), \dots, f_n(x)\big) \in Y,$$

para todo $x \in X$ *então a função:*

$$\phi \circ (f_1, \dots, f_n) : X \ni x \longmapsto \phi\big(f_1(x), \dots, f_n(x)\big) \in X'$$

é mensurável.

DEMONSTRAÇÃO. Pelo Lema 2.1.16 e pelo item (c) do Lema 2.1.12 temos que a função $(f_1, \dots, f_n) : X \to Y$ é mensurável. A conclusão segue do Lema 2.1.9. □

Se $f : X \to \mathbb{R}^n$, $g : X \to \mathbb{R}^n$ são funções definidas num conjunto arbitrário X então, como é usual, definimos a *soma* $f + g : X \to \mathbb{R}^n$ das funções f e g fazendo $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, para todo $x \in X$; para $n = 1$, podemos definir também o *produto* $fg : X \to \mathbb{R}^n$ fazendo $(fg)(x) = f(x)g(x)$, para todo $x \in X$.

2.1.18. COROLÁRIO. *Seja* $(X, \mathcal{A})$ *um espaço mensurável. Dadas funções mensuráveis* $f : X \to \mathbb{R}^n$, $g : X \to \mathbb{R}^n$ *então:*

- *a soma* $f + g : X \to \mathbb{R}^n$ *é uma função mensurável;*
- *se* $n = 1$, *o produto* $fg : X \to \mathbb{R}$ *é uma função mensurável.*

DEMONSTRAÇÃO. As funções:

$$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \ni (x, y) \longmapsto x + y \in \mathbb{R}^n \quad \text{e} \quad \mathbb{R} \times \mathbb{R} \ni (x, y) \longmapsto xy \in \mathbb{R}$$

são contínuas e portanto Borel mensuráveis, pelo Lema 2.1.15. A conclusão segue do Corolário 2.1.17. □

Note que para funções $f : X \to \overline{I\!R}$, $g : X \to \overline{I\!R}$ a valores na reta estendida, também podemos definir a soma $f + g : X \to \overline{I\!R}$, desde que a soma $f(x) + g(x)$ esteja bem definida (i.e., não seja da forma $(+\infty) + (-\infty)$ ou $(-\infty) + (+\infty)$) para todo $x \in X$. O produto $fg : X \to \overline{I\!R}$ pode ser definido sempre, sem nenhuma restrição sobre f e g.

2.1.19. PROPOSIÇÃO. *Seja $(X, \mathcal{A})$ um espaço mensurável. Sejam dadas funções mensuráveis $f : X \to \overline{I\!R}$ e $g : X \to \overline{I\!R}$. Então:*

- *se a soma $f(x) + g(x)$ estiver bem definida para todo $x \in X$ então a função $f + g : X \to \overline{I\!R}$ é uma função mensurável;*
- *o produto $fg : X \to \overline{I\!R}$ é uma função mensurável.*

DEMONSTRAÇÃO. Considere os seguintes subconjuntos de X:

$$\begin{gathered} f^{-1}(I\!R) \cap g^{-1}(I\!R), \\ f^{-1}(+\infty) \cup g^{-1}(+\infty), \\ f^{-1}(-\infty) \cup g^{-1}(-\infty); \end{gathered}$$

todos eles pertencem a $\mathcal{A}$ e sua união é igual a X. A restrição de $f + g$ a cada um deles é mensurável; de fato, a restrição de $f + g$ ao primeiro deles é mensurável pelo Corolário 2.1.18 e a restrição de $f + g$ aos outros é uma função constante (veja Exercício 2.1). Segue então do Lema 2.1.13 que $f + g$ é mensurável. A mensurabilidade de fg é mostrada de forma similar considerando as restrições de fg aos conjuntos:

$$\begin{gathered} f^{-1}(I\!R) \cap g^{-1}(I\!R), \\ f^{-1}(0) \cup g^{-1}(0), \\ \big[f^{-1}(+\infty) \cap g^{-1}\big(\,]0, +\infty]\,\big)\big] \cup \big[f^{-1}\big(\,]0, +\infty]\,\big) \cap g^{-1}(+\infty)\big], \\ \big[f^{-1}(-\infty) \cap g^{-1}\big([-\infty, 0[\,\big)\big] \cup \big[f^{-1}\big([-\infty, 0[\,\big) \cap g^{-1}(-\infty)\big], \\ \big[f^{-1}(+\infty) \cap g^{-1}\big([-\infty, 0[\,\big)\big] \cup \big[f^{-1}\big([-\infty, 0[\,\big) \cap g^{-1}(+\infty)\big], \\ \big[f^{-1}(-\infty) \cap g^{-1}\big(\,]0, +\infty]\,\big)\big] \cup \big[f^{-1}\big(\,]0, +\infty]\,\big) \cap g^{-1}(-\infty)\big]. \end{gathered}$$ □

2.1.20. DEFINIÇÃO. Dado $x \in \overline{I\!R}$ então a *parte positiva* e a *parte negativa* de x, denotadas respectivamente por x^+ e x^-, são definidas por:

$$x^+ = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0, \\ 0, & \text{se } x < 0, \end{cases} \qquad x^- = \begin{cases} 0, & \text{se } x > 0, \\ -x, & \text{se } x \leq 0. \end{cases}$$

Se f é uma função tomando valores em $\overline{I\!R}$ então a *parte positiva* e a *parte negativa* de f, denotadas respectivamente por f^+ e f^-, são definidas por $f^+(x) = [f(x)]^+$ e $f^-(x) = [f(x)]^-$, para todo x no domínio de f.

É fácil ver que $x = x^+ - x^-$ e $|x| = x^+ + x^-$, para todo $x \in \overline{I\!R}$; em particular, se f é uma função tomando valores em $\overline{I\!R}$ então:

$$f = f^+ - f^- \quad \text{e} \quad |f| = f^+ + f^-,$$

onde, obviamente, $|f|$ denota a função $|f|(x) = |f(x)|$.

2.1.21. Lema. *Seja $(X, \mathcal{A})$ um espaço mensurável. Se $f : X \to \overline{I\!R}$ é uma função mensurável então as funções f^+, f^- e $|f|$ também são mensuráveis.*

Demonstração. Segue do Lema 2.1.15 e do Corolário 2.1.14 que as funções:

$$\overline{I\!R} \ni x \longmapsto x^+ \in \overline{I\!R}, \quad \overline{I\!R} \ni x \longmapsto x^- \in \overline{I\!R}, \quad \overline{I\!R} \ni x \longmapsto |x| \in \overline{I\!R}$$

são Borel mensuráveis; de fato, observe que suas restrições a $I\!R$ são funções contínuas. A conclusão segue do Lema 2.1.9. $\square$

2.1.22. Lema. *Seja $(X, \mathcal{A})$ um espaço mensurável e seja $(f_k)_{k\ge 1}$ uma seqüência de funções mensuráveis $f_k : X \to \overline{I\!R}$. Então as funções:*

$$\sup_{k\ge 1} f_k : X \ni x \longmapsto \sup_{k\ge 1} f_k(x) \in \overline{I\!R} \quad \text{e} \quad \inf_{k\ge 1} f_k : X \ni x \longmapsto \inf_{k\ge 1} f_k(x) \in \overline{I\!R}$$

são mensuráveis.

Demonstração. Note que para todo $x \in X$ temos $\sup_{k\ge 1} f_k(x) \le c$ se e somente se $f_k(x) \le c$ para todo $k \ge 1$; logo:

$$\Big\{x \in X : \sup_{k\ge 1} f_k(x) \le c\Big\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} f_k^{-1}\big([-\infty, c]\big) \in \mathcal{A},$$

para todo $c \in I\!R$. Além do mais, para todo $x \in X$, temos $\inf_{k\ge 1} f_k(x) \le c$ se e somente se para todo $r \ge 1$ existe $k \ge 1$ tal que $f_k(x) \le c + \frac{1}{r}$; logo:

$$\Big\{x \in X : \inf_{k\ge 1} f_k(x) \le c\Big\} = \bigcap_{r=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} f_k^{-1}\big(\big[-\infty, c + \tfrac{1}{r}\big]\big) \in \mathcal{A},$$

para todo $c \in I\!R$. A conclusão segue do Corolário 2.1.8. $\square$

2.1.23. Corolário. *Seja $(X, \mathcal{A})$ um espaço mensurável e seja $(f_k)_{k\ge 1}$ uma seqüência de funções mensuráveis $f_k : X \to \overline{I\!R}$. Então as funções:*

$$\limsup_{k\to\infty} f_k : X \ni x \longmapsto \limsup_{k\to\infty} f_k(x) \in \overline{I\!R},$$
$$\liminf_{k\to\infty} f_k : X \ni x \longmapsto \liminf_{k\to\infty} f_k(x) \in \overline{I\!R}$$

são mensuráveis.

Demonstração. Basta observar que:

$$\limsup_{k\to\infty} f_k = \inf_{r\ge 1} \sup_{k\ge r} f_k, \quad \liminf_{k\to\infty} f_k = \sup_{r\ge 1} \inf_{k\ge r} f_k. \quad \square$$

2.1.24. Corolário. *Seja* $(X, \mathcal{A})$ *um espaço mensurável e seja* $(f_k)_{k\ge1}$ *uma seqüência de funções mensuráveis* $f_k : X \to \overline{I\!R}$. *Se para todo* $x \in X$ *a seqüência* $\big(f_k(x)\big)_{k\ge1}$ *converge em* $\overline{I\!R}$ *então a função:*

$$\lim_{k\to\infty} f_k : X \ni x \longmapsto \lim_{k\to\infty} f_k(x) \in \overline{I\!R}$$

é mensurável.

Demonstração. Basta observar que:

$$\lim_{k\to\infty} f_k = \liminf_{k\to\infty} f_k = \limsup_{k\to\infty} f_k. \qquad \square$$

2.1.1. Funções Simples.

2.1.25. Definição. Uma função é dita *simples* quando sua imagem é um conjunto finito.

2.1.26. Lema. *Seja* X *um conjunto e sejam* $f : X \to \overline{I\!R}$, $g : X \to \overline{I\!R}$ *funções simples.*

- *se a soma* $f(x) + g(x)$ *estiver bem definida para todo* $x \in X$ *então a função* $f + g$ *é simples;*
- *o produto* fg *é uma função simples.*

Demonstração. A imagem de $f + g$ está contida no conjunto:

$$\big\{a + b : a \in \mathrm{Im}(f),\, b \in \mathrm{Im}(g) \text{ e a soma } a + b \text{ está bem definida}\big\};$$

tal conjunto é obviamente finito. Similarmente, a imagem de fg está contida no conjunto finito $\{ab : a \in \mathrm{Im}(f),\, b \in \mathrm{Im}(g)\big\}$. $\square$

2.1.27. Lema. *Sejam* $(X, \mathcal{A})$ *um espaço mensurável e* $f : X \to \overline{I\!R}$ *uma função simples. Então* f *é mensurável se e somente se* $f^{-1}(c) \in \mathcal{A}$ *para todo* $c \in \mathrm{Im}(f)$.

Demonstração. Se f é uma função mensurável então $f^{-1}(c) \in \mathcal{A}$ para todo $c \in \mathrm{Im}(f)$, já que $\{c\}$ é um Boreleano de $\overline{I\!R}$. Reciprocamente, se $f^{-1}(c) \in \mathcal{A}$ para todo $c \in \mathrm{Im}(f)$ então a mensurabilidade de f segue do Lema 2.1.13, já que:

$$X = \bigcup_{c\in\mathrm{Im}(f)} f^{-1}(c)$$

é uma cobertura finita de X por conjuntos mensuráveis e a restrição de f a cada conjunto $f^{-1}(c)$ é mensurável (veja Exercício 2.1). $\square$

2.1.28. Definição. Seja X um conjunto e seja $A \subset X$ um subconjunto de X. A *função característica* de A, definida em X, é a função $\chi_A : X \to I\!R$ definida por $\chi_A(x) = 1$ para $x \in A$ e $\chi_A(x) = 0$ para $x \in X \setminus A$.

Observe que a notação χ_A não deixa explícito qual seja o domínio X da função característica de A que está sendo considerada; em geral, tal domínio deve ser deixado claro pelo contexto.

2.1.29. Observação. Se $(X, \mathcal{A})$ é um espaço mensurável e se $A \subset X$ é um subconjunto então a função característica $\chi_A : X \to I\!R$ é uma função simples. Segue do Lema 2.1.27 que χ_A é uma função mensurável se e somente se $A \in \mathcal{A}$.

2.1.30. Observação. Se $(X, \mathcal{A})$ é um espaço mensurável então, dados $A_1, \ldots, A_k \in \mathcal{A}$ e $c_1, \ldots, c_k \in \overline{I\!R}$, temos que a função:

$$\sum_{i=1}^{k} c_i \chi_{A_i} : X \longrightarrow \overline{I\!R} \tag{2.1.3}$$

é simples e mensurável, desde que esteja bem definida (i.e., desde que não ocorra $A_i \cap A_j \neq \emptyset$ com $c_i = +\infty$ e $c_j = -\infty$). De fato, isso segue da Proposição 2.1.19, do Lema 2.1.26 e da Observação 2.1.29. Reciprocamente, se $f : X \to \overline{I\!R}$ é uma função simples e mensurável, podemos escrevê-la na forma (2.1.3), com $A_i \in \mathcal{A}$ e $c_i \in \overline{I\!R}$, $i = 1, \ldots, k$. De fato, basta tomar $A_i = f^{-1}(c_i)$, onde $c_1, \ldots, c_k$ são os elementos (distintos) do conjunto finito $\mathrm{Im}(f)$. Note que os conjuntos A_i assim construídos constituem uma partição de X.

2.1.31. Lema. *Sejam $(X, \mathcal{A})$ um espaço mensurável, $f : X \to \overline{I\!R}$ uma função e $Y \in \mathcal{A}$. Então:*

(a) *$f|_Y$ é mensurável se e somente se $f\chi_Y$ é mensurável;*
(b) *$f|_Y$ é simples se e somente se $f\chi_Y$ é simples.*

Demonstração. Temos $X = Y \cup Y^{c}$, com $Y, Y^{c} \in \mathcal{A}$; além do mais, $f|_Y = (f\chi_Y)|_Y$ e $(f\chi_Y)|_{Y^{c}} \equiv 0$. Tendo em mente essas observações, o item (a) segue do Lema 2.1.13. O item (b) segue da igualdade:

$$f(Y) \setminus \{0\} = \mathrm{Im}(f\chi_Y) \setminus \{0\}. \qquad \square$$

2.1.32. Notação. Seja $(f_k)_{k\geq 1}$ uma seqüência de funções $f_k : X \to \overline{I\!R}$ e seja $f : X \to \overline{I\!R}$ uma função, onde X é um conjunto arbitrário. Escrevemos $f_k \nearrow f$ quando $f_k(x) \leq f_{k+1}(x)$ para todo $x \in X$ e todo $k \geq 1$ e $\lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x)$ para todo $x \in X$. Similarmente, escrevemos $f_k \searrow f$ quando $f_k(x) \geq f_{k+1}(x)$ para todo $x \in X$ e todo $k \geq 1$ e $\lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x)$ para todo $x \in X$.

2.1.33. Proposição. *Sejam $(X, \mathcal{A})$ um espaço mensurável. Para toda função mensurável $f : X \to [0, +\infty]$ existe uma seqüência $(f_k)_{k\geq 1}$ de funções simples e mensuráveis $f_k : X \to [0, +\infty[$ tal que $f_k \nearrow f$.*

Demonstração. Para cada $k \geq 1$ particionamos o intervalo $[0, k[$ em intervalos disjuntos de comprimento $\frac{1}{2^k}$; mais explicitamente, consideramos os intervalos:

$$\left[\tfrac{r}{2^k}, \tfrac{r+1}{2^k}\right[, \quad r = 0, 1, \ldots, k2^k - 1. \tag{2.1.4}$$

Para cada $x \in X$ temos $f(x) \geq k$ ou então $f(x)$ pertence a exatamente um dos intervalos (2.1.4); se $f(x) \geq k$ definimos $f_k(x) = k$ e, caso contrário, tomamos $f_k(x)$ como sendo a extremidade esquerda do intervalo da coleção (2.1.4) ao qual $f(x)$ pertence. Em símbolos, temos:

$$f_k = k\,\chi_{f^{-1}\left([k,+\infty]\right)} + \sum_{r=0}^{k2^k-1} \frac{r}{2^k}\,\chi_{f^{-1}\left(\left[\frac{r}{2^k},\frac{r+1}{2^k}\right[\right)}.$$

Temos então que f_k é uma função simples e mensurável para todo $k \ge 1$ (veja Observação 2.1.30). Note que:

$$\big|f_k(x) - f(x)\big| < \frac{1}{2^k}, \tag{2.1.5}$$

para todo $x \in X$ com $f(x) < k$. Afirmamos que $\lim_{k\to\infty} f_k = f$. De fato, seja $x \in X$ fixado. Se $f(x) < +\infty$ então vale (2.1.5) para $k > f(x)$ e portanto $\lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x)$. Se $f(x) = +\infty$ então $f_k(x) = k$ para todo $k \ge 1$ e portanto $\lim_{k\to\infty} f_k(x) = +\infty = f(x)$. Para completar a demonstração, vamos mostrar agora que:

$$f_k(x) \le f_{k+1}(x), \tag{2.1.6}$$

para todos $x \in X$ e $k \ge 1$. Sejam $x \in X$ e $k \ge 1$ fixados. Se $f(x) \ge k+1$, então $f_k(x) = k$ e $f_{k+1}(x) = k+1$, donde (2.1.6) é satisfeita. Senão, seja $r = 0, \ldots, (k+1)2^{k+1} - 1$ o único inteiro tal que $\frac{r}{2^{k+1}} \le f(x) < \frac{r+1}{2^{k+1}}$; temos $f_{k+1}(x) = \frac{r}{2^{k+1}}$. Seja s o maior inteiro menor ou igual a $\frac{r}{2}$; daí $s \le \frac{r}{2} < \frac{r+1}{2} \le s+1$ e portanto:

$$\frac{s}{2^k} \le \frac{r}{2^{k+1}} \le f(x) < \frac{r+1}{2^{k+1}} \le \frac{s+1}{2^k}.$$

Se $f(x) \in [0,k[$, segue que $f_k(x) = \frac{s}{2^k} \le \frac{r}{2^{k+1}} = f_{k+1}(x)$. Caso contrário, se $f(x) \in [k, k+1[$ então $r \ge k2^{k+1}$ e $f_{k+1}(x) = \frac{r}{2^{k+1}} \ge k = f_k(x)$. Em todo caso, a desigualdade (2.1.6) é satisfeita. $\square$

2.2. Integrando Funções Simples não Negativas

Ao longo de toda esta seção consideramos fixado um espaço de medida $(X, \mathcal{A}, \mu)$. Recorde que uma função $f : X \to [0,+\infty]$ é simples e mensurável se e somente se $\mathrm{Im}(f)$ é um subconjunto finito de $[0,+\infty]$ e $f^{-1}(c) \in \mathcal{A}$ para todo $c \in \mathrm{Im}(f)$ (vide Definição 2.1.25 e Lema 2.1.27).

2.2.1. Definição. Se $f : X \to [0,+\infty]$ é uma função simples, mensurável e não negativa então a *integral* de f é definida por:

$$\int_X f\,\mathrm{d}\mu = \sum_{c\in\mathrm{Im}(f)} c\,\mu\big(f^{-1}(c)\big).$$

A integral $\int_X f\,\mathrm{d}\mu$ será também às vezes denotada por:

$$\int_X f(x)\,\mathrm{d}\mu(x).$$

Obviamente, para toda função simples mensurável $f : X \to [0,+\infty]$, temos:

$$\int_X f \,\mathrm{d}\mu \geq 0.$$

Se $Y \in \mathcal{A}$ é um conjunto mensurável então é fácil ver que a restrição de μ à σ-álgebra $\mathcal{A}|_Y = \mathcal{A} \cap \wp(Y)$ é também uma medida, de modo que a trinca $(Y, \mathcal{A}|_Y, \mu|_{(\mathcal{A}|_Y)})$ é um espaço de medida. Se f é uma função a valores em $\overline{I\!R}$ cujo domínio contém Y e tal que $f|_Y$ é simples, mensurável e não negativa então a integral de $f|_Y$ será denotada por:

$$\int_Y f \,\mathrm{d}\mu = \int_Y f(x) \,\mathrm{d}\mu(x).$$

2.2.2. Lema. *Seja $f : X \to \overline{I\!R}$ uma função e seja $Y \in \mathcal{A}$. Suponha que $f|_Y$ é simples, mensurável e não negativa (pelo Lema 2.1.31 isso equivale a dizer que $f\chi_Y$ é simples, mensurável e não negativa). Então:*

$$\int_Y f \,\mathrm{d}\mu = \int_X f\chi_Y \,\mathrm{d}\mu.$$

Demonstração. Temos:

$$\int_Y f \,\mathrm{d}\mu = \sum_{c \in f(Y)} c\,\mu\big((f|_Y)^{-1}(c)\big) = \sum_{\substack{c \in f(Y) \\ c \neq 0}} c\,\mu\big((f|_Y)^{-1}(c)\big),$$

$$\int_X f\chi_Y \,\mathrm{d}\mu = \sum_{c \in \mathrm{Im}(f\chi_Y)} c\,\mu\big((f\chi_Y)^{-1}(c)\big) = \sum_{\substack{c \in \mathrm{Im}(f\chi_Y) \\ c \neq 0}} c\,\mu\big((f\chi_Y)^{-1}(c)\big).$$

A conclusão segue das igualdades acima observando que para todo $c \neq 0$, temos $c \in f(Y)$ se e somente se $c \in \mathrm{Im}(f\chi_Y)$ e, nesse caso:

$$(f|_Y)^{-1}(c) = f^{-1}(c) \cap Y = (f\chi_Y)^{-1}(c). \qquad \square$$

2.2.3. Lema. *Sejam $A_1, \ldots, A_k \in \mathcal{A}$ conjuntos dois a dois disjuntos e sejam $c_1, \ldots, c_k \in [0,+\infty]$. Então:*

$$\int_X \sum_{i=1}^k c_i\chi_{A_i} \,\mathrm{d}\mu = \sum_{i=1}^k c_i\mu(A_i). \tag{2.2.1}$$

Demonstração. Eliminando os índices i tais que $c_i = 0$ ou $A_i = \emptyset$ não alteramos o resultado de nenhum dos dois lados da igualdade (2.2.1); podemos portanto supor que $c_i \neq 0$ e $A_i \neq \emptyset$ para todo $i = 1, \ldots, k$. Seja $f = \sum_{i=1}^k c_i\chi_{A_i}$. Temos $\mathrm{Im}(f) \setminus \{0\} = \{c_1, \ldots, c_k\}$; note que é possível ter $c_i = c_j$ para $i \neq j$. Para $c \in \mathrm{Im}(f)$, $c \neq 0$, temos:

$$f^{-1}(c) = \bigcup_{\substack{i=1 \\ c_i = c}}^k A_i$$

e portanto:

$$\mu\big(f^{-1}(c)\big) = \sum_{\substack{i=1\\ c_i=c}}^{k} \mu(A_i).$$

Logo:

$$\begin{aligned}\int_X f\,\mathrm{d}\mu &= \sum_{c\in\mathrm{Im}(f)} c\,\mu\big(f^{-1}(c)\big) = \sum_{\substack{c\in\mathrm{Im}(f)\\ c\neq 0}} c\,\mu\big(f^{-1}(c)\big) = \sum_{\substack{c\in\mathrm{Im}(f)\\ c\neq 0}} \sum_{\substack{i=1\\ c_i=c}}^{k} c\mu(A_i)\\ &= \sum_{\substack{c\in\mathrm{Im}(f)\\ c\neq 0}} \sum_{\substack{i=1\\ c_i=c}}^{k} c_i\mu(A_i) = \sum_{i=1}^{k} c_i\mu(A_i),\end{aligned}$$

onde na última igualdade usamos o fato que o conjunto $\{1,\ldots,k\}$ é união disjunta dos conjuntos $\big\{i\in\{1,\ldots,k\} : c_i = c\big\}$, com $c\in\mathrm{Im}(f)$, $c\neq 0$. □

2.2.4. Lema. *Sejam $f : X \to [0,+\infty]$, $g : X \to [0,+\infty]$ funções simples e mensuráveis. Então:*

$$\int_X f + g\,\mathrm{d}\mu = \int_X f\,\mathrm{d}\mu + \int_X g\,\mathrm{d}\mu.$$

Demonstração. Podemos escrever:

$$f = \sum_{i=1}^{k} c_i\chi_{A_i}, \quad g = \sum_{j=1}^{l} d_j\chi_{B_j},$$

onde tanto os conjuntos $A_1,\ldots,A_k\in\mathcal{A}$ como os conjuntos $B_1,\ldots,B_l\in\mathcal{A}$ constituem uma partição de X (veja Observação 2.1.30). Temos:

$$\sum_{j=1}^{l} \chi_{B_j} = 1$$

e portanto:

$$\chi_{A_i} = \sum_{j=1}^{l} \chi_{A_i}\chi_{B_j} = \sum_{j=1}^{l} \chi_{A_i\cap B_j},$$

para todo $i = 1,\ldots,k$; daí:

$$f = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l} c_i\chi_{A_i\cap B_j}. \tag{2.2.2}$$

Como os conjuntos $A_i\cap B_j$, $i = 1,\ldots,k$, $j = 1,\ldots,l$ são dois a dois disjuntos, o Lema 2.2.3 nos dá:

$$\int_X f\,\mathrm{d}\mu = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l} c_i\mu(A_i\cap B_j). \tag{2.2.3}$$

Analogamente, mostra-se que:

$$g=\sum_{j=1}^{l}\sum_{i=1}^{k}d_j\chi_{B_j\cap A_i} \tag{2.2.4}$$

e portanto:

$$\int_X g\,\mathrm{d}\mu=\sum_{j=1}^{l}\sum_{i=1}^{k}d_j\mu(B_j\cap A_i). \tag{2.2.5}$$

De (2.2.2) e (2.2.4) obtemos:

$$f+g=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l}(c_i+d_j)\chi_{A_i\cap B_j};$$

novamente, o Lema 2.2.3 nos dá:

$$\int_X f+g\,\mathrm{d}\mu=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l}(c_i+d_j)\mu(A_i\cap B_j). \tag{2.2.6}$$

A conclusão segue de (2.2.3), (2.2.5) e (2.2.6). □

2.2.5. Corolário. *Dados $A_1,\ldots,A_k\in\mathcal{A}$ (conjuntos não necessariamente disjuntos) e $c_1,\ldots,c_k\in[0,+\infty]$ então:*

$$\int_X\sum_{i=1}^{k}c_i\chi_{A_i}\,\mathrm{d}\mu=\sum_{i=1}^{k}c_i\mu(A_i).$$

Demonstração. Basta observar que:

$$\int_X\sum_{i=1}^{k}c_i\chi_{A_i}\,\mathrm{d}\mu=\sum_{i=1}^{k}\int_X c_i\chi_{A_i}\,\mathrm{d}\mu=\sum_{i=1}^{k}c_i\mu(A_i).$$ □

2.2.6. Notação. Se $f:X\to\overline{I\!R}$, $g:X\to\overline{I\!R}$ são funções então escrevemos $f\le g$ quando $f(x)\le g(x)$, para todo $x\in X$.

2.2.7. Corolário. *Sejam $f:X\to[0,+\infty]$, $g:X\to[0,+\infty]$ funções simples mensuráveis. Se $f\le g$ então:*

$$\int_X f\,\mathrm{d}\mu\le\int_X g\,\mathrm{d}\mu.$$

Demonstração. Defina $h:X\to[0,+\infty]$ fazendo:

$$h(x)=\begin{cases}g(x)-f(x), & \text{se } x\in f^{-1}\big([0,+\infty[\big),\\ 0, & \text{se } x\in f^{-1}(+\infty),\end{cases}$$

para todo $x\in X$. Temos $g=f+h$. A função h é mensurável, pelo Lema 2.1.13 e pela Proposição 2.1.19. Além do mais, a função h é simples já que sua imagem está contida no conjunto finito:

$$\{0\}\cup\big\{a-b:a\in\mathrm{Im}(g),\,b\in\mathrm{Im}(f)\text{ e }b<+\infty\big\}.$$

Segue então do Lema 2.2.4 que:

$$\int_X g \,\mathrm{d}\mu = \int_X f \,\mathrm{d}\mu + \int_X h \,\mathrm{d}\mu \geq \int_X f \,\mathrm{d}\mu,$$

já que $\int_X h \,\mathrm{d}\mu \geq 0$. □

2.2.8. Lema. *Sejam $f : X \to [0, +\infty]$ uma função simples mensurável e $c \in [0, +\infty]$. Então:*

$$\int_X cf \,\mathrm{d}\mu = c \int_X f \,\mathrm{d}\mu.$$

Demonstração. Escreva:

$$f = \sum_{i=1}^{k} c_i \chi_{A_i},$$

onde os conjuntos $A_1, \ldots, A_k \in \mathcal{A}$ constituem uma partição de X. Daí:

$$cf = \sum_{i=1}^{k} cc_i \chi_{A_i}.$$

O Lema 2.2.3 nos dá então:

$$\int_X cf \,\mathrm{d}\mu = \sum_{i=1}^{k} cc_i \mu(A_i) = c \sum_{i=1}^{k} c_i \mu(A_i) = c \int_X f \,\mathrm{d}\mu. \qquad \square$$

2.3. Integrando Funções Mensuráveis não Negativas

Ao longo de toda esta seção consideramos fixado um espaço de medida $(X, \mathcal{A}, \mu)$. Dada uma função mensurável não negativa $f : X \to [0, +\infty]$ consideramos o conjunto:

$$\mathcal{I}(f) = \Big\{ \int_X \phi \,\mathrm{d}\mu : \phi : X \to [0, +\infty] \text{ é função simples mensurável tal que } \phi \leq f \Big\} \subset [0, +\infty]. \tag{2.3.1}$$

Observe que o conjunto $\mathcal{I}(f)$ não é vazio, já que a função $\phi \equiv 0$ é simples, mensurável, não negativa e menor ou igual a f, de modo que $0 \in \mathcal{I}(f)$. Afirmamos que se $f : X \to [0, +\infty]$ é uma função simples mensurável então:

$$\int_X f \,\mathrm{d}\mu = \sup \mathcal{I}(f).$$

De fato, nesse caso f é uma função simples, mensurável, não negativa e menor ou igual a f, de modo que $\int_X f \,\mathrm{d}\mu \in \mathcal{I}(f)$ e $\sup \mathcal{I}(f) \geq \int_X f \,\mathrm{d}\mu$. Por outro lado, o Corolário 2.2.7 implica que $\int_X \phi \,\mathrm{d}\mu \leq \int_X f \,\mathrm{d}\mu$ para toda função simples mensurável $\phi : X \to [0, +\infty]$ tal que $\phi \leq f$; portanto $\int_X f \,\mathrm{d}\mu$ é uma cota superior de $\mathcal{I}(f)$ e $\sup \mathcal{I}(f) \leq \int_X f \,\mathrm{d}\mu$.

Em vista das considerações acima podemos introduzir a seguinte:

2.3.1. Definição. Se $f : X \to [0, +\infty]$ é uma função mensurável não negativa então a *integral* de f é definida por:

$$\int_X f \,\mathrm{d}\mu = \sup \mathcal{I}(f) \in [0, +\infty],$$

onde $\mathcal{I}(f)$ é o conjunto definido em (2.3.1).

Como no caso de funções simples, a integral $\int_X f \,\mathrm{d}\mu$ será também às vezes denotada por:

$$\int_X f(x) \,\mathrm{d}\mu(x).$$

Além do mais, se $Y \in \mathcal{A}$ e se f é uma função a valores em $\overline{I\!R}$ cujo domínio contém Y e tal que $f|_Y$ é mensurável e não negativa então a integral de $f|_Y$ com respeito à medida $\mu|_{(\mathcal{A}|_Y)}$ será denotada por:

$$\int_Y f \,\mathrm{d}\mu = \int_Y f(x) \,\mathrm{d}\mu(x).$$

2.3.2. Lema. *Sejam $f : X \to [0, +\infty]$, $g : X \to [0, +\infty]$ funções mensuráveis. Se $f \le g$ então:*

$$\int_X f \,\mathrm{d}\mu \le \int_X g \,\mathrm{d}\mu.$$

Demonstração. Se $\phi : X \to [0, +\infty]$ é uma função simples mensurável tal que $\phi \le f$ então também $\phi \le g$; isso implica que $\mathcal{I}(f) \subset \mathcal{I}(g)$ e portanto $\sup \mathcal{I}(f) \le \sup \mathcal{I}(g)$. □

2.3.3. Teorema (da convergência monotônica). *Seja $(f_n)_{n \ge 1}$ uma seqüência de funções mensuráveis não negativas $f_n : X \to [0, +\infty]$. Se $f_n \nearrow f$ então $f : X \to [0, +\infty]$ é mensurável e:*

$$\int_X f \,\mathrm{d}\mu = \lim_{n \to \infty} \int_X f_n \,\mathrm{d}\mu.$$

Demonstração. A mensurabilidade de f segue do Corolário 2.1.24. O Lema 2.3.2 implica que $\big(\int_X f_n \,\mathrm{d}\mu\big)_{n \ge 1}$ é uma seqüência crescente e que:

$$\lim_{n \to \infty} \int_X f_n \,\mathrm{d}\mu \le \int_X f \,\mathrm{d}\mu.$$

Para mostrar a desigualdade oposta, é suficiente verificar que:

$$\lim_{n \to \infty} \int_X f_n \,\mathrm{d}\mu \ge \int_X \phi \,\mathrm{d}\mu, \tag{2.3.2}$$

para toda função simples mensurável $\phi : X \to [0, +\infty]$ tal que $\phi \le f$. Escreva $\phi = \sum_{i=1}^k c_i \chi_{A_i}$, com $c_1, \ldots, c_k \in \,]0, +\infty]$ e $A_1, \ldots, A_k \in \mathcal{A}$ dois a dois disjuntos e não vazios. Fixados $c'_1, \ldots, c'_k > 0$ com $c'_i < c_i$, $i = 1, \ldots, k$, definimos:

$$A_i^n = \big\{x \in A_i : f_n(x) \ge c'_i\big\} = f_n^{-1}\big([c'_i, +\infty]\big) \cap A_i \in \mathcal{A},$$

para todo $n \geq 1$. Para $n \geq 1$ fixado, os conjuntos A_i^n, $i = 1, \ldots, k$ são dois a dois disjuntos e:

$$f_n \geq \sum_{i=1}^k c_i' \chi_{A_i^n};$$

os Lemas 2.3.2 e 2.2.3 nos dão então:

$$\int_X f_n \, \mathrm{d}\mu \geq \sum_{i=1}^k c_i' \mu(A_i^n). \tag{2.3.3}$$

Note que para todo $x \in A_i$ temos $f(x) \geq \phi(x) = c_i > c_i'$ e portanto, como $f_n \nearrow f$, temos que $A_i^n \nearrow A_i$. O Lema 1.4.48 nos dá então:

$$\lim_{n \to \infty} \mu(A_i^n) = \mu(A_i);$$

fazendo $n \to \infty$ em (2.3.3) obtemos (veja Exercício 1.5):

$$\lim_{n \to \infty} \int_X f_n \, \mathrm{d}\mu \geq \sum_{i=1}^k c_i' \mu(A_i). \tag{2.3.4}$$

Como a desigualdade (2.3.4) vale para quaisquer $c_i' \in \,]0, c_i[$, temos:

$$\lim_{n \to \infty} \int_X f_n \, \mathrm{d}\mu \geq \sum_{i=1}^k c_{i,m}' \mu(A_i), \tag{2.3.5}$$

para todo $m \geq 1$, onde $(c_{i,m}')_{m \geq 1}$ é uma seqüência crescente (arbitrariamente escolhida) em $]0, c_i[$ que converge para c_i. Fazendo $m \to \infty$ em (2.3.5) obtemos:

$$\lim_{n \to \infty} \int_X f_n \, \mathrm{d}\mu \geq \sum_{i=1}^k c_i \mu(A_i) = \int_X \phi \, \mathrm{d}\mu,$$

o que prova (2.3.2) e completa a demonstração. □

2.3.4. Lema. *Seja $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ uma função e seja $Y \in \mathcal{A}$. Suponha que $f|_Y$ é mensurável e não negativa (pelo Lema 2.1.31 isso equivale a dizer que $f\chi_Y$ é mensurável e não negativa). Então:*

$$\int_Y f \, \mathrm{d}\mu = \int_X f \chi_Y \, \mathrm{d}\mu.$$

Demonstração. Pela Proposição 2.1.33 existe uma seqüência $(f_n)_{n \geq 1}$ de funções simples mensuráveis $f_n : X \to [0, +\infty[$ tal que $f_n \nearrow f\chi_Y$. Como cada f_n é simples o Lema 2.2.2 nos dá:

$$\int_Y f_n \, \mathrm{d}\mu = \int_X f_n \chi_Y \, \mathrm{d}\mu,$$

para todo $n \geq 1$. Obviamente $f_n|_Y \nearrow f|_Y$ e $(f_n \chi_Y) \nearrow (f\chi_Y)$. A conclusão segue portanto do Teorema 2.3.3 fazendo $n \to \infty$ na igualdade acima. □

2.3.5. COROLÁRIO. *Se* $f : X \to [0, +\infty]$ *é uma função mensurável então:*

$$\int_Y f \, \mathrm{d}\mu \leq \int_X f \, \mathrm{d}\mu,$$

para todo $Y \in \mathcal{A}$.

DEMONSTRAÇÃO. Temos:

$$\int_Y f \, \mathrm{d}\mu = \int_X f\chi_Y \, \mathrm{d}\mu \leq \int_X f \, \mathrm{d}\mu,$$

onde na última desigualdade usamos o Lema 2.3.2. □

2.3.6. LEMA. *Sejam* $f : X \to [0, +\infty]$, $g : X \to [0, +\infty]$ *funções mensuráveis. Então:*

$$\int_X f + g \, \mathrm{d}\mu = \int_X f \, \mathrm{d}\mu + \int_X g \, \mathrm{d}\mu, \qquad \int_X cf \, \mathrm{d}\mu = c \int_X f \, \mathrm{d}\mu,$$

para qualquer $c \in [0, +\infty]$.

DEMONSTRAÇÃO. Pela Proposição 2.1.33 existem seqüências $(f_n)_{n\geq 1}$, $(g_n)_{n\geq 1}$ de funções simples mensuráveis $f_n : X \to [0, +\infty[$, $g_n : X \to [0, +\infty[$ tais que $f_n \nearrow f$ e $g_n \nearrow g$. Como as funções f_n e g_n são simples, os Lemas 2.2.4 e 2.2.8 nos dão:

$$\int_X f_n + g_n \, \mathrm{d}\mu = \int_X f_n \, \mathrm{d}\mu + \int_X g_n \, \mathrm{d}\mu, \qquad \int_X cf_n \, \mathrm{d}\mu = c \int_X f_n \, \mathrm{d}\mu.$$

Temos $(f_n + g_n) \nearrow (f + g)$ e $(cf_n) \nearrow (cf)$ (veja Lema 1.1.8 e Exercício 1.5). A conclusão segue portanto do Teorema 2.3.3 fazendo $n \to \infty$ nas igualdades acima. □

2.4. Definição da Integral: o Caso Geral

Ao longo de toda esta seção consideramos fixado um espaço de medida $(X, \mathcal{A}, \mu)$. Dada uma função mensurável arbitrária $f : X \to \overline{I\!R}$ então, como vimos no Lema 2.1.21, temos $f = f^+ - f^-$, onde a parte positiva f^+ e a parte negativa f^- de f são funções mensuráveis não negativas definidas em X. Obviamente, se f já é não negativa então $f^+ = f$ e $f^- = 0$, de modo que $\int_X f \, \mathrm{d}\mu = \int_X f^+ \, \mathrm{d}\mu - \int_X f^- \, \mathrm{d}\mu$. Em vista dessa observação, introduzimos a seguinte:

2.4.1. DEFINIÇÃO. Diremos que uma função $f : X \to \overline{I\!R}$ é *quase integrável* quando f for mensurável e a diferença $\int_X f^+ \, \mathrm{d}\mu - \int_X f^- \, \mathrm{d}\mu$ estiver bem-definida, ou seja, quando $\int_X f^+ \, \mathrm{d}\mu < +\infty$ ou $\int_X f^- \, \mathrm{d}\mu < +\infty$; nesse caso, definimos a *integral* de f fazendo:

$$\int_X f \, \mathrm{d}\mu = \int_X f^+ \, \mathrm{d}\mu - \int_X f^- \, \mathrm{d}\mu \in \overline{I\!R}.$$

Quando f é quase integrável e $\int_X f \, \mathrm{d}\mu \in I\!R$ (ou seja, se $\int_X f^+ \, \mathrm{d}\mu < +\infty$ *e* $\int_X f^- \, \mathrm{d}\mu < +\infty$) então dizemos que a função f é *integrável*.

Como na Seção 2.3, introduzimos também a notação alternativa:

$$\int_X f(x)\,\mathrm{d}\mu(x),$$

para a integral de f. Também, se $Y \in \mathcal{A}$ e se f é uma função a valores em $\overline{\mathbb{R}}$ cujo domínio contém Y então dizemos que f é *quase integrável em* Y (resp., *integrável em* Y) se a função $f|_Y$ for quase integrável (resp., integrável) com respeito à medida $\mu|_{(\mathcal{A}|_Y)}$; quando f for quase integrável em Y, a integral de $f|_Y$ com respeito à medida $\mu|_{(\mathcal{A}|_Y)}$ será denotada por:

$$\int_Y f\,\mathrm{d}\mu = \int_Y f(x)\,\mathrm{d}\mu(x).$$

2.4.2. Convenção. Seja $X \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ um subconjunto Lebesgue mensurável de $\mathbb{R}^n$ e seja $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ uma função mensurável; como sempre (recorde Convenções 2.1.3 e 2.1.11) assumimos que X é munido da σ-álgebra $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)|_X$ constituída pelos subconjuntos Lebesgue mensuráveis de $\mathbb{R}^n$ que estão contidos em X. Nesse contexto, a menos de menção explícita em contrário, quando usamos os adjetivos *quase integrável* e *integrável*, subentendemos que a σ-álgebra $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)|_X$ é munida da (restrição da) medida de Lebesgue $\mathfrak{m} : \mathcal{M}(\mathbb{R}^n) \to [0, +\infty]$. Quando for necessário enfatizar essa convenção, diremos também que f é *Lebesgue quase integrável* ou *Lebesgue integrável*, dependendo do caso.

2.4.3. Definição. Se $X \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ é um subconjunto Lebesgue mensurável de $\mathbb{R}^n$ e se $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ é uma função quase integrável então a integral de f com respeito à (restrição à $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)|_X$) da medida de Lebesgue $\mathfrak{m}$ será chamada a *integral de Lebesgue* de f e será denotada (seguindo as notações anteriormente introduzidas) por $\int_X f\,\mathrm{d}\mathfrak{m}$ ou por $\int_X f(x)\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(x)$.

2.4.4. Notação. Seja $f : I \to \overline{\mathbb{R}}$ uma função definida num intervalo $I \subset \mathbb{R}$. Dados $a, b \in I$ com $a \le b$ então, se f for quase integrável no intervalo $[a, b]$, denotamos por:

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}\mathfrak{m} = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(x)$$

a integral de Lebesgue de $f|_{[a,b]}$. Se $b < a$ e se f é quase integrável em $[b, a]$ então escrevemos:

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}\mathfrak{m} = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(x) \stackrel{\text{def}}{=} -\int_b^a f.$$

Se $a \in I$, I é ilimitado à direita e f é quase integrável em $[a, +\infty[$ então denotamos por:

$$\int_a^{+\infty} f\,\mathrm{d}\mathfrak{m} = \int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(x)$$

a integral de Lebesgue de $f|_{[a,+\infty[}$; escrevemos também:

$$\int_{+\infty}^a f\,\mathrm{d}\mathfrak{m} = \int_{+\infty}^a f(x)\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(x) \stackrel{\text{def}}{=} -\int_a^{+\infty} f\,\mathrm{d}\mathfrak{m}.$$

Similarmente, se $a \in I$, I é ilimitado à esquerda e f é quase integrável em $]-\infty, a]$ então denotamos por:

$$\int_{-\infty}^{a} f \, \mathrm{d}\mathfrak{m} = \int_{-\infty}^{a} f(x) \, \mathrm{d}\mathfrak{m}(x)$$

a integral de Lebesgue de $f|_{]-\infty,a]}$; escrevemos também:

$$\int_{a}^{-\infty} f \, \mathrm{d}\mathfrak{m} = \int_{a}^{-\infty} f(x) \, \mathrm{d}\mathfrak{m}(x) \stackrel{\text{def}}{=} -\int_{-\infty}^{a} f \, \mathrm{d}\mathfrak{m}.$$

Claramente a restrição de f ao intervalo degenerado $[a, a] = \{a\}$ é uma função simples integrável e:

$$\int_{a}^{a} f \, \mathrm{d}\mathfrak{m} = f^{+}(a)\mathfrak{m}\big(\{a\}\big) - f^{-}(a)\mathfrak{m}\big(\{a\}\big) = 0.$$

2.4.5. Lema. *Seja $f : X \to \overline{I\!R}$ uma função e seja $Y \in \mathcal{A}$. Então $f|_Y$ é quase integrável se e somente se $f\chi_Y$ é quase integrável; nesse caso:*

$$\int_{Y} f \, \mathrm{d}\mu = \int_{X} f\chi_Y \, \mathrm{d}\mu.$$

Demonstração. Pelo Lema 2.1.31, temos que $f|_Y$ é mensurável se e somente se $f\chi_Y$ é mensurável. Além do mais, temos:

$$(f|_Y)^{+} = f^{+}|_Y, \quad (f|_Y)^{-} = f^{-}|_Y,$$
$$(f\chi_Y)^{+} = f^{+}\chi_Y, \quad (f\chi_Y)^{-} = f^{-}\chi_Y.$$

A conclusão segue então das igualdades acima e do Lema 2.3.4. □

2.4.6. Lema. *Sejam $f_1 : X \to [0, +\infty]$, $f_2 : X \to [0, +\infty]$ funções mensuráveis não negativas tais que a diferença $f = f_1 - f_2$ esteja bem-definida (i.e., não existe $x \in X$ com $f_1(x) = f_2(x) = +\infty$). Então existe uma função mensurável não negativa $h : X \to [0, +\infty]$ tal que $f_1 = f^{+} + h$ e $f_2 = f^{-} + h$.*

Demonstração. Observe em primeiro lugar que $f^{+} \le f_1$. De fato, se $f(x) \ge 0$ então $f^{+}(x) = f(x) = f_1(x) - f_2(x) \le f_1(x)$ e se $f(x) < 0$ então $f^{+}(x) = 0 \le f_1(x)$. Definimos h fazendo:

$$h(x) = \begin{cases} f_1(x) - f^{+}(x), & \text{se } x \in f^{-1}(I\!R), \\ f_2(x), & \text{se } x \in f^{-1}(+\infty), \\ f_1(x), & \text{se } x \in f^{-1}(-\infty). \end{cases}$$

Claramente h é não negativa; a mensurabilidade de h segue do Lema 2.1.13 e da Proposição 2.1.19. Verifiquemos que $f_1 = f^{+} + h$ e $f_2 = f^{-} + h$. Para $x \in f^{-1}(I\!R)$, temos:

$$f^{+}(x) + h(x) = f^{+}(x) + f_1(x) - f^{+}(x) = f_1(x),$$
$$f^{-}(x) + h(x) = f^{-}(x) + f_1(x) - f^{+}(x) = f_1(x) - f(x) = f_2(x).$$

Se $x \in f^{-1}(+\infty)$ então:

$$f^+(x) + h(x) = +\infty = f_1(x), \quad f^-(x) + h(x) = h(x) = f_2(x);$$

finalmente, se $x \in f^{-1}(-\infty)$:

$$f^+(x) + h(x) = h(x) = f_1(x), \quad f^-(x) + h(x) = +\infty = f_2(x). \qquad \square$$

2.4.7. Proposição. *Sejam $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$, $g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ funções quase integráveis e seja $c \in \mathbb{R}$.*

(a) *Se as somas $\int_X f \,\mathrm{d}\mu + \int_X g \,\mathrm{d}\mu$ e $f+g$ estiverem bem-definidas então a função $f+g$ é quase integrável e $\int_X f+g \,\mathrm{d}\mu = \int_X f \,\mathrm{d}\mu + \int_X g \,\mathrm{d}\mu$.*
(b) *A função cf é quase integrável e $\int_X cf \,\mathrm{d}\mu = c\int_X f \,\mathrm{d}\mu$.*

Demonstração. Temos:

$$f + g = (f^+ - f^-) + (g^+ - g^-) = (f^+ + g^+) - (f^- + g^-);$$

pelo Lema 2.4.6 existe uma função mensurável $h : X \to [0, +\infty]$ tal que:

$$f^+ + g^+ = (f+g)^+ + h, \quad f^- + g^- = (f+g)^- + h.$$

O Lema 2.3.6 nos dá:

$$\int_X f^+ \,\mathrm{d}\mu + \int_X g^+ \,\mathrm{d}\mu = \int_X (f+g)^+ \,\mathrm{d}\mu + \int_X h \,\mathrm{d}\mu, \tag{2.4.1}$$

$$\int_X f^- \,\mathrm{d}\mu + \int_X g^- \,\mathrm{d}\mu = \int_X (f+g)^- \,\mathrm{d}\mu + \int_X h \,\mathrm{d}\mu. \tag{2.4.2}$$

Por definição temos:

$$\int_X f \,\mathrm{d}\mu = \int_X f^+ \,\mathrm{d}\mu - \int_X f^- \,\mathrm{d}\mu, \quad \int_X g \,\mathrm{d}\mu = \int_X g^+ \,\mathrm{d}\mu - \int_X g^- \,\mathrm{d}\mu.$$

A quase integrabilidade das funções f e g juntamente com o fato que a soma $\int_X f \,\mathrm{d}\mu + \int_X g \,\mathrm{d}\mu$ está bem definida implicam que o lado esquerdo de pelo menos uma das igualdades (2.4.1) e (2.4.2) é finito. Isso implica que a integral de h é finita e que pelo menos uma das integrais $\int_X (f+g)^+ \,\mathrm{d}\mu$, $\int_X (f+g)^- \,\mathrm{d}\mu$ é finita, i.e., $f+g$ é quase integrável. A demonstração do item (a) é obtida então subtraindo a igualdade (2.4.2) da igualdade (2.4.1).

Para demonstrar o item (b), consideramos primeiramente o caso que $c \ge 0$. Nesse caso, usando o Lema 2.3.6, temos:

$$\int_X (cf)^+ \,\mathrm{d}\mu = \int_X cf^+ \,\mathrm{d}\mu = c\int_X f^+ \,\mathrm{d}\mu,$$
$$\int_X (cf)^- \,\mathrm{d}\mu = \int_X cf^- \,\mathrm{d}\mu = c\int_X f^- \,\mathrm{d}\mu.$$

Isso mostra que cf é quase integrável e $\int_X cf \, \mathrm{d}\mu = c \int_X f \, \mathrm{d}\mu$. Se $c < 0$ temos:

$$\int_X (cf)^+ \, \mathrm{d}\mu = \int_X (-c) f^- \, \mathrm{d}\mu = (-c) \int_X f^- \, \mathrm{d}\mu,$$
$$\int_X (cf)^- \, \mathrm{d}\mu = \int_X (-c) f^+ \, \mathrm{d}\mu = (-c) \int_X f^+ \, \mathrm{d}\mu,$$

o que completa a demonstração do item (b). □

2.4.8. Lema. *Sejam $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$, $g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ funções quase integráveis. Se $f \le g$ então $\int_X f \, \mathrm{d}\mu \le \int_X g \, \mathrm{d}\mu$.*

Demonstração. Verifica-se facilmente que $f^+ \le g^+$ e $f^- \ge g^-$, donde, pelo Lema 2.3.2:

$$\int_X f^+ \, \mathrm{d}\mu \le \int_X g^+ \, \mathrm{d}\mu, \quad \int_X f^- \, \mathrm{d}\mu \ge \int_X g^- \, \mathrm{d}\mu.$$

A conclusão é obtida subtraindo as duas desigualdades acima. □

2.4.9. Lema. *Dada uma função $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$, temos:*

(a) *se f é quase integrável então $f|_Y$ também é quase integrável para todo $Y \in \mathcal{A}$;*

(b) *se $X_1, \ldots, X_k \in \mathcal{A}$ são conjuntos dois a dois disjuntos tais que $X = \bigcup_{i=1}^k X_i$, $f|_{X_i}$ é quase integrável para $i = 1, \ldots, k$ e tais que a soma:*

$$\int_{X_1} f \, \mathrm{d}\mu + \int_{X_2} f \, \mathrm{d}\mu + \cdots + \int_{X_k} f \, \mathrm{d}\mu \tag{2.4.3}$$

está bem definida então f é quase integrável e $\int_X f \, \mathrm{d}\mu$ é igual à soma (2.4.3).

Demonstração. Pelos Corolário 2.3.5 temos:

$$\int_Y f^+ \, \mathrm{d}\mu \le \int_X f^+ \, \mathrm{d}\mu, \quad \int_Y f^- \, \mathrm{d}\mu \le \int_X f^- \, \mathrm{d}\mu,$$

o que prova o item (a). Passemos à prova do item (b). Temos:

$$f = f\chi_{X_1} + f\chi_{X_2} + \cdots + f\chi_{X_k}.$$

Pelo Lema 2.4.5, as funções $f\chi_{X_i}$ são quase integráveis e:

$$\int_{X_i} f \, \mathrm{d}\mu = \int_X f\chi_{X_i} \, \mathrm{d}\mu,$$

para $i = 1, \ldots, k$. A conclusão segue da Proposição 2.4.7. □

2.4.10. Lema. *Se $\mu(X) = 0$ então $\int_X f \, \mathrm{d}\mu = 0$ para toda função mensurável $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$.*

Demonstração. Se $\phi : X \to [0, +\infty]$ é uma função simples mensurável então $\int_X \phi \,\mathrm{d}\mu = 0$, já que $\mu\big(\phi^{-1}(c)\big) = 0$, para todo $c \in \mathrm{Im}(\phi)$. Daí, se f é não negativa então $\int_X f \,\mathrm{d}\mu = 0$, já que $\int_X \phi \,\mathrm{d}\mu = 0$ para toda função simples mensurável não negativa $\phi \le f$. Finalmente, se $f : X \to \overline{I\!R}$ é uma função mensurável arbitrária então $\int_X f^+ \,\mathrm{d}\mu = \int_X f^- \,\mathrm{d}\mu = 0$ e portanto $\int_X f \,\mathrm{d}\mu = 0$. □

2.4.11. Corolário. *Se $X' \in \mathcal{A}$ é tal que $\mu(X \setminus X') = 0$ então uma função mensurável $f : X \to \overline{I\!R}$ é quase integrável se e somente se $f|_{X'}$ é quase integrável e nesse caso $\int_X f \,\mathrm{d}\mu = \int_{X'} f \,\mathrm{d}\mu$.*

Demonstração. Pelo Lema 2.4.10 temos $\int_{X\setminus X'} f \,\mathrm{d}\mu = 0$. A conclusão segue do Lema 2.4.9, já que:

$$\int_X f \,\mathrm{d}\mu = \int_{X'} f \,\mathrm{d}\mu + \int_{X\setminus X'} f \,\mathrm{d}\mu.$$ □

A seguinte terminologia é extremamente conveniente:

2.4.12. Definição. Dizemos que uma propriedade $\mathbb{P}$ referente a pontos do espaço de medida X é válida *quase sempre* (ou em *quase todo ponto* de X) se existe um conjunto $X' \in \mathcal{A}$ tal que $\mu(X \setminus X') = 0$ e tal que a propriedade $\mathbb{P}$ é válida em todos os pontos de X'. Dizemos também que a propriedade $\mathbb{P}$ é satisfeita q. s. (ou μ-q. s.).

2.4.13. Corolário. *Sejam $f : X \to \overline{I\!R}$, $g : X \to \overline{I\!R}$ funções mensuráveis. Se $f = g$ quase sempre então f é quase integrável se e somente se g é quase integrável e, nesse caso, $\int_X f \,\mathrm{d}\mu = \int_X g \,\mathrm{d}\mu$.*

Demonstração. Por hipótese existe $X' \in \mathcal{A}$ tal que $\mu(X \setminus X') = 0$ e $f|_{X'} = g|_{X'}$. A conclusão segue do Corolário 2.4.11, já que:

$$\int_X f \,\mathrm{d}\mu = \int_{X'} f \,\mathrm{d}\mu = \int_{X'} g \,\mathrm{d}\mu = \int_X g \,\mathrm{d}\mu.$$ □

2.5. Teoremas de Convergência

No que segue, $(X, \mathcal{A}, \mu)$ denota sempre um espaço de medida.

2.5.1. Teorema (da convergência monotônica). *Seja $(f_n)_{n\ge 1}$ uma seqüência de funções mensuráveis $f_n : X \to \overline{I\!R}$ e seja $f : X \to \overline{I\!R}$ uma função mensurável. Suponha que f_1 é quase integrável. Então:*

(a) *se $\int_X f_1 \,\mathrm{d}\mu > -\infty$ e $f_n \nearrow f$ q. s. então f e f_n são quase integráveis para todo $n \ge 1$ e $\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \,\mathrm{d}\mu = \int_X f \,\mathrm{d}\mu$;*

(b) *se $\int_X f_1 \,\mathrm{d}\mu < +\infty$ e $f_n \searrow f$ q. s. então f e f_n são quase integráveis para todo $n \ge 1$ e $\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \,\mathrm{d}\mu = \int_X f \,\mathrm{d}\mu$.*

Demonstração. É suficiente provar o item (a), já que o item (b) segue do item (a) trocando f_n por $-f_n$ e f por $-f$. Em primeiro lugar, como $\int_X f_1 \,\mathrm{d}\mu > -\infty$, segue do resultado do Exercício 2.16 que $f_1 > -\infty$ quase sempre; existe portanto um subconjunto mensurável X' de X com complementar de medida nula tal que $f_1(x) > -\infty$ e $f_n(x) \nearrow f(x)$, para todo $x \in X'$. Em vista do Corolário 2.4.11, é suficiente mostrar a tese do teorema para as restrições a X' das funções em questão. Para cada $n \geq 1$, defina $g_n : X' \to [0, +\infty]$ fazendo $g_n(x) = f_n(x) - f_1(x)$, se $f_1(x) < +\infty$ e $g_n(x) = 0$, se $f_1(x) = +\infty$; daí g_n é mensurável e $f_n = g_n + f_1$. De modo análogo, definimos $g : X' \to [0, +\infty]$ mensurável com $f = g + f_1$. Daí $g_n \nearrow g$ e portanto o Teorema 2.3.3 nos dá:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{X'} g_n \, \mathrm{d}\mu = \int_{X'} g \, \mathrm{d}\mu. \tag{2.5.1}$$

Note que como $\int_{X'} f_1 \, \mathrm{d}\mu > -\infty$ e $\int_{X'} g_n \, \mathrm{d}\mu \geq 0$, o item (a) da Proposição 2.4.7 nos diz que $f_n = g_n + f_1$ é quase integrável e:

$$\int_{X'} f_n \, \mathrm{d}\mu = \int_{X'} g_n \, \mathrm{d}\mu + \int_{X'} f_1 \, \mathrm{d}\mu; \tag{2.5.2}$$

similarmente, f é quase integrável e $\int_{X'} f \, \mathrm{d}\mu = \int_{X'} g \, \mathrm{d}\mu + \int_{X'} f_1 \, \mathrm{d}\mu$. A conclusão é obtida agora fazendo $n \to \infty$ em (2.5.2) e usando (2.5.1). $\square$

2.5.2. Proposição (Lema de Fatou). *Seja $(f_n)_{n\geq 1}$ uma seqüência de funções mensuráveis $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$. Então:*

(a) *se existe uma função quase integrável $\phi : X \to \overline{\mathbb{R}}$ tal que $f_n \geq \phi$ q. s. para todo $n \geq 1$ e $\int_X \phi \, \mathrm{d}\mu > -\infty$ então f_n é quase integrável para todo $n \geq 1$, $\liminf_{n\to\infty} f_n$ é quase integrável e:*

$$\int_X \liminf_{n\to\infty} f_n \, \mathrm{d}\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n \, \mathrm{d}\mu;$$

(b) *se existe uma função quase integrável $\phi : X \to \overline{\mathbb{R}}$ tal que $f_n \leq \phi$ q. s. para todo $n \geq 1$ e $\int_X \phi \, \mathrm{d}\mu < +\infty$ então f_n é quase integrável para todo $n \geq 1$, $\limsup_{n\to\infty} f_n$ é quase integrável e:*

$$\limsup_{n\to\infty} \int_X f_n \, \mathrm{d}\mu \leq \int_X \limsup_{n\to\infty} f_n \, \mathrm{d}\mu.$$

Demonstração. É suficiente mostrar o item (a), já que o item (b) segue do item (a) trocando f_n por $-f_n$ e ϕ por $-\phi$. Em primeiro lugar, a quase integrabilidade das funções f_n segue do resultado do Exercício 2.17. Para cada $n \geq 1$ seja $g_n = \inf_{k\geq n} f_k$. Daí $g_n \geq \phi$ q. s., de modo que g_n é quase integrável e $\int_X g_n \, \mathrm{d}\mu > -\infty$; além do mais, $g_n \leq f_k$ para todo $k \geq n$ e portanto:

$$\int_X g_n \, \mathrm{d}\mu \leq \inf_{k\geq n} \int_X f_k \, \mathrm{d}\mu.$$

Claramente $g_n \nearrow (\liminf_{k\to\infty} f_k)$ e portanto a conclusão segue do item (a) do Teorema 2.5.1, fazendo $n \to \infty$ na desigualdade acima. $\square$

2.5.3. Notação. Se $(f_n)_{n\geq 1}$ é uma seqüência de funções $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$ e $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ é uma função então escrevemos $f_n \to f$ quando $(f_n)_{n\geq 1}$ convergir para f *pontualmente*, i.e., $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ para todo $x \in X$.

2.5.4. TEOREMA (da convergência dominada). *Seja* $(f_n)_{n\geq 1}$ *uma seqüência de funções mensuráveis* $f_n : X \to \overline{I\!R}$ *tal que* $f_n \to f$ *q. s., onde* $f : X \to \overline{I\!R}$ *é uma função mensurável. Se existe uma função integrável* $\phi : X \to [0, +\infty]$ *tal que* $|f_n| \leq \phi$ *q. s. para todo* $n \geq 1$ *então* f_n *é integrável para todo* $n \geq 1$, f *é integrável e:*

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \,\mathrm{d}\mu = \int_X f \,\mathrm{d}\mu.$$

DEMONSTRAÇÃO. A integrabilidade das funções f_n, f segue das desigualdades $|f_n| \leq \phi$ q. s. e $|f| \leq \phi$ q. s. e do resultado do Exercício 2.17. Como $-\phi \leq f_n \leq \phi$ q. s. para todo $n \geq 1$ e $\int_X \phi \,\mathrm{d}\mu \in I\!R$, estamos dentro das hipóteses de ambos os itens da Proposição 2.5.2 e portanto:

$$\begin{aligned}\int_X f \,\mathrm{d}\mu = \int_X \liminf_{n\to\infty} f_n \,\mathrm{d}\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n \,\mathrm{d}\mu \leq \limsup_{n\to\infty} \int_X f_n \,\mathrm{d}\mu \\ \leq \int_X \limsup_{n\to\infty} f_n \,\mathrm{d}\mu = \int_X f \,\mathrm{d}\mu.\end{aligned}$$

Logo $\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \,\mathrm{d}\mu = \int_X f \,\mathrm{d}\mu$. □

2.5.5. PROPOSIÇÃO. *Sejam* Y *um subconjunto de* $I\!R^n$, $y_0 \in I\!R^n$ *um ponto de acumulação de* Y *e* $f : X \times Y \to I\!R$ *uma função tal que:*

- *para todo* $y \in Y$, *a função* $X \ni x \mapsto f(x, y) \in I\!R$ *é integrável;*
- *para todo* $x \in X$ *o limite* $\lim_{y\to y_0} f(x, y)$ *existe em* $I\!R$*;*
- *existe uma função integrável* $\phi : X \to I\!R$ *e uma vizinhança* V *de* y_0 *em* $I\!R^n$ *tal que* $|f(x, y)| \leq \phi(x)$, *para todo* $x \in X$ *e todo* $y \in V \cap Y$ *com* $y \neq y_0$.

Então, a função $X \ni x \mapsto \lim_{y\to y_0} f(x, y) \in I\!R$ *é integrável, o limite* $\lim_{y\to y_0} \int_X f(x, y) \,\mathrm{d}\mu(x)$ *existe e:*

$$\lim_{y\to y_0} \int_X f(x, y) \,\mathrm{d}\mu(x) = \int_X \lim_{y\to y_0} f(x, y) \,\mathrm{d}\mu(x).$$

DEMONSTRAÇÃO. Considere a aplicação $g : Y \to I\!R$ definida por:

$$g(y) = \int_X f(x, y) \,\mathrm{d}\mu(x),$$

para todo $y \in Y$ e a aplicação $h : X \to I\!R$ definida por:

$$h(x) = \lim_{y\to y_0} f(x, y),$$

para todo $x \in X$. Devemos mostrar que h é integrável e que o limite $\lim_{y\to y_0} g(y)$ existe e é igual à integral de h. Seja $(y_n)_{n\geq 1}$ uma seqüência em Y com $y_n \neq y_0$ para todo $n \geq 1$ e $\lim_{n\to\infty} y_n = y_0$. Para cada $n \geq 1$, considere a função $f_n : X \to I\!R$ definida por $f_n(x) = f(x, y_n)$, para todo $x \in X$. Temos que f_n é integrável, para todo $n \geq 1$ e que $f_n \to h$. Para

n suficientemente grande temos $y_n \in V$ e portanto $|f_n| \le \phi$. Segue do Teorema 2.5.4 que h é integrável e que:

$$\int_X h \,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n \,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} g(y_n).$$

Como $(y_n)_{n\ge 1}$ é uma seqüência arbitrária em $Y \setminus \{y_0\}$ convergindo para y_0, segue que $\lim_{y\to y_0} g(y) = \int_X h \,\mathrm{d}\mu$. □

2.5.6. Corolário. *Seja Y um subconjunto de $\mathbb{R}^n$, y_0 um ponto de Y e $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ uma função tal que:*

- *para todo $y \in Y$, a função $X \ni x \mapsto f(x, y) \in \mathbb{R}$ é integrável;*
- *para todo $x \in X$, a função $Y \ni y \mapsto f(x, y) \in \mathbb{R}$ é contínua no ponto y_0;*
- *existe uma função integrável $\phi : X \to \mathbb{R}$ e uma vizinhança V de y_0 em $\mathbb{R}^n$ tal que $|f(x, y)| \le \phi(x)$, para todo $x \in X$ e todo $y \in V \cap Y$ com $y \ne y_0$.*

Então, a função $Y \ni y \mapsto \int_X f(x, y) \,\mathrm{d}\mu(x) \in \mathbb{R}$ é contínua no ponto y_0.

Demonstração. Se y_0 é um ponto isolado de Y então não há nada para ser mostrado, já que toda função é contínua em pontos isolados de seu domínio. Se y_0 é um ponto de acumulação de Y, a Proposição 2.5.5 nos dá:

$$\lim_{y\to y_0} \int_X f(x, y) \,\mathrm{d}\mu(x) = \int_X \lim_{y\to y_0} f(x, y) \,\mathrm{d}\mu(x) = \int_X f(x, y_0) \,\mathrm{d}\mu(x),$$

o que completa a demonstração. □

2.5.7. Proposição. *Sejam $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo com mais de um ponto, y_0 um ponto de I e $f : X \times I \to \mathbb{R}$ uma função tal que:*

- *para todo $y \in I$, a função $X \ni x \mapsto f(x, y) \in \mathbb{R}$ é integrável;*
- *para todo $x \in X$, a função $I \ni y \mapsto f(x, y) \in \mathbb{R}$ é derivável;*
- *existe uma função integrável $\phi : X \to \mathbb{R}$ e $\varepsilon > 0$ tal que:*
$$\Big|\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\Big| \le \phi(x),$$
para todo $x \in X$ e todo $y \in I \cap \,]y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon[$ com $y \ne y_0$.

Então a função $I \ni y \mapsto \int_X f(x, y) \,\mathrm{d}\mu(x) \in \mathbb{R}$ é derivável no ponto y_0, a função $X \ni x \mapsto \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0) \in \mathbb{R}$ é integrável e:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\Big|_{y=y_0} \int_X f(x, y) \,\mathrm{d}\mu(x) = \int_X \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0) \,\mathrm{d}\mu(x).$$

Demonstração. Considere a função $g : I \to \mathbb{R}$ definida por:

$$g(x, y) = \int_X f(x, y) \,\mathrm{d}\mu(x),$$

para todo $y \in I$. Dado $h \ne 0$ com $y_0 + h \in I$ então:

$$\frac{g(y_0 + h) - g(y_0)}{h} = \int_X \frac{f(x, y_0 + h) - f(x, y_0)}{h} \,\mathrm{d}\mu(x). \tag{2.5.3}$$

Obviamente:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x,y_0+h)-f(x,y_0)}{h}=\frac{\partial f}{\partial y}(x,y_0), \tag{2.5.4}$$

para todo $x\in X$. Se $h\neq 0$, $y_0+h\in I$ e $|h|\le\varepsilon$ então o Teorema do Valor Médio nos dá:

$$\Big|\frac{f(x,y_0+h)-f(x,y_0)}{h}\Big|=\Big|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y_0+\theta h)\Big|\le\phi(x), \tag{2.5.5}$$

onde $\theta\in\,]0,1[$. A conclusão segue da Proposição 2.5.5 e de (2.5.4) e (2.5.5), fazendo $h\to 0$ em (2.5.3). $\square$

2.6. Riemann x Lebesgue

No que segue usaremos sistematicamente a terminologia e notação introduzidas nas Definições 1.3.1 e 1.3.2. Introduzimos mais alguma terminologia sobre partições e blocos.

2.6.1. Definição. Seja B um bloco retangular n-dimensional tal que $|B|>0$ e seja $P=(P_1,\ldots,P_n)$ uma partição do bloco B. Uma partição $Q=(Q_1,\ldots,Q_n)$ de B é dita um *refinamento* de P se $Q_i\supset P_i$, para $i=1,\ldots,n$. A *norma* da partição P, denotada por $\|P\|$, é definida como o máximo dos diâmetros dos sub-blocos de B determinados por P.

Claramente se uma partição Q refina uma partição P então todo sub-bloco de B determinado por Q está contido em algum sub-bloco de B determinado por P.

No que segue, consideramos fixado um bloco retangular n-dimensional B com $|B|>0$ e uma função limitada $f:B\to I\!R$.

2.6.2. Definição. Se P é uma partição de B então a *soma inferior de Riemann* de f com respeito a P é definida por:

$$s(f;P)=\sum_{\mathfrak{b}\in\overline{P}}\inf f(\mathfrak{b})\,|\mathfrak{b}|,$$

e a *soma superior de Riemann* de f com respeito a P é definida por:

$$S(f;P)=\sum_{\mathfrak{b}\in\overline{P}}\sup f(\mathfrak{b})\,|\mathfrak{b}|.$$

Obviamente:

$$s(f;P)\le S(f;P), \tag{2.6.1}$$

para toda partição P de B.

Nós consideramos as seguintes funções $m_P:B\to I\!R$, $M_P:B\to I\!R$ associadas a uma partição P de B:

$$m_P=\sum_{\mathfrak{b}\in\overline{P}}\inf f(\mathfrak{b})\,\chi_{\mathrm{int}(\mathfrak{b})},\quad M_P=\sum_{\mathfrak{b}\in\overline{P}}\sup f(\mathfrak{b})\,\chi_{\mathrm{int}(\mathfrak{b})}.$$

Mais explicitamente, dado $x\in B$, se x pertence ao interior de algum sub-bloco $\mathfrak{b}$ de B determinado por P então o valor da função m_P (resp., da função M_P) no ponto x é igual ao ínfimo (resp., o supremo) de f no bloco $\mathfrak{b}$; se x pertence à fronteira de algum sub-bloco de B determinado por P então $m_P(x) = M_P(x) = 0$. Obviamente m_P e M_P são funções simples Lebesgue integráveis e:

$$\int_B m_P \,\mathrm{d}\mathfrak{m} = s(f;P), \quad \int_B M_P \,\mathrm{d}\mathfrak{m} = S(f;P), \tag{2.6.2}$$

já que $\mathfrak{m}\big(\mathrm{int}(\mathfrak{b})\big) = \mathfrak{m}(\mathfrak{b}) = |\mathfrak{b}|$, para todo $\mathfrak{b} \in \overline{P}$ (vide Corolário 1.4.8). Temos:

$$\inf f(B) \le m_P(x) \le f(x) \le M_P(x) \le \sup f(B), \quad \text{para todo } x \in \bigcup_{\mathfrak{b}\in\overline{P}} \mathrm{int}(\mathfrak{b}); \tag{2.6.3}$$

como a união das fronteiras dos blocos $\mathfrak{b} \in \overline{P}$ tem medida nula, segue que as desigualdades em (2.6.3) valem para quase todo $x \in B$. Se Q é uma partição de B que refina P então afirmamos que:

$$m_P(x) \le m_Q(x), \quad M_Q(x) \le M_P(x), \quad \text{para todo } x \in \bigcup_{\mathfrak{b}\in\overline{Q}} \mathrm{int}(\mathfrak{b}); \tag{2.6.4}$$

de fato, se $x \in \mathrm{int}(\mathfrak{b})$, para algum bloco $\mathfrak{b} \in \overline{Q}$ então $\mathfrak{b}$ está contido em algum bloco $\mathfrak{b}' \in \overline{P}$, donde $\mathrm{int}(\mathfrak{b}) \subset \mathrm{int}(\mathfrak{b}')$ e portanto:

$$m_P(x) = \inf f(\mathfrak{b}') \le \inf f(\mathfrak{b}) = m_Q(x),$$
$$M_Q(x) = \sup f(\mathfrak{b}) \le \sup f(\mathfrak{b}') = M_P(x).$$

2.6.3. Lema. *Dadas partições P e Q de B, se Q refina P então:*

$$s(f;P) \le s(f;Q), \quad S(f;Q) \le S(f;P).$$

Demonstração. Note que as desigualdades em (2.6.4) valem para quase todo $x \in B$. Basta então usar integração e as igualdades (2.6.2). □

2.6.4. Corolário. *Para quaisquer partições P e Q de B temos:*

$$s(f;P) \le S(f;Q).$$

Demonstração. Se $P = (P_1, \ldots, P_n)$ e $Q = (Q_1, \ldots, Q_n)$, denotamos por $P \cup Q$ a partição de B dada por $P \cup Q = (P_1 \cup Q_1, \ldots, P_n \cup Q_n)$; daí $P \cup Q$ refina tanto P como Q. Usando o Lema 2.6.3 e a desigualdade (2.6.1) obtemos:

$$s(f;P) \le s(f;P\cup Q) \le S(f;P\cup Q) \le S(f;Q).$$ □

2.6.5. Definição. A *integral inferior de Riemann* e a *integral superior de Riemann* de uma função limitada $f : B \to I\!R$ são definidas respectivamente por:

$$
{}^{(R)}\!\underline{\int} f = \sup\big\{s(f;P) : P \text{ partição de } B\big\},
$$

$$
{}^{(R)}\!\overline{\int} f = \inf\big\{S(f;P) : P \text{ partição de } B\big\}.
$$

Quando a integral inferior e a integral superior de f coincidem dizemos que f é *Riemann integrável* e nesse caso a *integral de Riemann* de f é definida por:

$$
{}^{(R)}\!\int f = {}^{(R)}\!\underline{\int} f = {}^{(R)}\!\overline{\int} f.
$$

Note que o Corolário 2.6.4 implica que:

$$
{}^{(R)}\!\underline{\int} f \le {}^{(R)}\!\overline{\int} f.
$$

Vamos agora determinar condições necessárias e suficientes para que uma função f seja Riemann integrável e vamos comparar a integral de Riemann de f com a integral de Lebesgue de f.

Consideraremos as funções $m : B \to I\!R$, $M : B \to I\!R$ definidas por:

$$
m(x) = \sup_{\delta>0} \inf_{\substack{y\in B\\ d(y,x)<\delta}} f(y), \qquad M(x) = \inf_{\delta>0} \sup_{\substack{y\in B\\ d(y,x)<\delta}} f(y),
$$

para todo $x \in B$. Claramente:

$$
\inf f(B) \le m(x) \le f(x) \le M(x) \le \sup f(B), \tag{2.6.5}
$$

para todo $x \in B$.

Temos o seguinte:

2.6.6. Lema. *Dado $x \in B$ então $m(x) = M(x)$ se e somente se f é contínua no ponto x.*

Demonstração. Suponha que f é contínua no ponto x. Dado $\varepsilon > 0$ então existe $\delta > 0$ tal que $f(x) - \varepsilon < f(y) < f(x) + \varepsilon$, para todo $y \in B$ com $d(y, x) < \delta$. Daí:

$$
\inf_{\substack{y\in B\\ d(y,x)<\delta}} f(y) \ge f(x) - \varepsilon, \qquad \sup_{\substack{y\in B\\ d(y,x)<\delta}} f(y) \le f(x) + \varepsilon,
$$

e portanto:

$$
f(x) - \varepsilon \le m(x) \le M(x) \le f(x) + \varepsilon.
$$

Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, segue que $m(x) = M(x)$. Reciprocamente, suponha que $m(x) = M(x)$; daí, por (2.6.5), temos $m(x) = f(x) = M(x)$. Portanto, para todo $\varepsilon > 0$, existem $\delta_1, \delta_2 > 0$ tais que:

$$
\inf_{\substack{y\in B\\ d(y,x)<\delta_1}} f(y) > f(x) - \varepsilon, \qquad \sup_{\substack{y\in B\\ d(y,x)<\delta_2}} f(y) < f(x) + \varepsilon.
$$

Tome $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$; daí, para todo $y \in B$ com $d(y, x) < \delta$, temos:

$$f(x) - \varepsilon < f(y) < f(x) + \varepsilon,$$

o que prova que f é contínua no ponto x. $\square$

Se P é uma partição de B, observamos que:

$$m_P(x) \le m(x), \quad M(x) \le M_P(x), \quad \text{para todo } x \in \bigcup_{\mathfrak{b} \in \overline{P}} \operatorname{int}(\mathfrak{b}); \tag{2.6.6}$$

de fato, basta observar que se x pertence ao interior de um bloco $\mathfrak{b} \in \overline{P}$ então existe $\delta > 0$ tal que a bola de centro x e raio δ está contida em $\mathfrak{b}$ e portanto:

$$m_P(x) = \inf_{y \in \mathfrak{b}} f(y) \le \inf_{\substack{y \in B \\ d(y,x) < \delta}} f(y) \le m(x),$$
$$M(x) \le \sup_{\substack{y \in B \\ d(y,x) < \delta}} f(y) \le \sup_{y \in \mathfrak{b}} f(y) = M_P(x).$$

Além do mais, temos o seguinte:

2.6.7. Lema. *Se $(P_k)_{k \ge 1}$ é uma seqüência de partições do bloco retangular B tal que $\|P_k\| \to 0$ então $m_{P_k} \to m$ q. s. e $M_{P_k} \to M$ q. s..*

Demonstração. Seja A a união das fronteiras de todos os sub-blocos de B determinados por todas as partições P_k; como a quantidade de blocos em questão é enumerável, temos que A tem medida nula. Seja $x \in B$, $x \notin A$; vamos mostrar que $m_{P_k}(x) \to m(x)$ e $M_{P_k}(x) \to M(x)$. Seja dado $\varepsilon > 0$. Temos que existem $\delta_1, \delta_2 > 0$ tais que:

$$\inf_{\substack{y \in B \\ d(y,x) < \delta_1}} f(y) > m(x) - \varepsilon, \qquad \sup_{\substack{y \in B \\ d(y,x) < \delta_2}} f(y) < M(x) + \varepsilon.$$

Seja k_0 tal que $\|P_k\| < \min\{\delta_1, \delta_2\}$, para todo $k \ge k_0$. Vamos mostrar que:

$$m_{P_k}(x) > m(x) - \varepsilon, \quad M_{P_k}(x) < M(x) + \varepsilon, \tag{2.6.7}$$

para todo $k \ge k_0$. Fixado $k \ge k_0$, seja $\mathfrak{b} \in \overline{P_k}$ tal que x pertence ao interior de $\mathfrak{b}$. Como o diâmetro de $\mathfrak{b}$ é menor que $\min\{\delta_1, \delta_2\}$, temos que $\mathfrak{b}$ está contido na bola de centro x e raio δ_1 e na bola de centro x e raio δ_2, de modo que:

$$m_{P_k}(x) = \inf_{y \in \mathfrak{b}} f(y) \ge \inf_{\substack{y \in B \\ d(y,x) < \delta_1}} f(y) > m(x) - \varepsilon,$$
$$M_{P_k}(x) = \sup_{y \in \mathfrak{b}} f(y) \le \sup_{\substack{y \in B \\ d(y,x) < \delta_2}} f(y) < M(x) + \varepsilon,$$

provando (2.6.7). Usando (2.6.6) e (2.6.7) concluímos agora que:

$$m(x) - \varepsilon < m_{P_k}(x) \le m(x), \quad M(x) \le M_{P_k}(x) < M(x) + \varepsilon,$$

o que completa a demonstração. $\square$

2.6.8. Corolário. *As funções m e M são Lebesgue integráveis e:*

$$\int_B m\,\mathrm{d}\mathfrak{m} = {}^{(R)}\!\!\int_{-} f, \qquad \int_B M\,\mathrm{d}\mathfrak{m} = {}^{(R)}\!\!\int^{-} f.$$

Demonstração. Segue do Lema 2.6.7 e do resultado do item (c) do Exercício 2.7 que as funções m e M são mensuráveis. Seja agora $(P_k)_{k\geq 1}$ uma seqüência de partições de B tal que:

$$\lim_{k\to\infty} s(f;P_k) = {}^{(R)}\!\!\int_{-} f. \tag{2.6.8}$$

Podemos refinar cada partição P_k de modo que $\|P_k\| \to 0$; o Lema 2.6.3 garante que a condição (2.6.8) continua satisfeita. Como o bloco B tem medida finita, qualquer função constante finita definida em B é integrável; logo, as desigualdades em (2.6.3) implicam que a seqüência de funções $(m_{P_k})_{k\geq 1}$ satisfaz as hipótese do Teorema da Convergência Dominada. Usando o Lema 2.6.7 e as identidades (2.6.2) obtemos então:

$$\lim_{k\to\infty} s(f;P_k) = \lim_{k\to\infty} \int_B m_{P_k}\,\mathrm{d}\mathfrak{m} = \int_B m\,\mathrm{d}\mathfrak{m}.$$

De modo totalmente análogo, mostra-se que a integral de Lebesgue de M é igual à integral superior de Riemann de f. □

Estamos em condições agora de provar o resultado principal desta seção.

2.6.9. Proposição. *Seja B um bloco retangular n-dimensional com $|B| > 0$ e seja $f : B \to \mathbb{R}$ uma função limitada. Então:*

(a) *f é Riemann integrável se e somente se o conjunto das descontinuidades de f tem medida nula;*
(b) *se f é Riemann integrável então f é Lebesgue integrável e:*

$$\int_B f\,\mathrm{d}\mathfrak{m} = {}^{(R)}\!\!\int f.$$

Demonstração. Em vista do Corolário 2.6.8, f é Riemann integrável se e somente se:

$$\int_B m\,\mathrm{d}\mathfrak{m} = \int_B M\,\mathrm{d}\mathfrak{m}.$$

Como $m \leq M$, o resultado do Exercício 2.19 implica que f é Riemann integrável se e somente se $M = m$ quase sempre. O item (a) segue portanto do Lema 2.6.6. Passemos à demonstraçao do item (b). Suponha que f é Riemann integrável. Então $M = m$ quase sempre e de (2.6.5) segue que $m = f = M$ quase sempre. O resultado do item (b) do Exercício 2.7 implica então que f é mensurável; além do mais:

$$\int_B f\,\mathrm{d}\mathfrak{m} = \int_B m\,\mathrm{d}\mathfrak{m} = {}^{(R)}\!\!\int_{-} f = {}^{(R)}\!\!\int f. \qquad \square$$

2.6.1. A integral imprópria de Riemann. Na Definição 2.6.5 introduzimos a noção de integral de Riemann para funções limitadas definidas em blocos retangulares. A noção de integral de Riemann pode ser estendida para contextos mais gerais, envolvendo funções não limitadas definidas em domínios não limitados. Tais extensões são normalmente conhecidas como *integrais impróprias de Riemann* e são definidas através de limites de integrais próprias (i.e., integrais de funções limitadas em conjuntos limitados).

2.6.10. NOTAÇÃO. Seja $[a, b] \subset I\!R$ um intervalo com $a < b$. Se f é uma função a valores reais definida num conjunto que contém $[a, b]$ e se $f|_{[a,b]}$ é limitada e Riemann integrável então a integral de Riemann de $f|_{[a,b]}$ será denotada por:

$$(R)\!\int_a^b f.$$

2.6.11. DEFINIÇÃO. Seja $f : [a, +\infty[\ \to I\!R$ uma função tal que para todo $u \in \ ]a, +\infty[$, a restrição de f ao intervalo $[a, u]$ é limitada e Riemann integrável. A *integral imprópria de Riemann* de f é definida por:

$$(R)\!\int_a^{+\infty} f = \lim_{u\to\infty} (R)\!\int_a^u f,$$

desde que o limite acima exista em $\overline{I\!R}$. Quando esse limite é finito, dizemos que a integral imprópria de f é *convergente*.

2.6.12. PROPOSIÇÃO. *Seja $f : [a, +\infty[\ \to I\!R$ uma função tal que para todo $u \in \ ]a, +\infty[$, a restrição de f ao intervalo $[a, u]$ é limitada e Riemann integrável. Então f é mensurável. Além do mais, se f é Lebesgue quase integrável então a integral imprópria de Riemann de f existe em $\overline{I\!R}$ e:*

$$(R)\!\int_a^{+\infty} f = \int_a^{+\infty} f \, d\mathfrak{m}. \tag{2.6.9}$$

DEMONSTRAÇÃO. Seja $(u_n)_{n\ge1}$ uma seqüência arbitrária em $]a, +\infty[$ tal que $u_n \to +\infty$. Pela Proposição 2.6.9, a restrição de f ao intervalo $[a, u_n]$ é Lebesgue integrável e:

$$\int_a^{u_n} f \, d\mathfrak{m} = (R)\!\int_a^{u_n} f, \tag{2.6.10}$$

para todo $n \ge 1$. Obviamente:

$$\lim_{n\to\infty} f\chi_{[a,u_n]} = f;$$

como $f\chi_{[a,u_n]}$ é mensurável para todo $n \ge 1$, concluímos que f é mensurável. Em vista de (2.6.10), para mostrar (2.6.9), é suficiente mostrar que:

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^{u_n} f \, d\mathfrak{m} = \int_a^{+\infty} f \, d\mathfrak{m}, \tag{2.6.11}$$

para toda seqüência $(u_n)_{n\ge1}$ em $]a, +\infty[$ com $u_n \to +\infty$. Verifiquemos (2.6.11) primeiramente no caso em que f é não negativa. Pelo Lema de

Fatou, temos:

$$\int_a^{+\infty} f \, \mathrm{d}\mathfrak{m} = \int_a^{+\infty} \liminf_{n\to\infty} f\chi_{[a,u_n]} \, \mathrm{d}\mathfrak{m} \le \liminf_{n\to\infty} \int_a^{+\infty} f\chi_{[a,u_n]} \, \mathrm{d}\mathfrak{m} = \liminf_{n\to\infty} \int_a^{u_n} f \, \mathrm{d}\mathfrak{m}.$$

Por outro lado, $\int_a^{u_n} f \, \mathrm{d}\mathfrak{m} \le \int_a^{+\infty} f \, \mathrm{d}\mathfrak{m}$ para todo $n \ge 1$, donde:

$$\int_a^{+\infty} f \, \mathrm{d}\mathfrak{m} \le \liminf_{n\to\infty} \int_a^{u_n} f \, \mathrm{d}\mathfrak{m} \le \limsup_{n\to\infty} \int_a^{u_n} f \, \mathrm{d}\mathfrak{m} \le \int_a^{+\infty} f \, \mathrm{d}\mathfrak{m},$$

provando (2.6.11) no caso $f \ge 0$. Em geral, se $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ é uma função quase integrável qualquer então (2.6.11) é satisfeita para f^+ e f^-, ou seja:

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^{u_n} f^+ \, \mathrm{d}\mathfrak{m} = \int_a^{+\infty} f^+ \, \mathrm{d}\mathfrak{m}, \quad \lim_{n\to\infty} \int_a^{u_n} f^- \, \mathrm{d}\mathfrak{m} = \int_a^{+\infty} f^- \, \mathrm{d}\mathfrak{m};$$

a conclusão é obtida subtraindo as duas igualdades acima. □

Resultados análogos aos da Proposição 2.6.12 podem ser mostrados para outros tipos de integrais impróprias de Riemann (por exemplo, integrais de funções ilimitadas em intervalos limitados). O passo central da demonstração de tais resultados é dado pelo resultado do Exercício 2.25. Note, por exemplo, que o resultado desse exercício pode ser usado para justificar a igualdade (2.6.11) na demonstração da Proposição 2.6.12.

2.6.13. Exemplo. É possível que uma função $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ admita uma integral imprópria de Riemann convergente mas não seja Lebesgue quase integrável. Considere a função $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x},$$

para $x > 0$ e $f(0) = 1$. Temos que f é contínua e portanto $f|_{[0,u]}$ é limitada e Riemann integrável para todo $u \in \,]0, +\infty[$. Temos que f se anula nos pontos $k\pi$, com k inteiro positivo, f é positiva nos intervalos da forma $]k\pi, (k+1)\pi[$ com k inteiro positivo par e f é negativa nos intervalos da forma $]k\pi, (k+1)\pi[$ com k inteiro positivo ímpar. Para cada inteiro $k \ge 0$, seja:

$$a_k = \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |f| \, \mathrm{d}\mathfrak{m} \ge 0.$$

Em vista do resultado do Exercício 2.13 temos:

$$\int_0^{+\infty} f^+ \, \mathrm{d}\mathfrak{m} = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ par}}}^{\infty} a_k, \quad \int_0^{+\infty} f^- \, \mathrm{d}\mathfrak{m} = \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ ímpar}}}^{\infty} a_k. \tag{2.6.12}$$

Além do mais:

$$\int_0^{n\pi} f \, \mathrm{d}\mathfrak{m} = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k a_k,$$

e portanto:

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{n\pi} f\,\mathrm{d}\mathfrak{m} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k a_k = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_k.$$

Façamos algumas estimativas sobre os números a_k. Para $x \in [k\pi, (k+1)\pi]$, temos $\left|\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right| \le \frac{1}{k\pi}$ e portanto:

$$a_k \le \frac{1}{k\pi}\big((k+1)\pi - k\pi\big) = \frac{1}{k},$$

para todo $k \ge 1$. Segue que $a_k \to 0$. Vamos mostrar que a seqüência $(a_k)_{k\ge 0}$ é decrescente. Temos:

$$\begin{aligned} a_{k+1} = \int_{(k+1)\pi}^{(k+2)\pi} \left|\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right| \mathrm{d}\mathfrak{m}(x) &= \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \left|\frac{\operatorname{sen}(x+\pi)}{x+\pi}\right| \mathrm{d}\mathfrak{m}(x) \\ &= \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \left|\frac{\operatorname{sen} x}{x+\pi}\right| \mathrm{d}\mathfrak{m}(x) \le \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \left|\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right| \mathrm{d}\mathfrak{m}(x) = a_k; \end{aligned}$$

a segunda igualdade acima pode ser justificada fazendo a mudança de variável $y = x - \pi$ na integral de Riemann ${}^{(R)}\!\int_{(k+1)\pi}^{(k+2)\pi} \left|\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right| \mathrm{d}x$ ou utilizando o resultado do Exercício 2.14 e o fato que a função $x \mapsto x+\pi$ preserva medida (veja Lema 1.4.10 e Definição 2.1). Como a seqüência $(a_k)_{k\ge 0}$ é decrescente e tende a zero, segue do critério de Dirichlet (ou critério da série alternada) que a série $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_k$ converge; defina:

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_k = L \in I\!R.$$

Vamos mostrar agora que:

$$\lim_{u\to+\infty}\int_0^u f\,\mathrm{d}\mathfrak{m} = L. \tag{2.6.13}$$

Dado $\varepsilon > 0$, temos que existe n_0 tal que:

$$\Big|L - \sum_{k=0}^{n}(-1)^k a_k\Big| < \frac{\varepsilon}{2},$$

para todo $n \ge n_0$. Podemos escolher n_0 também de modo que:

$$a_n < \frac{\varepsilon}{2},$$

para todo $n \ge n_0$. Dado $u \in I\!R$, $u \ge n_0\pi$, seja $n \ge n_0$ o maior inteiro tal que $n\pi \le u$; daí $n\pi \le u < (n+1)\pi$ e:

$$\int_0^u f\,\mathrm{d}\mathfrak{m} = \int_0^{(n+1)\pi} f\,\mathrm{d}\mathfrak{m} - \int_u^{(n+1)\pi} f\,\mathrm{d}\mathfrak{m} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k a_k - \int_u^{(n+1)\pi} f\,\mathrm{d}\mathfrak{m}.$$

Daí:

$$\Big|L - \int_0^u f\,\mathrm{d}\mathfrak{m}\Big| \le \Big|L - \sum_{k=0}^{n}(-1)^k a_k\Big| + \Big|\int_u^{(n+1)\pi} f\,\mathrm{d}\mathfrak{m}\Big|$$
$$\le \Big|L - \sum_{k=0}^{n}(-1)^k a_k\Big| + a_n < \varepsilon,$$

para todo $u \ge n_0\pi$. Isso prova (2.6.13). Concluímos então que:

$${}_{(R)}\!\int_0^{+\infty} f = L \in I\!R.$$

Vamos agora mostrar que f não é Lebesgue quase integrável. Para isso, fazemos uma estimativa inferior para os números a_k. Dado um inteiro $k \ge 0$ então, para $k\pi + \frac{\pi}{4} \le x \le (k+1)\pi - \frac{\pi}{4}$ temos:

$$|\operatorname{sen} x| \ge \frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad \Big|\frac{\operatorname{sen} x}{x}\Big| \ge \frac{\sqrt{2}}{2}\,\frac{1}{(k+1)\pi},$$

e portanto:

$$a_k = \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |f|\,\mathrm{d}\mathfrak{m} \ge \int_{k\pi+\frac{\pi}{4}}^{(k+1)\pi-\frac{\pi}{4}} \Big|\frac{\operatorname{sen} x}{x}\Big|\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(x) \ge \frac{\sqrt{2}}{2}\,\frac{1}{(k+1)\pi}\,\frac{\pi}{2}.$$

Segue que as séries em (2.6.12) são divergentes e portanto:

$$\int_0^{+\infty} f^+\,\mathrm{d}\mathfrak{m} = +\infty = \int_0^{+\infty} f^-\,\mathrm{d}\mathfrak{m}.$$

Logo f não é Lebesgue quase integrável.

No Exercício 2.28 pedimos ao leitor para computar explicitamente o valor da integral imprópria de Riemann ${}_{(R)}\!\int_0^{+\infty} f$ da função f do Exemplo 2.6.13.

2.7. O Teorema de Fubini em $I\!R^n$

Ao longo desta seção consideramos fixados inteiros positivos m e n e identificamos $I\!R^{m+n}$ com o produto $I\!R^m \times I\!R^n$ através da aplicação:

$$I\!R^m \times I\!R^n \ni (x, y) \longmapsto (x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n) \in I\!R^{m+n}.$$

Dado um subconjunto A de $I\!R^{m+n}$ e dado $x \in I\!R^m$ denotamos por A_x a *fatia vertical de A correspondente à abscissa x* definida por:

$$A_x = \big\{y \in I\!R^n : (x, y) \in A\big\}.$$

Se $i_x : I\!R^n \to I\!R^{m+n}$ denota a função $i_x(y) = (x, y)$ então obviamente:

$$A_x = i_x^{-1}(A), \tag{2.7.1}$$

para todo $x \in I\!R^m$. Temos portanto o seguinte:

2.7.1. LEMA. *Se A é um Boreleano de $I\!R^{m+n}$ então A_x é um Boreleano de $I\!R^n$ para todo $x \in I\!R^m$.*

DEMONSTRAÇÃO. A função i_x é contínua e portanto Borel mensurável (veja Lema 2.1.15). A conclusão segue de (2.7.1). □

Segue do Lema 2.7.1 que se A é um Boreleano de $\mathbb{R}^{m+n}$ então faz sentido considerar a medida de Lebesgue $\mathfrak{m}(A_x)$ da fatia A_x, para cada $x \in \mathbb{R}^m$.

2.7.2. LEMA. *Se A é um Boreleano de $\mathbb{R}^{m+n}$ então a função:*

$$\mathbb{R}^m \ni x \longmapsto \mathfrak{m}(A_x) \in [0, +\infty] \tag{2.7.2}$$

é mensurável e vale a igualdade:

$$\int_{\mathbb{R}^m} \mathfrak{m}(A_x) \, \mathrm{d}\mathfrak{m}(x) = \mathfrak{m}(A). \tag{2.7.3}$$

Note que usamos a notação $\mathfrak{m}$ indistintamente para a medida de Lebesgue de $\mathbb{R}^m$, $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^{m+n}$; mais especificamente, em (2.7.2) usamos a medida de Lebesgue de $\mathbb{R}^n$, a integral do lado esquerdo da igualdade em (2.7.3) é feita com respeito à medida de Lebesgue de $\mathbb{R}^m$ e no lado direito da igualdade em (2.7.3) usamos a medida de Lebesgue de $\mathbb{R}^{m+n}$.

DEMONSTRAÇÃO DO LEMA 2.7.2. Denote por $\mathcal{C}$ a coleção de todos os Boreleanos A de $\mathbb{R}^{m+n}$ para os quais a função (2.7.2) é mensurável e a igualdade (2.7.3) é satisfeita. A idéia da prova é mostrar várias propriedades da coleção $\mathcal{C}$ até que finalmente concluímos que ela coincide com a classe de todos os Boreleanos de $\mathbb{R}^{m+n}$.

Passo 1. *Os blocos retangulares $(m+n)$-dimensionais pertencem a $\mathcal{C}$.*

Se A é um bloco retangular $(m+n)$-dimensional então podemos escrever $A = A_1 \times A_2$, onde A_1 e A_2 são respectivamente um bloco retangular m-dimensional e um bloco retangular n-dimensional. Para todo $x \in \mathbb{R}^m$, temos:

$$A_x = \begin{cases} A_2, & \text{se } x \in A_1, \\ \emptyset, & \text{se } x \notin A_1, \end{cases}$$

e portanto:

$$\mathfrak{m}(A_x) = |A_2| \, \chi_{A_1}(x),$$

para todo $x \in \mathbb{R}^m$. Segue que (2.7.2) é uma função simples mensurável cuja integral é igual a $|A_2| \, |A_1| = |A|$.

Passo 2. *Se $A, B \in \mathcal{C}$ e A e B são disjuntos então $A \cup B \in \mathcal{C}$.*

Segue de (2.7.1) que $(A \cup B)_x = A_x \cup B_x$ e que A_x e B_x são disjuntos para todo $x \in \mathbb{R}^m$; logo:

$$\mathfrak{m}\big((A \cup B)_x\big) = \mathfrak{m}(A_x) + \mathfrak{m}(B_x),$$

para todo $x \in I\!R^m$. Segue que a função $x \mapsto \mathfrak{m}\big((A \cup B)_x\big)$ é mensurável, sendo uma soma de funções mensuráveis; sua integral é dada por:

$$\begin{aligned}\int_{I\!R^m} \mathfrak{m}\big((A \cup B)_x\big)\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(x) &= \int_{I\!R^m} \mathfrak{m}(A_x)\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(x) + \int_{I\!R^m} \mathfrak{m}(B_x)\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(x)\\ &= \mathfrak{m}(A) + \mathfrak{m}(B) = \mathfrak{m}(A \cup B).\end{aligned}$$

Passo 3. *Se $A, B \in \mathcal{C}$, $B \subset A$ e B é limitado então $A \setminus B \in \mathcal{C}$.*

Como B é limitado então $\mathfrak{m}(B) < +\infty$ e $\mathfrak{m}(B_x) < +\infty$, para todo $x \in I\!R^m$. Segue de (2.7.1) que $B_x \subset A_x$ e $(A \setminus B)_x = A_x \setminus B_x$, para todo $x \in I\!R^m$; logo:

$$\mathfrak{m}\big((A \setminus B)_x\big) = \mathfrak{m}(A_x) - \mathfrak{m}(B_x),$$

para todo $x \in I\!R^m$, provando que a função $x \mapsto \mathfrak{m}\big((A \setminus B)_x\big)$ é mensurável. Além do mais:

$$\begin{aligned}\int_{I\!R^m} \mathfrak{m}\big((A \setminus B)_x\big)\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(x) &= \int_{I\!R^m} \mathfrak{m}(A_x)\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(x) - \int_{I\!R^m} \mathfrak{m}(B_x)\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(x)\\ &= \mathfrak{m}(A) - \mathfrak{m}(B) = \mathfrak{m}(A \setminus B).\end{aligned}$$

Passo 4. *Se $(A^k)_{k\ge1}$ é uma seqüência de elementos de $\mathcal{C}$ e se $A^k \nearrow A$ então $A \in \mathcal{C}$.*

Segue de (2.7.1) que $A^k_x \nearrow A_x$, para todo $x \in I\!R^m$; logo, pelo Lema 1.4.48:

$$\mathfrak{m}(A_x) = \lim_{k\to\infty} \mathfrak{m}(A^k_x),$$

para todo $x \in I\!R^m$. Segue que a função $x \mapsto \mathfrak{m}(A_x)$ é mensurável, sendo um limite de funções mensuráveis. Pelo Teorema da Convergência Monotônica, temos:

$$\int_{I\!R^m} \mathfrak{m}(A_x)\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(x) = \lim_{k\to\infty} \int_{I\!R^m} \mathfrak{m}(A^k_x)\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(x) = \lim_{k\to\infty} \mathfrak{m}(A^k) = \mathfrak{m}(A).$$

Passo 5. *Se $(A^k)_{k\ge1}$ é uma seqüência de elementos de $\mathcal{C}$, A^1 é limitado e $A^k \searrow A$ então $A \in \mathcal{C}$.*

Como A^1 é limitado, temos $\mathfrak{m}(A^k) < +\infty$ e $\mathfrak{m}(A^k_x) < +\infty$, para todos $k \ge 1$ e $x \in I\!R^m$. Essa observação permite demonstrar o passo 5 de forma análoga à demonstração do passo 4.

Passo 6. *Se $A, B \in \mathcal{C}$, $A \cap B \in \mathcal{C}$ e $A \cap B$ é limitado então $A \cup B \in \mathcal{C}$.*

Segue dos passos 2 e 3, observando que:

$$A \cup B = (A \setminus B) \cup B = \big(A \setminus (A \cap B)\big) \cup B,$$

sendo que os conjuntos $A \setminus (A \cap B)$ e B são disjuntos.

Passo 7. *Se $B_1, \ldots, B_k$ são blocos retangulares $(m+n)$-dimensionais então $\bigcup_{i=1}^k B_i \in \mathcal{C}$.*

Usamos indução em k. O caso $k = 1$ segue do passo 1. Suponha que a união de qualquer coleção de k blocos retangulares $(m+n)$-dimensionais pertence a $\mathcal{C}$ e sejam dados blocos retangulares $(m+n)$-dimensionais $B_1, \ldots, B_{k+1}$. Como qualquer subconjunto de uma união finita de blocos retangulares é sempre um conjunto limitado, em virtude do passo 6, para mostrar que $\bigcup_{i=1}^{k+1} B_i = \big(\bigcup_{i=1}^{k} B_i\big) \cup B_{k+1}$ está em $\mathcal{C}$ é suficiente mostrar que $\big(\bigcup_{i=1}^{k} B_i\big) \cap B_{k+1}$ está em $\mathcal{C}$. Mas:

$$\Big(\bigcup_{i=1}^{k} B_i\Big) \cap B_{k+1} = \bigcup_{i=1}^{k} (B_i \cap B_{k+1}),$$

sendo que $B_i \cap B_{k+1}$ é um bloco retangular $(m+n)$-dimensional para $i = 1, \ldots, k$. Segue da hipótese de indução que $\big(\bigcup_{i=1}^{k} B_i\big) \cap B_{k+1} \in \mathcal{C}$.

Passo 8. *Todo subconjunto aberto de $I\!R^{m+n}$ pertence a $\mathcal{C}$.*

Se $U \subset I\!R^{m+n}$ é aberto então o Lema 1.4.23 nos permite escrever $U = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$, onde cada B_i é um bloco retangular $(m+n)$-dimensional. Definindo $A_k = \bigcup_{i=1}^{k} B_i$ então $A_k \in \mathcal{C}$, pelo passo 7 e $A_k \nearrow U$. A conclusão segue do passo 4.

Passo 9. *Todo subconjunto de $I\!R^{m+n}$ de tipo G_δ está em $\mathcal{C}$.*

Seja $Z \subset I\!R^{m+n}$ um G_δ. Assumimos inicialmente que Z é limitado. Seja $(U_k)_{k\ge 1}$ uma seqüência de abertos de $I\!R^{m+n}$ com $Z = \bigcap_{k=1}^{\infty} U_k$ e seja U_0 um aberto limitado de $I\!R^{m+n}$ que contém Z. Definindo:

$$A_k = \bigcap_{i=0}^{k} U_i,$$

então A_k é um aberto limitado para todo $k \ge 1$ e $A_k \searrow Z$. Segue dos passos 5 e 8 que $Z \in \mathcal{C}$.

Seja agora $Z \subset I\!R^{m+n}$ um G_δ arbitrário. Temos que

$$Z_k = Z \cap \left]-k, k\right[^{m+n}$$

é um G_δ limitado para todo $k \ge 1$ e portanto $Z_k \in \mathcal{C}$, pelo que mostramos acima. A conclusão segue do passo 4, já que $Z_k \nearrow Z$.

Passo 10. *A coleção $\mathcal{C}$ coincide com a coleção de todos os subconjuntos Boreleanos de $I\!R^{m+n}$.*

Seja $A \subset I\!R^{m+n}$ um Boreleano. Pelo Lema 1.4.28 existe um subconjunto Z de $I\!R^{m+n}$ de tipo G_δ com $A \subset Z$ e $\mathfrak{m}(Z \setminus A) = 0$. Pelo Lema 1.4.50, existe um subconjunto E de $I\!R^{m+n}$ de tipo G_δ com $Z \setminus A \subset E$ e $\mathfrak{m}(E) = \mathfrak{m}(Z \setminus A) = 0$. O passo 9 nos garante que E e Z estão em $\mathcal{C}$. Logo:

$$\int_{I\!R^m} \mathfrak{m}(E_x)\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(x) = \mathfrak{m}(E) = 0;$$

como $\mathfrak{m}(E_x) \geq 0$, para todo x, o resultado do Exercício 2.18 implica que $\mathfrak{m}(E_x) = 0$ para quase todo $x \in \mathbb{R}^{m+n}$. Como $(Z \setminus A)_x \subset E_x$, para todo $x \in \mathbb{R}^m$, segue que $\mathfrak{m}\big((Z \setminus A)_x\big) = 0$ para quase todo $x \in \mathbb{R}^m$. Temos então:

$$\mathfrak{m}(Z_x) = \mathfrak{m}(A_x) + \mathfrak{m}\big((Z \setminus A)_x\big) = \mathfrak{m}(A_x),$$

para quase todo $x \in \mathbb{R}^m$, já que Z_x é união disjunta de A_x e $(Z \setminus A)_x$, para todo x. Vemos então que a funções $x \mapsto \mathfrak{m}(Z_x)$ e $x \mapsto \mathfrak{m}(A_x)$ são iguais quase sempre, o que implica que $x \mapsto \mathfrak{m}(A_x)$ é uma função mensurável pelo resultado do item (b) do Exercício 2.7. Além do mais:

$$\int_{\mathbb{R}^m} \mathfrak{m}(A_x)\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(x) = \int_{\mathbb{R}^m} \mathfrak{m}(Z_x)\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(x) = \mathfrak{m}(Z) = \mathfrak{m}(A),$$

provando que $A \in \mathcal{C}$. Isso completa a demonstração. □

Se A é um subconjunto mensurável de $\mathbb{R}^{m+n}$ então não é verdade em geral que as fatias verticais A_x são mensuráveis para todo $x \in \mathbb{R}^m$; por exemplo, se B é um subconjunto não mensurável de $\mathbb{R}^n$ então $A = \{0\} \times B$ é um subconjunto mensurável de $\mathbb{R}^{m+n}$ (com medida exterior nula), mas a fatia $A_0 = B$ não é mensurável. No entanto, mostraremos abaixo que se A é mensurável então *quase todas* as fatias A_x de A são mensuráveis. Faz sentido também então considerar a integral em (2.7.3), tendo em mente a seguinte convenção: se X é um subconjunto mensurável de $\mathbb{R}^n$ e se $f(x)$ é uma expressão que faz sentido apenas *para quase todo* $x \in X$ então escrevemos $\int_X f(x)\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(x)$, entendendo que *valores arbitrários* de $\overline{\mathbb{R}}$ podem ser atribuídos à expressão $f(x)$ no conjunto de medida nula no qual ela não está definida. Em vista do resultado do Exercício 2.7 e do Corolário 2.4.11, essa convenção define o símbolo $\int_X f(x)\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(x)$ de forma inequívoca.

2.7.3. Proposição. *Se A é um subconjunto mensurável de $\mathbb{R}^{m+n}$ então para quase todo $x \in \mathbb{R}^m$ a fatia vertical A_x é um subconjunto mensurável de $\mathbb{R}^n$, a função $x \mapsto \mathfrak{m}(A_x)$ é mensurável e a medida de A é dada pela igualdade* (2.7.3).

Demonstração. Basta repetir os argumentos da demonstração do passo 10 do Lema 2.7.2; a única diferença é que não sabemos *a priori* que as fatias de A são mensuráveis. Mas sabemos que E_x tem medida nula para quase todo $x \in \mathbb{R}^m$ e portanto $(Z \setminus A)_x$ é mensurável e tem medida nula para quase todo $x \in \mathbb{R}^m$; como:

$$A_x = Z_x \setminus (Z \setminus A)_x,$$

segue que também A_x é mensurável para quase todo $x \in \mathbb{R}^m$. □

Observamos que se X é um subconjunto mensurável de $\mathbb{R}^m$ e se Y é um subconjunto mensurável de $\mathbb{R}^n$ então $X \times Y$ é um subconjunto mensurável de $\mathbb{R}^{m+n}$ (veja Exercício 1.30).

2.7.4. Teorema (Fubini–Tonelli). *Sejam $X \subset \mathbb{R}^m$, $Y \subset \mathbb{R}^n$ conjuntos mensuráveis e $f : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$ uma função quase integrável. Então:*

- *para quase todo $x \in X$, a função $Y \ni y \mapsto f(x,y) \in \overline{I\!R}$ é quase integrável;*
- *a função $x \mapsto \int_Y f(x,y)\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(y) \in \overline{I\!R}$ é quase integrável;*
- *vale a igualdade:*

$$\int_X \Big(\int_Y f(x,y)\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(y)\Big)\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(x) = \int_{X\times Y} f(x,y)\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(x,y).$$

Demonstração. Dividimos a demonstração em itens.

- *O teorema vale se f é simples, mensurável e não negativa.*

Podemos escrever $f = \sum_{i=1}^k c_i \chi_{A^i}$, com $c_i \in [0,+\infty]$ e A^i um subconjunto mensurável de $X \times Y$, para $i = 1,\ldots,k$. Note que, se $x \in X$, temos:

$$f(x,y) = \sum_{i=1}^k c_i \chi_{A^i_x}(y), \tag{2.7.4}$$

para todo $y \in Y$. Pela Proposição 2.7.3, existe para cada $i = 1,\ldots,k$ um conjunto de medida nula $N_i \subset I\!R^m$ tal que A^i_x é mensurável para todo $x \in I\!R^m \setminus N_i$. Daí $N = \bigcup_{i=1}^k N_i$ tem medida nula e segue de (2.7.4) que para $x \in I\!R^m \setminus N$, a função $y \mapsto f(x,y)$ é mensurável e sua integral é dada por:

$$\int_Y f(x,y)\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(y) = \int_Y \sum_{i=1}^k c_i \chi_{A^i_x}(y)\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(y) = \sum_{i=1}^k c_i \mathfrak{m}(A^i_x).$$

Logo:

$$\begin{aligned}\int_X \Big(\int_Y f(x,y)\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(y)\Big)\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(x) &= \int_{I\!R^m} \sum_{i=1}^k c_i \mathfrak{m}(A^i_x)\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(x) = \sum_{i=1}^k c_i \mathfrak{m}(A^i) \\ &= \int_{X\times Y} f(x,y)\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(x,y).\end{aligned}$$

- *O teorema vale se f é mensurável e não negativa.*

Seja $(f_k)_{k\ge1}$ uma seqüências de funções $f_k : X \times Y \to [0,+\infty]$ simples e mensuráveis com $f_k \nearrow f$. Seja $N_k \subset I\!R^m$ um conjunto de medida nula tal que a função $y \mapsto f_k(x,y)$ é mensurável para todo $x \in X \setminus N_k$. Daí $N = \bigcup_{k=1}^\infty N_k$ tem medida nula e a função:

$$Y \ni y \longmapsto f(x,y) = \lim_{k\to\infty} f_k(x,y) \in [0,+\infty]$$

é mensurável para todo $x \in X \setminus N$. Pelo Teorema da Convergência Monotônica, temos:

$$\int_Y f(x,y)\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(y) = \lim_{k\to\infty} \int_Y f_k(x,y)\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(y),$$

para todo $x \in X \setminus N$. Logo a função $x \mapsto \int_Y f(x,y)\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(y)$ é mensurável e, usando novamente o Teorema da Convergência Monotônica, obtemos:

$$\begin{aligned}\int_X \Big(\int_Y f(x,y)\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(y)\Big)\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(x) &= \lim_{k\to\infty}\int_X \Big(\int_Y f_k(x,y)\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(y)\Big)\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(x)\\ &= \lim_{k\to\infty}\int_{X\times Y} f_k(x,y)\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(x,y) = \int_{X\times Y} f(x,y)\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(x,y).\end{aligned}$$

- *O teorema vale se f é quase integrável.*

  Como f^+ e f^- são funções mensuráveis não negativas, temos:

$$\int_X \Big(\int_Y f^+(x,y)\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(y)\Big)\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(x) = \int_{X\times Y} f^+(x,y)\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(x,y), \tag{2.7.5}$$

$$\int_X \Big(\int_Y f^-(x,y)\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(y)\Big)\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(x) = \int_{X\times Y} f^-(x,y)\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(x,y). \tag{2.7.6}$$

Como f é quase integrável, temos que f^+ é integrável ou f^- é integrável; para fixar as idéias, vamos supor que $\int_{X\times Y} f^-\,\mathrm{d}\mathfrak{m} < +\infty$. Tendo em mente o resultado do Exercício 2.16, segue de (2.7.6) que:

$$\int_Y f^-(x,y)\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(y) < +\infty,$$

para quase todo $x \in X$. Segue que a função $y \mapsto f(x,y)$ é quase integrável para quase todo $x \in X$; além do mais, de (2.7.5) e (2.7.6) vem:

$$\begin{aligned}\int_X \Big(\int_Y f(x,y)\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(y)\Big)\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(x) &= \int_X \Big(\int_Y f^+(x,y)\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(y)\Big)\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(x)\\ &\quad - \int_X \Big(\int_Y f^-(x,y)\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(y)\Big)\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(x)\\ &= \int_{X\times Y} f^+(x,y)\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(x,y) - \int_{X\times Y} f^-(x,y)\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(x,y)\\ &= \int_{X\times Y} f(x,y)\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(x,y). \qquad \square\end{aligned}$$

Seja $\sigma : \{1,\ldots,m+n\} \to \{1,\ldots,m+n\}$ uma aplicação bijetora (i.e., uma *permutação* de $m+n$ elementos) e considere o isomorfismo linear $\widehat{\sigma}$ de $I\!R^{m+n}$ definido por:

$$\widehat{\sigma}(z_1,\ldots,z_{m+n}) = \big(z_{\sigma(1)},\ldots,z_{\sigma(m+n)}\big),$$

para todo $(z_1,\ldots,z_{m+n}) \in I\!R^{m+n}$. Segue do resultado do Exercício 1.11 que $\widehat{\sigma}$ *preserva medida*, i.e., $\mathfrak{m}\big(\widehat{\sigma}^{-1}(A)\big) = \mathfrak{m}(A)$, para todo subconjunto mensurável A de $I\!R^{m+n}$ (veja Definição 2.1). Pelo resultado do Exercício 2.14, uma função $f : I\!R^{m+n} \to \overline{I\!R}$ é quase integrável se e somente se $f\circ\widehat{\sigma}$ é quase integrável e, nesse caso, as integrais de f e $f\circ\widehat{\sigma}$ coincidem. Em vista dessas observações, temos o seguinte:

2.7.5. Corolário. *Sejam $X \subset I\!R^m$, $Y \subset I\!R^n$ conjuntos mensuráveis e $f : X \times Y \to \overline{I\!R}$ uma função quase integrável. Então:*

- *para quase todo $y \in Y$, a função $X \ni x \mapsto f(x, y) \in \overline{I\!R}$ é quase integrável;*
- *a função $y \mapsto \int_X f(x, y)\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(x) \in \overline{I\!R}$ é quase integrável;*
- *vale a igualdade:*

$$\int_Y \Big(\int_X f(x, y)\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(x) \Big)\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(y) = \int_{X\times Y} f(x, y)\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(x, y)$$
$$= \int_X \Big(\int_Y f(x, y)\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(y) \Big)\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(x).$$

Demonstração. Considere a permutação σ de $m + n$ elementos dada por:

$$\sigma(i) = \begin{cases} n + i, & \text{se } 1 \le i \le m, \\ i - m, & \text{se } m + 1 \le i \le m + n, \end{cases}$$

de modo que:

$$\widehat{\sigma}(y_1, \ldots, y_n, x_1, \ldots, x_m) = (x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n),$$

para todos $x \in I\!R^m$, $y \in I\!R^n$. Temos que:

$$\widehat{\sigma}^{-1}(X \times Y) = Y \times X \subset I\!R^n \times I\!R^m \cong I\!R^{m+n}.$$

Em vista das observações que precedem o enunciado do corolário, temos que $f \circ \widehat{\sigma}|_{Y\times X} : Y \times X \to \overline{I\!R}$ é quase integrável e tem a mesma integral que f. A conclusão é obtida aplicando o Teorema 2.7.4 à função $f \circ \widehat{\sigma}|_{Y\times X}$, trocando os papéis de m e n. □

É possível que uma função mensurável $f : X \times Y \to \overline{I\!R}$ seja tal que as *integrais iteradas* $\int_X \big(\int_Y f(x, y)\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(y) \big)\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(x)$ e $\int_Y \big(\int_X f(x, y)\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(x) \big)\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(y)$ sejam ambas bem-definidas, porém distintas; em vista do Corolário 2.7.5, isso somente é possível quando a função f não é quase integrável.

2.7.6. Exemplo. Seja $(a_{ij})_{i,j\ge1}$ uma seqüência dupla de números reais tal que as séries:

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}, \quad i = 1, 2, \ldots, \qquad \sum_{i=1}^{\infty} a_{ij}, \quad j = 1, 2, \ldots, \tag{2.7.7}$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \Big(\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} \Big), \qquad \sum_{j=1}^{\infty} \Big(\sum_{i=1}^{\infty} a_{ij} \Big), \tag{2.7.8}$$

são todas absolutamente convergentes, mas:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \Big(\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} \Big) \ne \sum_{j=1}^{\infty} \Big(\sum_{i=1}^{\infty} a_{ij} \Big).$$

Tome, por exemplo:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j, \\ -1, & \text{se } i+1 = j, \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

de modo que todas as séries em (2.7.7) e (2.7.8) têm apenas um número finito de termos não nulos e:

$$\sum_{i=1}^{\infty}\Big(\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}\Big) = 0, \quad \sum_{j=1}^{\infty}\Big(\sum_{i=1}^{\infty} a_{ij}\Big) = 1.$$

Considere a função $f : [0,+\infty[\,\times\,[0,+\infty[\, \to I\!R$ definida por:

$$f = \sum_{i,j=1}^{\infty} a_{ij}\, \chi_{[i-1,i[\times[j-1,j[},$$

ou seja, a restrição de f ao retângulo $[i-1,i[\,\times\,[j-1,j[$ é igual a a_{ij}, para todos $i, j \geq 1$. Fixado $x \in [0,+\infty[$ então:

$$f(x,y) = \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}\, \chi_{[j-1,j[}(y),$$

para todo $y \in [0,+\infty[$, onde $i \geq 1$ é tal que $x \in [i-1,i[$. Como a série $\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}$ é absolutamente convergente, segue do resultado do Exercício 2.23 que a função $y \mapsto f(x,y)$ é integrável e:

$$\int_0^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(y) = \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij};$$

daí:

$$\int_0^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(y) = \sum_{i=1}^{\infty}\Big(\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}\Big)\chi_{[i-1,i[}(x),$$

para todo $x \in [0,+\infty[$. Como a série $\sum_{i=1}^{\infty}\big(\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}\big)$ é absolutamente convergente, usando novamente o resultado do Exercício 2.23, concluímos que a função $x \mapsto \int_0^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(y)$ é integrável e:

$$\int_0^{+\infty}\Big(\int_0^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(y)\Big)\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(x) = \sum_{i=1}^{\infty}\Big(\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}\Big).$$

De modo análogo, mostra-se que:

$$\int_0^{+\infty}\Big(\int_0^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(x)\Big)\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(y) = \sum_{j=1}^{\infty}\Big(\sum_{i=1}^{\infty} a_{ij}\Big),$$

e portanto:

$$\int_0^{+\infty}\Big(\int_0^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(y)\Big)\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(x) \neq \int_0^{+\infty}\Big(\int_0^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(x)\Big)\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(y).$$

Exercícios para o Capítulo 2

Funções Mensuráveis.

EXERCÍCIO 2.1. Sejam $(X, \mathcal{A})$, $(X', \mathcal{A}')$ espaços mensuráveis arbitrários. Mostre que toda função constante $f : X \to X'$ é mensurável.

EXERCÍCIO 2.2. Sejam X um conjunto e $Y \subset X$ um subconjunto. Se $\mathcal{C}$ é um conjunto de geradores para uma σ-álgebra $\mathcal{A}$ de partes de X, mostre que o conjunto:

$$\mathcal{C}|_Y = \big\{ E \cap Y : E \in \mathcal{C} \big\}$$

é um conjunto de geradores para a σ-álgebra $\mathcal{A}|_Y$ de partes de Y; em símbolos:

$$\sigma[\mathcal{C}]|_Y = \sigma[\mathcal{C}|_Y].$$

EXERCÍCIO 2.3. Mostre que $\mathcal{B}(\overline{I\!R})|_{I\!R} = \mathcal{B}(I\!R)$.

EXERCÍCIO 2.4. Mostre que os intervalos $[-\infty, c]$, $c \in I\!R$, constituem um conjunto de geradores para a σ-álgebra de Borel de $\overline{I\!R}$.

EXERCÍCIO 2.5. Seja $(X, \mathcal{A})$ um espaço mensurável e sejam $f : X \to \overline{I\!R}$, $g : X \to \overline{I\!R}$ funções mensuráveis. Mostre que o conjunto:

$$\big\{ x \in X : f(x) = g(x) \big\}$$

é mensurável.

EXERCÍCIO 2.6. Mostre que a função $f : I\!R^2 \to I\!R$ definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \cos \frac{x}{y}, & \text{se } y \geq 1, \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^n}{n^2}, & \text{se } -1 < y < 1, \\ \chi_{\mathbb{Q}}(x+y), & \text{se } y \leq -1, \end{cases}$$

é Borel mensurável.

EXERCÍCIO 2.7. Sejam $X \subset I\!R^n$ um subconjunto mensurável e $(X', \mathcal{A}')$ um espaço mensurável. Dada uma função $f : X \to X'$, mostre que:

(a) se existe $X_1 \subset X$ tal que $X \setminus X_1$ tem medida nula e tal que $f|_{X_1}$ é mensurável então f é mensurável;

(b) se f é mensurável e se $g : X \to X'$ é igual a f quase sempre então g também é mensurável;

(c) se $(f_k)_{k \geq 1}$ é uma seqüência de funções mensuráveis $f_k : X \to \overline{I\!R}$ e se $f_k \to g$ q. s. então $g : X \to \overline{I\!R}$ também é mensurável.

EXERCÍCIO 2.8. Denote por $\pi : I\!R^{m+n} \to I\!R^m$ a projeção nas m primeiras coordenadas. Mostre que a função:

$$\pi : \big(I\!R^{m+n}, \mathcal{M}(I\!R^{m+n})\big) \longrightarrow \big(I\!R^m, \mathcal{M}(I\!R^m)\big),$$

é mensurável (note que não estamos seguindo a convenção 2.1.3).

EXERCÍCIO 2.9. Seja $f : X \to I\!R^n$ uma função definida num subconjunto X de $I\!R^m$. Recorde que o *gráfico* de f é o conjunto:

$$\operatorname{gr}(f) = \big\{ \big(x, f(x)\big) : x \in X \big\} \subset I\!R^{m+n}. \tag{2.7.9}$$

Mostre que:

- se X é Boreleano e f é Borel mensurável então $\mathrm{gr}(f)$ é Boreleano;
- se X é mensurável e f é mensurável então $\mathrm{gr}(f)$ é mensurável.

Definição da Integral.

EXERCÍCIO 2.10. Sejam $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida e $f : X \to \overline{I\!R}$ uma função mensurável. Mostre que:

(a) f é integrável se e somente se $|f|$ é integrável;
(b) se f é quase integrável então:

$$\Big|\int_X f \, \mathrm{d}\mu\Big| \le \int_X |f| \, \mathrm{d}\mu.$$

EXERCÍCIO 2.11. Seja $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida e seja $(f_k)_{k\ge1}$ uma seqüência de funções mensuráveis $f_k : X \to [0, +\infty]$. Se $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$, mostre que:

$$\int_X f \, \mathrm{d}\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_X f_k \, \mathrm{d}\mu.$$

EXERCÍCIO 2.12. Seja $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida. Dada uma função mensurável $f : X \to [0, +\infty]$, mostre que a aplicação $\nu_f : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ definida por:

$$\nu_f(E) = \int_E f \, \mathrm{d}\mu, \quad E \in \mathcal{A},$$

é uma medida (a medida ν_f é chamada a *integral indefinida* de f e é denotada por $\nu_f = \int f \, \mathrm{d}\mu$).

EXERCÍCIO 2.13. Sejam $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida e $f : X \to \overline{I\!R}$ uma função quase integrável. Mostre que:

(a) se $(A_k)_{k\ge1}$ é uma seqüência de conjuntos mensuráveis dois a dois disjuntos e se $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ então:

$$\int_A f \, \mathrm{d}\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{A_k} f \, \mathrm{d}\mu \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{r\to\infty} \sum_{k=1}^{r} \int_{A_k} f \, \mathrm{d}\mu;$$

(b) se $(A_k)_{k\ge1}$ é uma seqüência de conjuntos mensuráveis e $A_k \nearrow A$ então:

$$\int_A f \, \mathrm{d}\mu = \lim_{k\to\infty} \int_{A_k} f \, \mathrm{d}\mu; \tag{2.7.10}$$

(c) se $(A_k)_{k\ge1}$ é uma seqüência de conjuntos mensuráveis, $A_k \searrow A$ e se $f|_{A_1}$ é integrável então vale a igualdade (2.7.10).

DEFINIÇÃO 2.1. Sejam $(X, \mathcal{A}, \mu)$ e $(X', \mathcal{A}', \mu')$ espaços de medida. Dizemos que uma função $\phi : X \to X'$ *preserva medida* se ϕ é mensurável e se $\mu\big(\phi^{-1}(A)\big) = \mu'(A)$, para todo $A \in \mathcal{A}'$.

EXERCÍCIO 2.14. Sejam $(X, \mathcal{A}, \mu)$ e $(X', \mathcal{A}', \mu')$ espaços de medida e seja $\phi : X \to X'$ uma função que preserva medida. Dada uma função mensurável

$f : X' \to \overline{I\!R}$, mostre que f é quase integrável se e somente se $f \circ \phi$ é quase integrável e, nesse caso:

$$\int_{X'} f \, \mathrm{d}\mu' = \int_X f \circ \phi \, \mathrm{d}\mu.$$

DEFINIÇÃO 2.2. Seja X um conjunto. A aplicação $\mu : \wp(X) \to [0, +\infty]$ definida por:

$$\mu(E) = \text{número de elementos do conjunto } E, \quad E \subset X,$$

é chamada a *medida de contagem*.

EXERCÍCIO 2.15. Seja X o conjunto dos números inteiros positivos e seja $\mu : \wp(X) \to [0, +\infty]$ a medida de contagem. Mostre que:

- dada uma função $f : X \to [0, +\infty]$ então:

$$\int_X f \, \mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{\infty} f(n); \tag{2.7.11}$$

- uma função $f : X \to \overline{I\!R}$ é integrável se e somente se a série $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ é absolutamente convergente e nesse caso vale a identidade (2.7.11).

EXERCÍCIO 2.16. Sejam $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida e $f : X \to \overline{I\!R}$ uma função quase integrável. Mostre que:

- se $\int_X f \, \mathrm{d}\mu < +\infty$ então $f(x) < +\infty$ para quase todo $x \in X$;
- se $\int_X f \, \mathrm{d}\mu > -\infty$ então $f(x) > -\infty$ para quase todo $x \in X$;
- se f é integrável então $f(x) \in I\!R$ para quase todo $x \in X$.

EXERCÍCIO 2.17. Sejam $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida e $f : X \to \overline{I\!R}$, $g : X \to \overline{I\!R}$ funções mensuráveis, com g quase integrável. Mostre que:

- se $\int_X g \, \mathrm{d}\mu > -\infty$ e $f \ge g$ q. s. então f é quase integrável e $\int_X f \, \mathrm{d}\mu > -\infty$;
- se $\int_X g \, \mathrm{d}\mu < +\infty$ e $f \le g$ q. s. então f é quase integrável e $\int_X f \, \mathrm{d}\mu < +\infty$;
- se g é integrável e $|f| \le g$ q. s. então f é integrável.

EXERCÍCIO 2.18. Seja $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida. Dada uma função mensurável $f : X \to [0, +\infty]$, mostre que $\int_X f \, \mathrm{d}\mu = 0$ se e somente se $f = 0$ quase sempre.

EXERCÍCIO 2.19. Seja $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida. Dadas funções integráveis $f : X \to \overline{I\!R}$, $g : X \to \overline{I\!R}$ tais que $f \le g$ e:

$$\int_X f \, \mathrm{d}\mu = \int_X g \, \mathrm{d}\mu,$$

mostre que $f = g$ quase sempre.

Exercício 2.20. Sejam $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida e $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ uma função integrável. Mostre que para todo $\varepsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que para todo conjunto mensurável $A \in \mathcal{A}$ com $\mu(A) < \delta$ temos:

$$\Big| \int_A f \, \mathrm{d}\mu \Big| < \varepsilon.$$

Exercício 2.21. Seja $f : I \to \overline{\mathbb{R}}$ uma função integrável definida num intervalo $I \subset \mathbb{R}$. Fixado $t_0 \in I$, considere a função $F : I \to \mathbb{R}$ definida por:

$$F(t) = \int_{t_0}^{t} f \, \mathrm{d}\mathfrak{m},$$

para todo $t \in I$. Mostre que:

(a) F é contínua;
(b) dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que dados $n \geq 1$ e intervalos abertos dois a dois disjuntos $]x_i, y_i[\subset I$, $i = 1, \ldots, n$, então:

$$\sum_{i=1}^{n} y_i - x_i < \delta \Longrightarrow \sum_{i=1}^{n} |F(y_i) - F(x_i)| < \varepsilon;$$

(c) se f é limitada então F é Lipschitziana com constante de Lipschitz igual a $\sup_{t \in I} |f(t)|$;
(d) (*teorema fundamental do cálculo*) se f é contínua num ponto $t \in I$ então F é derivável no ponto t e $F'(t) = f(t)$;
(e) se f é contínua e $G : I \to \mathbb{R}$ é uma primitiva qualquer de f (i.e., $G' = f$) então:

$$\int_a^b f \, \mathrm{d}\mathfrak{m} = G(b) - G(a),$$

para todos $a, b \in I$.

Exercício 2.22. (*integração por partes*) Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ são funções de classe C^1, mostre que:

$$\int_a^b f(x) g'(x) \, \mathrm{d}\mathfrak{m}(x) = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(x) g(x) \, \mathrm{d}\mathfrak{m}(x).$$

Teoremas de Convergência.

Exercício 2.23. Sejam $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida e $(f_k)_{k \geq 1}$ uma seqüência de funções integráveis $f_k : X \to \mathbb{R}$ tal que:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_X |f_k| \, \mathrm{d}\mu < +\infty.$$

Mostre que:

- a série $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ é absolutamente convergente para quase todo $x \in X$;

- se $f : X \to I\!R$ é uma função mensurável tal que $f = \sum_{k=1}^{\infty} f_k$ q. s. então f é integrável e:

$$\int_X f \,\mathrm{d}\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_X f_k \,\mathrm{d}\mu \in I\!R.$$

EXERCÍCIO 2.24. Sejam $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida e $f : X \to I\!R$ uma função integrável. Mostre que para todo $\varepsilon > 0$ existe uma função simples integrável $\phi : X \to I\!R$ tal que:

$$\int_X |f - \phi| \,\mathrm{d}\mu < \varepsilon.$$

EXERCÍCIO 2.25. Sejam $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida, $(A_k)_{k\geq 1}$ uma seqüência de subconjuntos mensuráveis de X e $f : X \to \overline{I\!R}$ uma função quase integrável. Assuma que para todo $x \in X$ o conjunto:

$$\big\{k \geq 1 : x \notin A_k\big\}$$

é finito. Mostre que:

$$\int_X f \,\mathrm{d}\mu = \lim_{k\to\infty} \int_{A_k} f \,\mathrm{d}\mu.$$

EXERCÍCIO 2.26. Seja $f : I\!R \to I\!R$ uma função integrável. Mostre que as funções:

$$g_1(t) = \int_{I\!R} f(x)\cos(tx) \,\mathrm{d}\mathfrak{m}(x), \quad g_2(t) = \int_{I\!R} f(x)\mathrm{sen}(tx) \,\mathrm{d}\mathfrak{m}(x),$$

são contínuas e que:

$$\lim_{t\to\pm\infty} g_1(t) = 0, \quad \lim_{t\to\pm\infty} g_2(t) = 0.$$

EXERCÍCIO 2.27. Considere a função $\phi : I\!R \to I\!R$ definida por:

$$\phi(t) = \int_{I\!R} e^{-x^2} \cos(tx) \,\mathrm{d}\mathfrak{m}(x),$$

para todo $t \in I\!R$.

(a) Mostre que ϕ é derivável e que:

$$\phi'(t) = -\frac{t}{2}\,\phi(t),$$

para todo $t \in I\!R$.

(b) Mostre que $\phi(t) = ce^{-\frac{t^2}{4}}$, para todo $t \in I\!R$, onde:

$$c = \int_{I\!R} e^{-x^2} \,\mathrm{d}\mathfrak{m}(x). \tag{2.7.12}$$

No Exercício 3.5 pediremos ao leitor para calcular explicitamente a integral em (2.7.12).

EXERCÍCIO 2.28. Considere a função $\phi :]0,+\infty[\to I\!R$ definida por:

$$\phi(t) = \int_0^{+\infty} e^{-tx}\,\frac{\operatorname{sen} x}{x}\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(x),$$

para todo $t > 0$.

(a) Mostre que ϕ é derivável e que $\phi'(t) = -\frac{1}{1+t^2}$, para todo $t > 0$.
(b) Mostre que $\lim_{t\to+\infty} \phi(t) = 0$.
(c) Conclua que $\phi(t) = \frac{\pi}{2} - \arctan t$, para todo $t > 0$.
(d) Usando integração por partes, verifique que:

$$\phi(t) = \int_0^1 e^{-tx}\,\frac{\operatorname{sen} x}{x}\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(x) + e^{-t}\cos 1 - \int_1^{+\infty} \cos x\; e^{-tx}\,\frac{1+tx}{x^2}\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(x),$$

para todo $t > 0$.
(e) Mostre que:

$$\lim_{t\to 0} \phi(t) = {}^{(R)}\!\!\int_0^{+\infty} f = \frac{\pi}{2},$$

onde $f : [0,+\infty[\to I\!R$ é definida por $f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$, para $x > 0$ e $f(0) = 1$.

O Teorema de Fubini em $\mathbb{R}^n$.

EXERCÍCIO 2.29. Seja $f : X \to I\!R^n$ uma função definida num subconjunto X de $I\!R^m$. Mostre que se o gráfico de f (recorde (2.7.9)) é mensurável então $\mathfrak{m}\big(\mathrm{gr}(f)\big) = 0$.

EXERCÍCIO 2.30. Sejam $X \subset I\!R^m$, $Y \subset I\!R^n$ conjuntos mensuráveis e $f : X \to \overline{I\!R}$, $g : Y \to \overline{I\!R}$ funções integráveis. Mostre que a função:

$$X \times Y \ni (x,y) \longmapsto f(x)g(y) \in \overline{I\!R}$$

é integrável e que sua integral é dada por:

$$\int_{X\times Y} f(x)g(y)\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(x,y) = \Big(\int_X f\,\mathrm{d}\mathfrak{m}\Big)\Big(\int_Y g\,\mathrm{d}\mathfrak{m}\Big).$$

EXERCÍCIO 2.31. Seja Δ_n o *simplexo padrão n-dimensional* definido por:

$$\Delta_n = \Big\{(x_1,\ldots,x_n) \in [0,+\infty[^n : \sum_{i=1}^n x_i \le 1\Big\}.$$

(a) Mostre que Δ_n é mensurável para todo $n \ge 1$.
(b) Se $a_n = \mathfrak{m}(\Delta_n)$, mostre que:

$$a_n = a_{n-1}\int_0^1 (1-t)^{n-1}\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(t),$$

para todo $n \ge 1$.
(c) Determine $\mathfrak{m}(\Delta_n)$.

CAPÍTULO 3

O Teorema de Mudança de Variáveis para Integrais de Lebesgue

3.1. O Efeito de Aplicações Lipschitzianas sobre a Medida de Lebesgue

3.1.1. NOTAÇÃO. Dado $x \in \mathbb{R}^n$, escrevemos:

$$\|x\|_\infty = \max\big\{|x_i| : i = 1, \ldots, n\big\},$$

e para $x, y \in \mathbb{R}^n$, escrevemos:

$$d_\infty(x, y) = \|x - y\|_\infty = \max\big\{|x_i - y_i| : i = 1, \ldots, n\big\}.$$

Claramente se B é um cubo n-dimensional com aresta a (veja Definição 1.4.22) então $d_\infty(x, y) \le a$, para todos $x, y \in B$. Provamos agora a seguinte recíproca para essa afirmação:

3.1.2. LEMA. *Sejam $A \subset \mathbb{R}^n$ e $a \ge 0$ tais que $d_\infty(x, y) \le a$, para todos $x, y \in A$. Então A está contido em um cubo n-dimensional de aresta a; em particular:*

$$\mathfrak{m}^*(A) \le a^n.$$

DEMONSTRAÇÃO. Se A é vazio, não há nada para se mostrar. Senão, seja $\pi_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a projeção sobre a i-ésima coordenada e considere o conjunto $A_i = \pi_i(A)$. Temos $|t - s| \le a$, para todos $t, s \in A_i$ e portanto $\sup A_i - \inf A_i \le a$; se $a_i = \inf A_i$, segue que:

$$A_i \subset [a_i, a_i + a]$$

e portanto:

$$A \subset \prod_{i=1}^n A_i \subset \prod_{i=1}^n [a_i, a_i + a]. \qquad \square$$

3.1.3. DEFINIÇÃO. Seja $\phi : X \to \mathbb{R}^n$ uma função definida num subconjunto X de $\mathbb{R}^m$. Dizemos que ϕ é *Lipschitziana* se existe uma constante $k \ge 0$ tal que:

$$d_\infty\big(\phi(x), \phi(y)\big) \le k\, d_\infty(x, y),$$

para todos $x, y \in X$. A constante k é dita uma *constante de Lipschitz* para a função ϕ.

Claramente toda função Lipschitziana é (uniformemente) contínua.

3.1.4. LEMA. *Seja A um subconjunto de $I\!R^n$. Dado $\varepsilon > 0$, existe um conjunto enumerável $\mathcal{R}$ de cubos n-dimensionais tal que $A \subset \bigcup_{B\in\mathcal{R}} B$ e $\sum_{B\in\mathcal{R}} |B| \le \mathfrak{m}^*(A) + \varepsilon$.*

DEMONSTRAÇÃO. Pelo Lema 1.4.12 existe um aberto U em $I\!R^n$ contendo A tal que $\mathfrak{m}(U) \le \mathfrak{m}^*(A) + \varepsilon$ e pelo Lema 1.4.23 existe um conjunto enumerável $\mathcal{R}$ de cubos n-dimensionais com interiores dois a dois disjuntos tal que $U = \bigcup_{B\in\mathcal{R}} B$. Daí:

$$\sum_{B\in\mathcal{R}} |B| = \mathfrak{m}(U) \le \mathfrak{m}^*(A) + \varepsilon. \qquad \square$$

3.1.5. PROPOSIÇÃO. *Seja $\phi : X \to I\!R^n$ uma função Lipschitziana com constante de Lipschitz $k \ge 0$, onde X é um subconjunto de $I\!R^n$. Então, para todo subconjunto A de X, temos:*

$$\mathfrak{m}^*\big(\phi(A)\big) \le k^n \mathfrak{m}^*(A).$$

DEMONSTRAÇÃO. Dado $\varepsilon > 0$ então, pelo Lema 3.1.4 existe um conjunto enumerável $\mathcal{R}$ de cubos n-dimensionais tal que $A \subset \bigcup_{B\in\mathcal{R}} B$ e:

$$\sum_{B\in\mathcal{R}} |B| \le \mathfrak{m}^*(A) + \varepsilon. \tag{3.1.1}$$

Daí $\phi(A) \subset \bigcup_{B\in\mathcal{R}} \phi(B \cap X)$ e portanto:

$$\mathfrak{m}^*\big(\phi(A)\big) \le \sum_{B\in\mathcal{R}} \mathfrak{m}^*\big(\phi(B\cap X)\big). \tag{3.1.2}$$

Fixado um cubo $B \in \mathcal{R}$ então, se a denota a aresta de B, temos:

$$d_\infty\big(\phi(x), \phi(y)\big) \le k\, d_\infty(x, y) \le ka,$$

para todos $x, y \in B \cap X$. Segue do Lema 3.1.2 que:

$$\mathfrak{m}^*\big(\phi(B\cap X)\big) \le (ka)^n = k^n |B|. \tag{3.1.3}$$

De (3.1.1), (3.1.2) e (3.1.3) vem:

$$\mathfrak{m}^*\big(\phi(A)\big) \le k^n \sum_{B\in\mathcal{R}} |B| \le k^n\big(\mathfrak{m}^*(A) + \varepsilon\big).$$

A conclusão segue fazendo $\varepsilon \to 0$. $\square$

3.1.6. COROLÁRIO. *Se $\phi : X \to I\!R^n$ é uma função Lipschitziana definida num subconjunto X de $I\!R^n$ então ϕ leva subconjuntos de X de medida nula em subconjuntos de medida nula de $I\!R^n$.* $\square$

3.1.7. OBSERVAÇÃO. Recorde que toda aplicação linear $T : I\!R^m \to I\!R^n$ é Lipschitziana. Mais explicitamente, se a *norma* da aplicação linear T é definida por:

$$\|T\| = \sup_{\|x\|_\infty \le 1} \|T(x)\|_\infty, \tag{3.1.4}$$

então:

$$\|T(x)\|_\infty \le \|T\|\|x\|_\infty,$$

para todo $x \in \mathbb{R}^m$, donde segue facilmente que $\|T\|$ é uma constante de Lipschitz para T. A finitude do supremo em (3.1.4) segue, por exemplo, do fato que a aplicação $x \mapsto \|T(x)\|_\infty$ é contínua e a bola $\big\{x : \|x\|_\infty \le 1\big\}$ é compacta.

3.1.8. COROLÁRIO. *Uma aplicação linear de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^n$ leva subconjuntos de medida nula de $\mathbb{R}^n$ em subconjuntos de medida nula de $\mathbb{R}^n$.*

DEMONSTRAÇÃO. Segue do Corolário 3.1.6 e da Observação 3.1.7. □

3.1.9. COROLÁRIO. *Todo subespaço vetorial próprio de $\mathbb{R}^n$ tem medida nula.*

DEMONSTRAÇÃO. Se V é um subespaço vetorial próprio de $\mathbb{R}^n$ então existe uma aplicação linear $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tal que $T\big(\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}\big) = V$; de fato, podemos escolher uma aplicação linear T que leva os $n-1$ primeiros vetores da base canônica de $\mathbb{R}^n$ sobre uma base qualquer de V (note que $\dim(V) \le n-1$). A conclusão segue do Corolário 1.4.7 e do Corolário 3.1.8. □

3.1.10. DEFINIÇÃO. Uma função $\phi : X \to \mathbb{R}^n$ definida num subconjunto X de $\mathbb{R}^m$ é dita *localmente Lipschitziana* se todo $x \in X$ possui uma vizinhança V em $\mathbb{R}^m$ tal que a função $\phi|_{V\cap X}$ é Lipschitziana.

3.1.11. PROPOSIÇÃO. *Se $\phi : X \to \mathbb{R}^n$ é uma função localmente Lipschitziana definida num subconjunto X de $\mathbb{R}^n$ então ϕ leva subconjuntos de X de medida nula em subconjuntos de medida nula de $\mathbb{R}^n$.*

DEMONSTRAÇÃO. Para cada $x \in X$ seja U_x um aberto em $\mathbb{R}^n$ contendo x tal que a restrição de ϕ a $U_x \cap X$ seja Lipschitziana. A cobertura aberta $X \subset \bigcup_{x\in X} U_x$ possui uma subcobertura enumerável $X \subset \bigcup_{i=1}^\infty U_{x_i}$. Agora, dado qualquer subconjunto A de X com $\mathfrak{m}(A) = 0$, segue do Corolário 3.1.6 que:

$$\mathfrak{m}\big(\phi(U_{x_i} \cap A)\big) = 0,$$

para todo i. A conclusão é obtida agora da igualdade:

$$\phi(A) = \bigcup_{i=1}^\infty \phi(U_{x_i} \cap A). \qquad \square$$

3.1.12. PROPOSIÇÃO. *Seja $\phi : X \to \mathbb{R}^n$ uma função localmente Lipschitziana definida num subconjunto X de $\mathbb{R}^n$. Então, para todo subconjunto mensurável A de $\mathbb{R}^n$ contido em X, temos que $\phi(A)$ é mensurável.*

DEMONSTRAÇÃO. Como A é mensurável, pelo Corolário 1.4.31, existe um subconjunto W de $\mathbb{R}^n$ de tipo F_σ com $W \subset A$ e $\mathfrak{m}(A \setminus W) = 0$; temos então que $A = W \cup N$, onde W é um F_σ e $N = A \setminus W$ tem medida nula. Como ϕ é localmente Lipschitziana então ϕ é localmente contínua e portanto contínua; daí ϕ leva compactos em compactos. Como W é uma união enumerável de fechados e todo fechado é uma união enumerável de compactos, segue que W é uma união enumerável de compactos; portanto também $\phi(W)$ é uma união enumerável de compactos. Temos então:

$$\phi(A) = \phi(W) \cup \phi(N),$$

onde $\phi(W)$ é um F_σ e $\phi(N)$ (é mensurável e) tem medida nula, pela Proposição 3.1.11. □

3.1.13. COROLÁRIO. *Se $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é uma aplicação linear então T leva subconjuntos mensuráveis de $\mathbb{R}^n$ em subconjuntos mensuráveis de $\mathbb{R}^n$.*

DEMONSTRAÇÃO. Segue da Observação 3.1.7 e da Proposição 3.1.12. □

3.2. O Efeito de Aplicações Lineares sobre a Medida de Lebesgue

O objetivo desta seção é provar o seguinte:

3.2.1. TEOREMA. *Seja $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação linear. Para todo subconjunto mensurável A de $\mathbb{R}^n$ temos que $T(A)$ é mensurável e:*

$$\mathfrak{m}\big(T(A)\big) = |\det T|\,\mathfrak{m}(A). \tag{3.2.1}$$

Em (3.2.1) denotamos por $\det T$ o *determinante* de T, ou seja, o determinante da matriz que representa T na base canônica de $\mathbb{R}^n$. No que segue, *sempre identificaremos aplicações lineares de $\mathbb{R}^m$ em $\mathbb{R}^n$ com as respectivas matrizes $n \times m$ que as representam com respeito às bases canônicas.*

O restante da seção é dedicado à demonstração do Teorema 3.2.1. Note que a mensurabilidade de $T(A)$ já é garantida pelo Corolário 3.1.13. Note também que se T não é inversível então o Teorema 3.2.1 segue do Corolário 3.1.9, já que a imagem de T é um subespaço próprio de $\mathbb{R}^n$ e $\det T = 0$. Se T é inversível, a estratégia da prova do Teorema 3.2.1 é a seguinte. Inicialmente, observamos que se $T_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ e $T_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ são aplicações lineares tais que a igualdade (3.2.1) vale para $T = T_1$ e para $T = T_2$, para todo subconjunto mensurável A de $\mathbb{R}^n$, então a igualdade (3.2.1) também vale para $T = T_1T_2$; de fato, dado $A \subset \mathbb{R}^n$ mensurável, temos:

$$\begin{aligned}\mathfrak{m}\big((T_1T_2)(A)\big) = |\det T_1|\,\mathfrak{m}\big(T_2(A)\big) &= |\det T_1|\,|\det T_2|\,\mathfrak{m}(A)\\ &= |\det(T_1T_2)|\,\mathfrak{m}(A).\end{aligned}$$

A seguir, selecionamos alguns tipos de aplicações lineares que chamaremos de *elementares*; mostraremos então que a igualdade (3.2.1) vale para aplicações lineares elementares e que toda aplicação linear inversível pode ser escrita como um produto de aplicações lineares elementares.

3.2.2. DEFINIÇÃO. Uma aplicação linear $E : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é dita *elementar* quando é de um dos seguintes tipos:

tipo 1. $E = L_{i,j;c}$, onde $i, j = 1, \ldots, n$ são distintos, $c \in \mathbb{R}$ e:

$$L_{i,j;c}(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_i + cx_j, \ldots, x_j, \ldots, x_n); \tag{3.2.2}$$

tipo 2. $E = \widehat{\sigma}$, onde $\sigma : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ é uma bijeção e:

$$\widehat{\sigma}(x_1, \ldots, x_n) = (x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}); \tag{3.2.3}$$

tipo 3. $E = D_\lambda$, onde $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in I\!R^n$, $\lambda_i \neq 0$ para $i = 1, \ldots, n$ e:

$$D_\lambda(x_1, \ldots, x_n) = (\lambda_1 x_1, \ldots, \lambda_n x_n). \tag{3.2.4}$$

Obviamente as expressões (3.2.2), (3.2.3) e (3.2.4) definem isomorfismos lineares de $I\!R^n$; em (3.2.2) escrevemos a definição de $L_{i,j;c}$ assumindo que $i < j$, mas obviamente uma fórmula análoga define $L_{i,j;c}$ se $i > j$. O efeito da multiplicação à esquerda de uma matriz T por uma matriz que representa uma aplicação linear elementar E nos dá o que chamamos de uma *transformação elementar* de matrizes; mais explicitamente, se T é uma matriz $n \times n$ cujas linhas são vetores $\ell_1, \ldots, \ell_n \in I\!R^n$ e se E é uma aplicação linear elementar então ET é a matriz cujas linhas são:

- $\ell_1, \ldots, \ell_i + c\ell_j, \ldots, \ell_j, \ldots, \ell_n$, se $E = L_{i,j;c}$;
- $\ell_{\sigma(1)}, \ldots, \ell_{\sigma(n)}$, se $E = \widehat{\sigma}$;
- $\lambda_1\ell_1, \ldots, \lambda_n\ell_n$, se $E = D_\lambda$.

As transformações elementares de matrizes associadas à multicação à esquerda por uma aplicação elementar de tipos 1, 2 e 3 serão respectivamente chamadas de *transformações elementares de tipos 1, 2 e 3*.

O seguinte resultado é padrão em textos elementares de Álgebra Linear.

3.2.3. Lema. *Se $T : I\!R^n \to I\!R^n$ é uma aplicação linear inversível então existe uma seqüência finita de transformações elementares de matrizes que leva T até a matriz identidade.*

Demonstração. Fazemos uma descrição sucinta do algorítmo que é conhecido como *escalonamento* de matrizes. Em primeiro lugar, como T é inversível então algum elemento da primeira coluna de T é não nulo; realizando uma transformação elementar de tipo 2, podemos assumir que o elemento T_{11} é não nulo e depois realizando uma transformação elementar de tipo 3 podemos assumir que $T_{11} = 1$. Agora, uma seqüência de $n - 1$ transformações elementares de tipo 1 nos permite anular os elementos T_{j1}, com $j = 2, \ldots, n$. Nesse ponto, a primeira coluna de T coincide com o primeiro vetor da base canônica de $I\!R^n$; daí a submatriz de T obtida removendo a primeira linha e a primeira coluna é inversível e podemos portanto repetir o algorítmo recursivamente na mesma. Obteremos então uma matriz T triangular superior em que todos os elementos da diagonal são iguais a 1. Podemos agora realizar uma seqüência de $\frac{n(n-1)}{2}$ transformações elementares de tipo 1 para anular os elementos de T que estão acima da diagonal, obtendo assim a matriz identidade. $\square$

3.2.4. Corolário. *Toda aplicação linear inversível $T : I\!R^n \to I\!R^n$ é um produto de aplicações lineares elementares.*

Demonstração. Segue do Lema 3.2.3 que existem aplicações lineares elementares E_1, ..., E_k de modo que $E_1 \cdots E_k T$ é igual à matriz identidade.

Daí $T = E_k^{-1} \cdots E_1^{-1}$. A conclusão segue da observação simples de que a inversa de uma aplicação linear elementar é novamente uma aplicação linear elementar (de mesmo tipo). $\square$

Em vista do Corolário 3.2.4 e das observações feitas anteriormente nesta seção, temos que a demonstração do Teorema 3.2.1 ficará concluída assim que demonstrarmos o seguinte:

3.2.5. LEMA. *Se $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é uma aplicação linear elementar então a igualdade* (3.2.1) *vale para todo subconjunto mensurável A de $\mathbb{R}^n$.*

DEMONSTRAÇÃO. Se T é de tipo 2 ou 3 então a tese do lema segue respectivamente dos resultados dos Exercícios 1.11 e 1.12 (note que as aplicações lineares elementares de tipo 2 tem determinante igual a ± 1). Resta então considerar o caso em que T é uma aplicação linear elementar de tipo 1. É fácil verificar que se $\sigma : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ é uma bijeção então:

$$\widehat{\sigma}^{-1} L_{i,j;c}\, \widehat{\sigma} = L_{\sigma(i),\sigma(j);c},$$

para todos $i, j = 1, \ldots, n$ distintos e todo $c \in \mathbb{R}$. Podemos então reduzir a demonstração do lema apenas ao caso em que $T = L_{n,1;c}$, $c \in \mathbb{R}$. No que segue, identificamos $\mathbb{R}^n$ com o produto $\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$ e usamos a notação da Seção 2.7; a aplicação T escreve-se na forma:

$$T(x, y) = (x, y + cx_1), \quad x \in \mathbb{R}^{n-1},\ y \in \mathbb{R}.$$

Dado $A \subset \mathbb{R}^n$ então para todo $x \in \mathbb{R}^{n-1}$, a fatia vertical $T(A)_x$ do conjunto $T(A)$ coincide com a translação $A_x + cx_1$ da fatia vertical A_x de A. Se A é mensurável, temos que $T(A)$ também é mensurável (vide Corolário 3.1.13); segue então da Proposição 2.7.3 que:

$$\begin{aligned}\mathfrak{m}\big(T(A)\big) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \mathfrak{m}\big(T(A)_x\big)\, \mathrm{d}\mathfrak{m}(x) &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \mathfrak{m}(A_x + cx_1)\, \mathrm{d}\mathfrak{m}(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \mathfrak{m}(A_x)\, \mathrm{d}\mathfrak{m}(x) = \mathfrak{m}(A),\end{aligned}$$

onde na terceira igualdade usamos o Lema 1.4.10. Como T é uma matriz triangular com elementos da diagonal iguais a 1, temos que $\det T = 1$ e portanto a igualdade (3.2.1) fica demonstrada. $\square$

3.3. O Teorema de Mudança de Variáveis

Nesta seção nós provaremos o Teorema de Mudança de Variáveis para integais de Lebesgue em $\mathbb{R}^n$. Para um entendimento completo do conteúdo desta seção serão necessários alguns conhecimentos básicos de Cálculo no $\mathbb{R}^n$, sobre os quais fazemos uma rápida revisão na Seção 3.4.

O enunciado do teorema é o seguinte:

3.3.1. TEOREMA (mudança de variáveis). *Seja $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação* injetora *de classe C^1 definida num subconjunto aberto U de $\mathbb{R}^n$; suponha que a diferencial $\mathrm{d}\phi(x)$ é um isomorfismo de $\mathbb{R}^n$, para todo $x \in U$.*

Dados um conjunto mensurável $A \subset \mathbb{R}^n$ *contido em* U *e uma função mensurável* $f : \phi(A) \to \overline{\mathbb{R}}$ *então:*

- *o conjunto* $\phi(A)$ *é mensurável;*
- *a função:*

$$A \ni y \longmapsto f\big(\phi(y)\big)\,\big|\det \mathrm{d}\phi(y)\big| \in \overline{\mathbb{R}} \tag{3.3.1}$$

  é mensurável;
- *a função* f *é quase integrável se e somente se a função* (3.3.1) *é quase integrável e, nesse caso, vale a igualdade:*

$$\int_{\phi(A)} f(x)\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(x) = \int_A f\big(\phi(y)\big)\,\big|\det \mathrm{d}\phi(y)\big|\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(y). \tag{3.3.2}$$

Note que, pelo Teorema da Função Inversa (Teorema 3.4.7), as hipóteses sobre ϕ no enunciado do Teorema 3.3.1 são equivalentes à condição de que $\phi(U)$ seja aberto em $\mathbb{R}^n$ e que $\phi : U \to \phi(U)$ seja um difeomorfismo C^1. Note também que a mensurabilidade de $\phi(A)$ é garantida pela Proposição 3.1.12, já que $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ é uma função localmente Lipschitziana (veja Corolário 3.4.5).

Para demonstrar o Teorema 3.3.1, precisamos de alguns lemas preparatórios.

3.3.2. Lema. *Seja* $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ *uma função de classe* C^1 *num aberto* $U \subset \mathbb{R}^n$ *e suponha que a diferencial* $\mathrm{d}\phi(x)$ *é um isomorfismo de* $\mathbb{R}^n$*, para todo* $x \in U$*. Então, para todo subconjunto mensurável* E *de* $\mathbb{R}^n$ *temos que* $\phi^{-1}(E)$ *é mensurável; em outras palavras, a função:*

$$\phi : \big(U, \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)|_U\big) \longrightarrow \big(\mathbb{R}^n, \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)\big)$$

é mensurável.

Demonstração. Pelo Teorema da Função Inversa (Teorema 3.4.7), cada $x \in U$ possui uma vizinhança aberta U_x contida em U tal que $\phi(U_x)$ é aberto em $\mathbb{R}^n$ e $\phi|_{U_x} : U_x \to \phi(U_x)$ é um difeomorfismo C^1. Daí a função $\psi_x = (\phi|_{U_x})^{-1} : \phi(U_x) \to U_x$ é localmente Lipschitziana (veja Corolário 3.4.5) e portanto, pela Proposição 3.1.12, o conjunto

$$\psi_x\big(E \cap \phi(U_x)\big) = \phi^{-1}\big(E \cap \phi(U_x)\big) \cap U_x = \phi^{-1}(E) \cap U_x$$

é mensurável, para todo $x \in U$. A cobertura aberta $U = \bigcup_{x \in U} U_x$ possui uma subcobertura enumerável $U = \bigcup_{i=1}^{\infty} U_{x_i}$ e portanto:

$$\phi^{-1}(E) = \bigcup_{i=1}^{\infty} \big(\phi^{-1}(E) \cap U_{x_i}\big),$$

donde segue que $\phi^{-1}(E)$ é mensurável. □

3.3.3. Corolário. *Seja* $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ *uma função de classe* C^1 *num aberto* $U \subset \mathbb{R}^n$ *tal que a diferencial* $\mathrm{d}\phi(x)$ *é um isomorfismo de* $\mathbb{R}^n$*, para todo* $x \in U$*. Dados um subconjunto* A *de* U*, um espaço mensurável* $(X, \mathcal{A})$

e uma função mensurável $f : \phi(A) \to X$ *então a função* $f \circ \phi|_A : A \to X$ *é mensurável.*

DEMONSTRAÇÃO. Basta observar que $f \circ \phi|_A$ é igual à composta das funções mensuráveis:

$$\begin{aligned} \phi|_A : \big(A, \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)|_A\big) &\longrightarrow \big(\phi(A), \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)|_{\phi(A)}\big), \\ f : \big(\phi(A), \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)|_{\phi(A)}\big) &\longrightarrow (X, \mathcal{A}). \end{aligned}$$ □

3.3.4. LEMA. *Seja* $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ *uma função de classe* C^1 *num aberto* $U \subset \mathbb{R}^n$ *e suponha que a diferencial* $\mathrm{d}\phi(y_0)$ *é um isomorfismo de* $\mathbb{R}^n$*, para um certo* $y_0 \in U$*. Então, para todo* $\varepsilon > 0$*, existe uma vizinhança aberta* V *de* y_0 *contida em* U *tal que para todo conjunto mensurável* $A \subset \mathbb{R}^n$ *contido em* V *temos que* $\phi(A)$ *é mensurável e vale a desigualdade:*

$$\mathfrak{m}\big(\phi(A)\big) \le (1+\varepsilon) \int_A \big|\det \mathrm{d}\phi(y)\big| \, \mathrm{d}\mathfrak{m}(y). \tag{3.3.3}$$

DEMONSTRAÇÃO. Em primeiro lugar, observe que a mensurabilidade de $\phi(A)$ segue da Proposição 3.1.12, já que ϕ é localmente Lipschitziana (veja Corolário 3.4.5). Seja $\varepsilon' > 0$ tal que:

$$(1+\varepsilon')^{n+1} \le 1 + \varepsilon.$$

Denote por T a diferencial de ϕ no ponto y_0. Como $T^{-1} \circ \mathrm{d}\phi(y_0)$ é igual à aplicação identidade e como a função $y \mapsto \|T^{-1} \circ \mathrm{d}\phi(y)\|$ é contínua, segue que:

$$\big\|T^{-1} \circ \mathrm{d}\phi(y)\big\| < 1 + \varepsilon', \tag{3.3.4}$$

para todo y em uma vizinhança suficientemente pequena de y_0. Usando também a continuidade da função $y \mapsto \big|\det \mathrm{d}\phi(y)\big|$, vemos que:

$$\big|\det \mathrm{d}\phi(y_0)\big| < (1+\varepsilon') \, \big|\det \mathrm{d}\phi(y)\big|, \tag{3.3.5}$$

para todo y em uma vizinhança suficientemente pequena de y_0. Seja V uma bola aberta centrada em y_0 contida em U tal que (3.3.4) e (3.3.5) valem para todo $y \in V$. Seja A um subconjunto mensurável de V e provemos (3.3.3). Usando o Teorema 3.2.1, obtemos:

$$\begin{aligned} \mathfrak{m}\big(\phi(A)\big) = \mathfrak{m}\big(TT^{-1}\phi(A)\big) &= |\det T| \, \mathfrak{m}\big(T^{-1}\phi(A)\big) \\ &= \big|\det \mathrm{d}\phi(y_0)\big| \, \mathfrak{m}\big(T^{-1}\phi(A)\big). \end{aligned} \tag{3.3.6}$$

Para todo $y \in V$, segue da regra da cadeia (veja Corolário 3.4.2) que:

$$\big\|\mathrm{d}(T^{-1} \circ \phi)(y)\big\| = \big\|T^{-1} \circ \mathrm{d}\phi(y)\big\| < 1 + \varepsilon',$$

e portanto, pela desigualdade do valor médio (veja Corolário 3.4.4), a função $T^{-1} \circ \phi|_V$ é Lipschitziana com constante de Lipschitz $1 + \varepsilon'$. Usando a Proposição 3.1.5, obtemos:

$$\mathfrak{m}\big(T^{-1}\phi(A)\big) \le (1+\varepsilon')^n \mathfrak{m}(A). \tag{3.3.7}$$

De (3.3.5), obtemos:

$$(3.3.8)\qquad \big|\det \mathrm{d}\phi(y_0)\big|\,\mathfrak{m}(A) = \int_A \big|\det \mathrm{d}\phi(y_0)\big|\chi_A(y)\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(y) \le (1+\varepsilon')\int_A \big|\det \mathrm{d}\phi(y)\big|\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(y).$$

De (3.3.6), (3.3.7) e (3.3.8), vem:

$$\mathfrak{m}\big(\phi(A)\big) \le (1+\varepsilon')^n\,\big|\det \mathrm{d}\phi(y_0)\big|\,\mathfrak{m}(A) \le (1+\varepsilon')^{n+1}\int_A \big|\det \mathrm{d}\phi(y)\big|\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(y) \le (1+\varepsilon)\int_A \big|\det \mathrm{d}\phi(y)\big|\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(y). \quad \square$$

3.3.5. Lema. *Seja $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ uma função de classe C^1 num aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ e suponha que a diferencial* $\mathrm{d}\phi(y)$ *é um isomorfismo de $\mathbb{R}^n$, para todo $y \in U$. Então, dado um conjunto mensurável $A \subset \mathbb{R}^n$ contido em U, temos que $\phi(A)$ é mensurável e vale a desigualdade:*

$$\mathfrak{m}\big(\phi(A)\big) \le \int_A \big|\det \mathrm{d}\phi(y)\big|\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(y).$$

Demonstração. Seja dado $\varepsilon > 0$. Pelo Lema 3.3.4, todo ponto $y_0 \in U$ possui uma vizinhança aberta V_{y_0} contida em U com a seguinte propriedade: se $A \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto mensurável contido em V_{y_0} então $\phi(A)$ é mensurável e vale a desigualdade (3.3.3). Da cobertura aberta $U = \bigcup_{y\in U} V_y$, podemos extrair uma subcobertura enumerável $U = \bigcup_{i=1}^{\infty} V_{y_i}$. Para cada $i \ge 1$, definimos:

$$W_i = \begin{cases} V_{y_i} \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} V_{y_j}, & \text{se } i \ge 2,\\ V_{y_1}, & \text{se } i = 1,\end{cases}$$

de modo que $U = \bigcup_{i=1}^{\infty} W_i$, cada W_i é mensurável (não necessariamente aberto), $W_i \subset V_{y_i}$ e os conjuntos W_i são dois a dois disjuntos. Agora, dado um conjunto mensurável arbitrário $A \subset \mathbb{R}^n$ contido em U, temos:

$$\phi(A) = \bigcup_{i=1}^{\infty} \phi(A \cap W_i).$$

Como $A \cap W_i$ é um subconjunto mensurável de V_{y_i}, segue que $\phi(A \cap W_i)$ é mensurável e vale a desigualdade:

$$\mathfrak{m}\big(\phi(A \cap W_i)\big) \le (1+\varepsilon)\int_{A\cap W_i} \big|\det \mathrm{d}\phi(y)\big|\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(y).$$

Vemos então que $\phi(A)$ é mensurável e além disso:

$$\begin{aligned}\mathfrak{m}\big(\phi(A)\big) \le \sum_{i=1}^{\infty} \mathfrak{m}\big(\phi(A \cap W_i)\big) \le (1+\varepsilon) \sum_{i=1}^{\infty} \int_{A \cap W_i} \big|\det \mathrm{d}\phi(y)\big| \,\mathrm{d}\mathfrak{m}(y) \\ = (1+\varepsilon) \int_A \big|\det \mathrm{d}\phi(y)\big| \,\mathrm{d}\mathfrak{m}(y),\end{aligned}$$

onde na última igualdade usamos o resultado do Exercício 2.13. A conclusão final é obtida agora fazendo $\varepsilon \to 0$. □

3.3.6. Corolário. *Seja $\phi : U \to I\!R^n$ uma função de classe C^1 num aberto $U \subset I\!R^n$ e suponha que a diferencial $\mathrm{d}\phi(y)$ é um isomorfismo de $I\!R^n$, para todo $y \in U$. Então, dado um conjunto mensurável $A \subset I\!R^n$ contido em U e uma função mensurável $f : \phi(A) \to [0, +\infty]$ temos que $\phi(A)$ é mensurável, a função* (3.3.1) *é mensurável e vale a desigualdade:*

$$\int_{\phi(A)} f(x) \,\mathrm{d}\mathfrak{m}(x) \le \int_A f\big(\phi(y)\big) \big|\det \mathrm{d}\phi(y)\big| \,\mathrm{d}\mathfrak{m}(y). \tag{3.3.9}$$

Demonstração. Note que a mensurabilidade da função (3.3.1) segue do Corolário 3.3.3. Para provar a desigualdade (3.3.9), suponhamos inicialmente que $f : \phi(A) \to [0, +\infty]$ é simples e mensurável. Então podemos escrever:

$$f = \sum_{i=1}^{k} c_i \chi_{E_i},$$

onde $c_i \in [0, +\infty]$ e E_i é um subconjunto mensurável de $\phi(A)$, para todo $i = 1, \ldots, k$. Seja $A_i = \phi^{-1}(E_i) \cap A$, de modo que A_i é mensurável (veja Lema 3.3.2) e $\phi(A_i) = E_i$. Segue do Lema 3.3.5 que:

$$\mathfrak{m}(E_i) = \mathfrak{m}\big(\phi(A_i)\big) \le \int_{A_i} \big|\det \mathrm{d}\phi(y)\big| \,\mathrm{d}\mathfrak{m}(y),$$

para $i = 1, \ldots, k$ e portanto:

$$\begin{aligned}\int_{\phi(A)} f(x) \,\mathrm{d}\mathfrak{m}(x) = \sum_{i=1}^{k} c_i \mathfrak{m}(E_i) \le \sum_{i=1}^{k} c_i \int_{A_i} \big|\det \mathrm{d}\phi(y)\big| \,\mathrm{d}\mathfrak{m}(y) \\ = \sum_{i=1}^{k} c_i \int_A \chi_{E_i}\big(\phi(y)\big) \big|\det \mathrm{d}\phi(y)\big| \,\mathrm{d}\mathfrak{m}(y) \\ = \int_A f\big(\phi(y)\big) \big|\det \mathrm{d}\phi(y)\big| \,\mathrm{d}\mathfrak{m}(y).\end{aligned}$$

Demonstramos então a desigualdade (3.3.9) no caso em que f é simples e mensurável. Seja agora $f : \phi(A) \to [0, +\infty]$ uma função mensurável arbitrária. Temos que existe uma seqüência $(f_k)_{k \ge 1}$ de funções simples e mensuráveis $f_k : \phi(A) \to [0,+\infty]$ tal que $f_k \nearrow f$; daí:

$$\int_{\phi(A)} f_k(x)\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(x) \le \int_A f_k\big(\phi(y)\big)\,\big|\det \mathrm{d}\phi(y)\big|\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(y),$$

para todo $k \ge 1$. A desigualdade (3.3.9) é obtida agora fazendo $k \to \infty$ e usando o Teorema da Convergência Monotônica. □

Prova do Teorema 3.3.1. Começamos supondo que f é não negativa. A mensurabilidade de $\phi(A)$ e da função (3.3.1) já foram estabelecidas no Corolário 3.3.6. Já temos também a desigualdade (3.3.9). A desigualdade oposta segue da aplicação do próprio Corolário 3.3.6 num contexto diferente. Recorde que, pelo Teorema da Função Inversa (Teorema 3.4.7), $\phi(U)$ é um aberto de $I\!R^n$ e $\phi : U \to \phi(U)$ é um difeomorfismo C^1; aplicamos então o Corolário 3.3.6 ao difeomorfismo inverso $\psi = \phi^{-1} : \phi(U) \to I\!R^n$, à função $g : A \to [0,+\infty]$ definida por:

$$g(y) = f\big(\phi(y)\big)\,\big|\det \mathrm{d}\phi(y)\big|, \quad y \in A,$$

e ao conjunto mensurável $B = \phi(A) \subset \phi(U)$. Obtemos a desigualdade:

$$\int_{\psi(B)} g(y)\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(y) \le \int_B g\big(\psi(x)\big)\,\big|\det \mathrm{d}\psi(x)\big|\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(x). \tag{3.3.10}$$

Temos (veja (3.4.2)):

$$g\big(\psi(x)\big)\,\big|\det \mathrm{d}\psi(x)\big| = f(x)\,\big|\det \mathrm{d}\phi(y)\big|\,\big|\det \mathrm{d}(\phi^{-1})\big(\phi(y)\big)\big| = f(x),$$

onde $y = \phi^{-1}(x)$. Daí (3.3.10) nos dá:

$$\int_A f\big(\phi(y)\big)\,\big|\det \mathrm{d}\phi(y)\big|\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(y) \le \int_{\phi(A)} f(x)\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(x),$$

provando (3.3.2). Finalmente, se $f : \phi(A) \to \overline{I\!R}$ é uma função mensurável arbitrária então:

$$\int_{\phi(A)} f^+(x)\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(x) = \int_A f^+\big(\phi(y)\big)\,\big|\det \mathrm{d}\phi(y)\big|\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(y), \tag{3.3.11}$$

$$\int_{\phi(A)} f^-(x)\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(x) = \int_A f^-\big(\phi(y)\big)\,\big|\det \mathrm{d}\phi(y)\big|\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(y); \tag{3.3.12}$$

a conclusão segue subtraindo (3.3.12) de (3.3.11), tendo em mente que as funções:

$$A \ni y \longmapsto f^+\big(\phi(y)\big)\,\big|\det \mathrm{d}\phi(y)\big|, \quad A \ni y \longmapsto f^-\big(\phi(y)\big)\,\big|\det \mathrm{d}\phi(y)\big|$$

são respectivamente a parte positiva e a parte negativa da função (3.3.1). □

3.4. Apêndice à Seção 3.3: recordação de Cálculo no $\mathbb{R}^n$

Seja $U \subset I\!R^m$ um aberto e $\phi : U \to I\!R^n$ uma função. Recorde que ϕ é dita *diferenciável* num ponto $x \in U$ se existe uma aplicação linear $T : I\!R^m \to I\!R^n$ tal que (recorde Notação 3.1.1):

$$\lim_{h\to 0} \frac{\phi(x+h) - \phi(x) - T(h)}{\|h\|_\infty} = 0; \tag{3.4.1}$$

essa aplicação linear é única quando existe e é dada por:

$$T(v) = \lim_{t\to 0} \frac{\phi(x+tv) - \phi(x)}{t} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial \phi}{\partial v}(x),$$

para todo $v \in I\!R^m$. A aplicação linear T é chamada a *diferencial* de ϕ no ponto x e é denotada por $\mathrm{d}\phi(x)$. A matriz que representa a diferencial $\mathrm{d}\phi(x)$ com respeito às bases canônicas é chamada a *matriz Jacobiana* de ϕ no ponto x. No que segue, *usaremos a mesma notação para a diferencial* $\mathrm{d}\phi(x)$ *e para a matriz Jacobiana de* ϕ *no ponto* x. Temos:

$$\mathrm{d}\phi(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial \phi_1}{\partial x_m}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \phi_n}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial \phi_n}{\partial x_m}(x) \end{pmatrix},$$

onde $\phi = (\phi_1, \ldots, \phi_n)$ e $\frac{\partial \phi_i}{\partial x_j}(x)$ denota a derivada parcial no ponto x da função coordenada ϕ_i com respeito à j-ésima variável. Se uma aplicação ϕ é diferenciável num ponto x então ϕ é contínua nesse ponto.

Intuitivamente, (3.4.1) diz que $T = \mathrm{d}\phi(x)$ é uma "boa aproximação linear" para ϕ numa vizinhança de x. Mais explicitamente, quando o ponto $x \in I\!R^m$ sofre um deslocamento (vetorial) Δx então o ponto $y = \phi(x) \in I\!R^n$ sofre um deslocamento (vetorial) $\Delta y = \phi(x + \Delta x) - \phi(x)$ e a diferenciabilidade de ϕ no ponto x nos diz que Δy é aproximadamente uma função linear de Δx; mais precisamente, existe uma aplicação linear $\mathrm{d}\phi(x) \stackrel{\text{def}}{=} T$, tal que Δy difere de $T(\Delta x)$ por uma quantidade que vai a zero mais rápido que $\|\Delta x\|_\infty$, quando $\Delta x \to 0$.

Quando uma aplicação $\phi : U \to I\!R^n$ definida num aberto U de $I\!R^m$ é diferenciável em todos os pontos de U dizemos simplesmente que ela é *diferenciável* em U; dizemos que ϕ é *de classe* C^1 em U se ϕ é diferenciável em U e se a função $U \ni x \mapsto \mathrm{d}\phi(x)$ é contínua. Sabe-se que *uma função* ϕ *é de classe* C^1 *num aberto* U *se e somente se as derivadas parciais* $\frac{\partial \phi_i}{\partial x_j}(x)$, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$, *existem e são contínuas em todos os pontos* $x \in U$.

Enunciamos agora alguns teoremas básicos de Cálculo no $I\!R^n$ que usamos na Seção 3.3.

3.4.1. TEOREMA (regra da cadeia). *Sejam* $\phi : U \to I\!R^n$, $\psi : V \to I\!R^p$ *funções tais que* $\phi(U) \subset V$, *onde* U *é um aberto de* $I\!R^m$ *e* V *é um aberto de* $I\!R^n$. *Se* ϕ *é diferenciável num ponto* $x \in U$ *e* ψ *é diferenciável no ponto* $\phi(x)$

então a função composta $\psi \circ \phi$ é diferenciável no ponto x e sua diferencial é dada por:

$$\mathrm{d}(\psi \circ \phi)(x) = \mathrm{d}\psi\big(\phi(x)\big) \circ \mathrm{d}\phi(x).$$

Segue diretamente da definição de diferenciabilidade que toda aplicação linear $T : I\!R^m \to I\!R^n$ é diferenciável em $I\!R^m$ e $\mathrm{d}T(x) = T$, para todo $x \in I\!R^m$. Dessa observação e da regra da cadeia obtemos:

3.4.2. COROLÁRIO. *Seja $\phi : U \to I\!R^n$ uma função definida num aberto $U \subset I\!R^m$, diferenciável num ponto $x \in U$. Se $T : I\!R^n \to I\!R^p$ é uma aplicação linear então $T \circ \phi$ é diferenciável no ponto x e sua diferencial é dada por:*

$$\mathrm{d}(T \circ \phi)(x) = T \circ \mathrm{d}\phi(x). \qquad \square$$

Para o teorema a seguir, o leitor deve recordar a Notação 3.1.1 e a Observação 3.1.7, onde definimos a norma de uma aplicação linear.

3.4.3. TEOREMA (desigualdade do valor médio). *Seja $\phi : U \to I\!R^n$ uma função definida num aberto $U \subset I\!R^m$ e sejam fixados dois pontos $x, y \in U$. Suponha que a função ϕ é contínua em todos os pontos do* segmento de reta fechado*:*

$$[x, y] = \big\{x + \theta(y - x) : 0 \le \theta \le 1\big\}$$

e é diferenciável em todos os pontos do segmento de reta aberto*:*

$$]x, y[= \big\{x + \theta(y - x) : 0 < \theta < 1\big\}.$$

Então existe $\theta \in \,]0, 1[$ tal que vale a desigualdade:

$$\|\phi(y) - \phi(x)\|_\infty \le \big\|\mathrm{d}\phi\big(x + \theta(y - x)\big)\big\| \|y - x\|_\infty.$$

Recorde que um subconjunto X de $I\!R^n$ é dito *convexo* se para todos $x, y \in X$ o segmento de reta $[x, y]$ está contido em X.

3.4.4. COROLÁRIO. *Sejam $\phi : U \to I\!R^n$ uma função definida num aberto $U \subset I\!R^m$ e suponha que ϕ é diferenciável em todos os pontos de um subconjunto convexo X de U. Se existe $k \ge 0$ tal que $\|\mathrm{d}\phi(x)\| \le k$, para todo $x \in X$ então a função $\phi|_X$ é Lipschitziana com constante de Lipschitz k.* $\square$

3.4.5. COROLÁRIO. *Uma função $\phi : U \to I\!R^n$ de classe C^1 num aberto $U \subset I\!R^m$ é localmente Lipschitziana.*

DEMONSTRAÇÃO. Segue do Corolário 3.4.4, observando que a função $x \mapsto \|\mathrm{d}\phi(x)\|$ é contínua e portanto limitada numa bola suficientemente pequena centrada num ponto dado $x \in U$. $\square$

3.4.6. DEFINIÇÃO. Se U, $V \subset I\!R^n$ são abertos então um *difeomorfismo* de U para V é uma bijeção diferenciável $\phi : U \to V$ cuja inversa $\phi^{-1} : V \to U$ também é diferenciável. Dizemos que $\phi : U \to V$ é um *difeomorfismo C^1* se ϕ é bijetora e se ϕ e ϕ^{-1} são ambas de classe C^1.

Se $\phi : U \to V$ é um difeomorfismo então segue da regra da cadeia que para todo $x \in U$ a diferencial $\mathrm{d}\phi(x) : I\!R^n \to I\!R^n$ é um isomorfismo de $I\!R^n$ cujo inverso é dado por:

$$\big(\mathrm{d}\phi(x)\big)^{-1} = \mathrm{d}(\phi^{-1})\big(\phi(x)\big). \tag{3.4.2}$$

Temos a seguinte recíproca para essa afirmação:

3.4.7. TEOREMA (da função inversa). *Seja $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ uma função de classe C^1 definida num aberto $U \subset \mathbb{R}^n$. Se $x \in U$ é tal que a diferencial* $\mathrm{d}\phi(x)$ *é um isomorfismo de $\mathbb{R}^n$ então existe uma vizinhança aberta U_0 de x contida em U tal que $\phi(U_0)$ é aberto em $\mathbb{R}^n$ e $\phi|_{U_0} : U_0 \to \phi(U_0)$ é um difeomorfismo C^1. Além do mais, se* $\mathrm{d}\phi(x)$ *é um isomorfismo de $\mathbb{R}^n$ para todo $x \in U$ então:*

- *ϕ é uma* aplicação aberta*, i.e., ϕ leva subconjuntos abertos de U em subconjuntos abertos de $\mathbb{R}^n$;*
- *se U_0 é um aberto qualquer contido em U tal que $\phi|_{U_0}$ é injetora então $\phi|_{U_0} : U_0 \to \phi(U_0)$ é um difeomorfismo C^1.*

Exercícios para o Capítulo 3

O Efeito de Aplicações Lineares sobre a Medida de Lebesgue.

EXERCÍCIO 3.1. Dados pontos $p_1, \ldots, p_{n+1} \in \mathbb{R}^n$, então o *simplexo* de vértices $p_1, \ldots, p_{n+1}$ é definido por:

$$\Big\{ \sum_{i=1}^{n+1} a_i p_i : a_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, n+1,\ \sum_{i=1}^{n+1} a_i = 1 \Big\}. \tag{3.4.3}$$

Mostre que o simplexo (3.4.3) é mensurável e determine uma expressão para a sua medida de Lebesgue.

O Teorema de Mudança de Variáveis.

EXERCÍCIO 3.2. Dados $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ e $r > 0$, mostre que o disco:

$$\big\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq r^2 \big\}$$

é mensurável e determine sua medida de Lebesgue.

EXERCÍCIO 3.3. Considere a aplicação $\phi : \left]0, +\infty\right[\times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definida por:

$$\phi(\rho, \theta) = (\rho \cos\theta, \rho\,\mathrm{sen}\theta),$$

para todos $\rho \in \left]0, +\infty\right[$, $\theta \in \mathbb{R}$.

- Calcule $\det \mathrm{d}\phi(\rho, \theta)$.
- Se $A = \left]0, 1\right] \times [0, 4\pi]$ e $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ denota a função constante e igual a 1, calcule as integrais:

$$\int_{\phi(A)} f(x, y)\, \mathrm{d}\mathfrak{m}(x, y), \qquad \int_A \big| \det \mathrm{d}\phi(\rho, \theta) \big|\, \mathrm{d}\mathfrak{m}(\rho, \theta).$$

- Explique o que está acontecendo, em vista do Teorema 3.3.1.

EXERCÍCIO 3.4. Seja A um subconjunto de $\mathbb{R}^n$ e $p = (p_1, \ldots, p_{n+1})$ um ponto de $\mathbb{R}^{n+1}$ com $p_{n+1} \neq 0$. Identifiquemos $\mathbb{R}^{n+1}$ com o produto $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. O *cone de base A e vértice p* é definido por:

$$C(A, p) = \bigcup_{x \in A} [(x, 0), p] = \big\{ (x, 0) + t\big(p - (x, 0)\big) : x \in A,\ t \in [0, 1] \big\}.$$

Considere a função $\phi : I\!R^n \times \left]0,1\right[\to I\!R^{n+1}$ definida por:

$$\phi(x,t) = (x,0) + t\big(p - (x,0)\big),$$

para todos $x \in I\!R^n$, $t \in \left]0,1\right[$. Mostre que:

- ϕ é injetora, de classe C^1 e $\det \mathrm{d}\phi(x,t) = (1-t)^n p_{n+1}$, para todos $x \in I\!R^n$, $t \in \left]0,1\right[$;
- se A é mensurável então o cone $C(A,p)$ é mensurável e sua medida de Lebesgue é dada por:

$$\mathfrak{m}\big(C(A,p)\big) = \frac{\mathfrak{m}(A)|p_{n+1}|}{n+1}.$$

EXERCÍCIO 3.5. Mostre que:

$$\Big(\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(x)\Big)^2 = \int_Q e^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(x,y),$$

onde $Q = \left[0,+\infty\right[\times \left[0,+\infty\right[$; use essa identidade, juntamente com uma mudança de variáveis apropriada, para calcular a integral $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(x)$.

APÊNDICE A

Soluções para os Exercícios Propostos

A.1. Exercícios do Capítulo 1

Exercício 1.9. Pelo Lema 1.4.4, temos $\mathfrak{m}^*(A) \le \mathfrak{m}^*(U) = \mathfrak{m}(U)$, para todo aberto $U \subset I\!R^n$ contendo A. Logo $\mathfrak{m}^*(A)$ é uma conta inferior do conjunto $\big\{\mathfrak{m}(U) : U \supset A \text{ aberto}\big\}$. Para ver que $\mathfrak{m}^*(A)$ é a maior cota inferior desse conjunto, devemos mostrar que para todo $\varepsilon > 0$ existe $U \supset A$ aberto com $\mathfrak{m}(U) \le \mathfrak{m}^*(A)+\varepsilon$. Mas esse é precisamente o resultado do Lema 1.4.12.

Exercício 1.10. Como A é mensurável então, para todo $\varepsilon > 0$ existe um aberto $U \supset A$ com $\mathfrak{m}^*(U \setminus A) < \varepsilon$. Daí $U + x$ é um aberto em $I\!R^n$ contendo $A + x$ e $(U + x) \setminus (A + x) = (U \setminus A) + x$. Logo, pelo Lema 1.4.10, temos $\mathfrak{m}^*\big((U + x) \setminus (A + x)\big) = \mathfrak{m}^*(U \setminus A) < \varepsilon$.

Exercício 1.11.

(a) O resultado é claro se B é vazio. Senão, $B = \prod_{i=1}^n [a_i, b_i]$ e

$$\widehat{\sigma}(B) = \prod_{i=1}^n [a_{\sigma(i)}, b_{\sigma(i)}]$$

também é um bloco retangular n-dimensional e:

$$|\widehat{\sigma}(B)| = \prod_{i=1}^n (b_{\sigma(i)} - a_{\sigma(i)}) = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i) = |B|.$$

(b) Se $A \subset \bigcup_{k=1}^\infty B_k$ é uma cobertura de A por blocos ratangulares n-dimensionais então $\widehat{\sigma}(A) \subset \bigcup_{k=1}^\infty \widehat{\sigma}(B_k)$ é uma cobertura de $\widehat{\sigma}(A)$ por blocos retangulares n-dimensionais e

$$\sum_{k=1}^\infty |\widehat{\sigma}(B_k)| = \sum_{k=1}^\infty |B_k|.$$

Isso mostra que $\mathcal{C}(A) \subset \mathcal{C}\big(\widehat{\sigma}(A)\big)$ (recorde (1.4.1)). Por outro lado, se $\tau = \sigma^{-1}$ então $A = \widehat{\tau}\big(\widehat{\sigma}(A)\big)$ e daí o mesmo argumento mostra que $\mathcal{C}\big(\widehat{\sigma}(A)\big) \subset \mathcal{C}(A)$; logo:

$$\mathfrak{m}^*(A) = \inf \mathcal{C}(A) = \inf \mathcal{C}\big(\widehat{\sigma}(A)\big) = \mathfrak{m}^*\big(\widehat{\sigma}(A)\big).$$

(c) Se A é mensurável então para todo $\varepsilon > 0$ existe um aberto $U \subset I\!R^n$ contendo A tal que $\mathfrak{m}^*(U \setminus A) < \varepsilon$. Daí $\widehat{\sigma}(U)$ é um aberto contendo $\widehat{\sigma}(A)$ e:

$$\mathfrak{m}^*\big(\widehat{\sigma}(U) \setminus \widehat{\sigma}(A)\big) = \mathfrak{m}^*\big(\widehat{\sigma}(U \setminus A)\big) = \mathfrak{m}^*(U \setminus A) < \varepsilon,$$

provando que $\widehat{\sigma}(A)$ é mensurável.

Exercício 1.12.

(a) O resultado é claro se B é vazio. Senão, $B = \prod_{i=1}^n [a_i, b_i]$ e

$$D_\lambda(B) = \prod_{i=1}^n [a_i', b_i'],$$

onde $a_i' = \lambda_i a_i$, $b_i' = \lambda_i b_i$ se $\lambda_i > 0$ e $a_i' = \lambda_i b_i$, $b_i' = \lambda_i a_i$ se $\lambda_i < 0$; em todo caso:

$$|D_\lambda(B)| = \prod_{i=1}^n (b_i' - a_i') = \prod_{i=1}^n |\lambda_i|(b_i - a_i) = |\det D_\lambda|\, |B|.$$

(b) Se $A \subset \bigcup_{k=1}^\infty B_k$ é uma cobertura de A por blocos retangulares n-dimensionais então $D_\lambda(A) \subset \bigcup_{k=1}^\infty D_\lambda(B_k)$ é uma cobertura de $D_\lambda(A)$ por blocos retangulares n-dimensionais e

$$\sum_{k=1}^\infty |D_\lambda(B_k)| = |\det D_\lambda| \sum_{k=1}^\infty |B_k|.$$

Isso mostra que (recorde (1.4.1)):

$$|\det D_\lambda|\, \mathcal{C}(A) = \big\{ |\det D_\lambda|\, a : a \in \mathcal{C}(A) \big\} \subset \mathcal{C}\big(D_\lambda(A)\big). \tag{A.1.1}$$

Por outro lado, se $\mu = \big(\frac{1}{\lambda_1}, \ldots, \frac{1}{\lambda_n}\big)$ então $A = D_\mu\big(D_\lambda(A)\big)$ e daí o mesmo argumento mostra que:

$$|\det D_\mu|\, \mathcal{C}\big(D_\lambda(A)\big) \subset \mathcal{C}(A). \tag{A.1.2}$$

Como $|\det D_\mu| = |\det D_\lambda|^{-1}$, de (A.1.1) e (A.1.2) vem:

$$\mathcal{C}\big(D_\lambda(A)\big) = |\det D_\lambda|\, \mathcal{C}(A).$$

Concluímos então que:

$$\mathfrak{m}^*\big(D_\lambda(A)\big) = \inf \mathcal{C}\big(D_\lambda(A)\big) = |\det D_\lambda| \inf \mathcal{C}(A) = |\det D_\lambda|\, \mathfrak{m}^*(A).$$

(c) Se A é mensurável então para todo $\varepsilon > 0$ existe um aberto $U \subset I\!R^n$ contendo A tal que $\mathfrak{m}^*(U \setminus A) < \varepsilon\, |\det D_\lambda|^{-1}$. Daí $D_\lambda(U)$ é um aberto que contém $D_\lambda(A)$ e:

$$\mathfrak{m}^*\big(D_\lambda(U) \setminus D_\lambda(A)\big) = \mathfrak{m}^*\big(D_\lambda(U \setminus A)\big) = |\det D_\lambda|\, \mathfrak{m}^*(U \setminus A) < \varepsilon,$$

provando que $D_\lambda(A)$ é mensurável.

Exercício 1.13. Temos $B \subset A \cup (B \setminus A) \subset A \cup (A \triangle B)$ e portanto $\mathfrak{m}^*(B) \le \mathfrak{m}^*(A) + \mathfrak{m}^*(A \triangle B) = \mathfrak{m}^*(A)$. De modo análogo mostra-se que $\mathfrak{m}^*(A) \le \mathfrak{m}^*(B)$ e portanto $\mathfrak{m}^*(A) = \mathfrak{m}^*(B)$. Suponha agora que A é mensurável. Então:

$$B = \big(A \setminus (A \setminus B)\big) \cup (B \setminus A). \tag{A.1.3}$$

Como $A \setminus B \subset A \triangle B$ e $B \setminus A \subset A \triangle B$ então $\mathfrak{m}^*(A \setminus B) = 0$ e $\mathfrak{m}^*(B \setminus A) = 0$. Segue do Lema 1.4.16 que $A \setminus B$ e $B \setminus A$ são ambos mensuráveis; logo (A.1.3) implica que B é mensurável. Da mesma forma mostra-se que a mensurabilidade de B implica na mensurabilidade de A.

Exercício 1.14. Seja $U \supset A$ um aberto tal que $\mathfrak{m}(U \setminus A) < \frac{\varepsilon}{2}$. Pelo Lema 1.4.23 podemos escrever $U = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$, onde $(B_k)_{k \ge 1}$ é uma seqüência de blocos retangulares n-dimensionais com interiores dois a dois disjuntos; pelo Corolário 1.4.21 temos:

$$\mathfrak{m}(U) = \sum_{k=1}^{\infty} |B_k|.$$

Note que $\mathfrak{m}(U) = \mathfrak{m}(U \setminus A) + \mathfrak{m}(A) < +\infty$ e portanto a série $\sum_{k=1}^{\infty} |B_k|$ é convergente; existe portanto $t \ge 1$ tal que $\sum_{k>t} |B_k| < \frac{\varepsilon}{2}$. Observe agora que:

$$\Big(\bigcup_{k=1}^{t} B_k\Big) \triangle A \subset (U \setminus A) \cup \Big(\bigcup_{k>t} B_k\Big)$$

e portanto:

$$\mathfrak{m}\Big(\big(\textstyle\bigcup_{k=1}^{t} B_k\big) \triangle A\Big) \le \mathfrak{m}(U \setminus A) + \displaystyle\sum_{k>t} |B_k| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Exercício 1.15. Temos $A \subset B \cup (A \setminus B) \subset B \cup (A \triangle B)$ e portanto:

$$\mathfrak{m}^*(A) \le \mathfrak{m}^*(B) + \mathfrak{m}^*(A \triangle B).$$

Se $\mathfrak{m}^*(B) < +\infty$ segue que:

$$\mathfrak{m}^*(A) - \mathfrak{m}^*(B) \le \mathfrak{m}^*(A \triangle B); \tag{A.1.4}$$

note que (A.1.4) também é válida se $\mathfrak{m}^*(B) = +\infty$ já que, nesse caso, $\mathfrak{m}^*(A) < +\infty$ e $\mathfrak{m}^*(A) - \mathfrak{m}^*(B) = -\infty$. Trocando os papéis de A e B em (A.1.4) obtemos:

$$\mathfrak{m}^*(B) - \mathfrak{m}^*(A) \le \mathfrak{m}^*(A \triangle B). \tag{A.1.5}$$

A conclusão segue de (A.1.4) e (A.1.5).

Exercício 1.16. Temos:

$$\mathfrak{m}^*(A) \le \mathfrak{m}^*(E') \le \mathfrak{m}^*(E) = \mathfrak{m}(E)$$

com $\mathfrak{m}^*(A) = \mathfrak{m}(E)$ e portanto $\mathfrak{m}(E') = \mathfrak{m}^*(E') = \mathfrak{m}^*(A)$. Como E' é mensurável e contém A, segue que E' é um envelope mensurável de A.

Exercício 1.17. Temos que $A \cup B$ é união disjunta dos conjuntos $A \setminus B$, $A \cap B$ e $B \setminus A$; logo:

$$\mu(A \cup B) = \mu(A \setminus B) + \mu(A \cap B) + \mu(B \setminus A).$$

Como $\mu(A \cap B) < +\infty$, segue do Lema 1.4.46 que:

$$\mu(A \setminus B) = \mu\big(A \setminus (A \cap B)\big) = \mu(A) - \mu(A \cap B),$$

e similarmente $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A \cap B)$. Logo:

$$\begin{aligned}\mu(A \cup B) = \mu(A) - \mu(A \cap B) + \mu(A \cap B) + \mu(B) - \mu(A \cap B)\\ = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B).\end{aligned}$$

Exercício 1.18. Sejam $A_0 = \emptyset$ e $B_k = A_k \setminus \bigcup_{i=0}^{k-1} A_i$, para todo $k \geq 1$. Note que $B_k \subset A_k$ e $B_k \in \mathcal{A}$ para todo $k \geq 1$. Afirmamos que os conjuntos B_k são dois a dois disjuntos. Sejam $k, l \geq 1$ com $k \neq l$, digamos, $k > l$. Daí $B_k \cap A_l = \emptyset$ e $B_l \subset A_l$, de modo que $B_k \cap B_l = \emptyset$. Afirmamos também que $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$. Obviamente, $\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$. Por outro lado, se $x \in \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$, seja $k \geq 1$ o menor inteiro tal que $x \in A_k$; daí $x \in A_k$ e $x \notin \bigcup_{i=0}^{k-1} A_i$, i.e., $x \in B_k$. Finalmente, temos:

$$\mu\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big) = \mu\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\Big) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(B_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k). \tag{A.1.6}$$

Exercício 1.19. Definimos os conjuntos B_k, $k \geq 1$, como na resolução do Exercício 1.18. Por (A.1.6), é suficiente mostrarmos que $\mu(B_k) = \mu(A_k)$ para todo $k \geq 1$. Obviamente $\mu(B_k) \leq \mu(A_k)$. Por outro lado, temos:

$$A_k \subset B_k \cup \bigcup_{i=0}^{k-1} (A_i \cap A_k);$$

aplicando o resultado do Exercício 1.18 obtemos:

$$\mu(A_k) \leq \mu(B_k) + \sum_{i=0}^{k-1} \mu(A_i \cap A_k) = \mu(B_k),$$

o que completa a demonstração.

Exercício 1.20.

(a) Temos $X \in \mathcal{A}_i$ para todo $i \in I$, de modo que $X \in \mathcal{A}$ e $\mathcal{A} \neq \emptyset$. Dado $A \in \mathcal{A}$ temos $A \in \mathcal{A}_i$ para todo $i \in I$ e portanto $A^{\mathrm{c}} \in \mathcal{A}_i$, para todo $i \in I$; segue que $A^{\mathrm{c}} \in \mathcal{A}$. Seja $(A_k)_{k \geq 1}$ uma seqüência de elementos de $\mathcal{A}$. Daí $A_k \in \mathcal{A}_i$ para todo $k \geq 1$ e todo $i \in I$, de modo que $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{A}_i$ para todo $i \in I$ e portanto $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{A}$.

(b) Se $\sigma_1[\mathcal{C}]$ e $\sigma_2[\mathcal{C}]$ são ambas σ-álgebras de partes de X satisfazendo as propriedades (1) e (2) que aparecem na Definição 1.4.35, mostremos que $\sigma_1[\mathcal{C}] = \sigma_2[\mathcal{C}]$. De fato, como $\sigma_1[\mathcal{C}]$ é uma σ-álgebra de partes de X que contém $\mathcal{C}$ e como $\sigma_2[\mathcal{C}]$ satisfaz a propriedade (2), temos que $\sigma_2[\mathcal{C}] \subset \sigma_1[\mathcal{C}]$. De modo similar mostra-se que $\sigma_1[\mathcal{C}] \subset \sigma_2[\mathcal{C}]$.

(c) Seja $\sigma[\mathcal{C}]$ a interseção de todas as σ-álgebras de partes de X que contém $\mathcal{C}$; pelo resultado do item (a), $\sigma[\mathcal{C}]$ é uma σ-álgebra de partes de X e obviamente $\mathcal{C} \subset \sigma[\mathcal{C}]$, já que $\sigma[\mathcal{C}]$ é a interseção de uma coleção de conjuntos que contém $\mathcal{C}$. Além do mais, se $\mathcal{A}$ é uma σ-álgebra de partes de X que contém $\mathcal{C}$ então $\mathcal{A}$ é um dos membros da coleção cuja interseção resultou em $\sigma[\mathcal{C}]$; logo $\sigma[\mathcal{C}] \subset \mathcal{A}$.

Exercício 1.21. Como $\sigma[\mathcal{C}_2]$ é uma σ-álgebra de partes de X que contém $\mathcal{C}_1$ e como $\sigma[\mathcal{C}_1]$ satisfaz a propriedade (2) que aparece na Definição 1.4.35 temos que $\sigma[\mathcal{C}_1] \subset \sigma[\mathcal{C}_2]$. Similarmente, $\mathcal{C}_2 \subset \sigma[\mathcal{C}_1]$ implica que $\sigma[\mathcal{C}_2] \subset \sigma[\mathcal{C}_1]$.

Exercício 1.22. A σ-álgebra de Borel de $\mathbb{R}^n$ é uma σ-álgebra de partes de $\mathbb{R}^n$ que contém os abertos de $\mathbb{R}^n$. Logo todo aberto de $\mathbb{R}^n$ e toda interseção enumerável de abertos de $\mathbb{R}^n$ pertence à σ-álgebra de Borel de $\mathbb{R}^n$ (veja Lema 1.4.37). Como todo fechado é complementar de um aberto, segue que os fechados de $\mathbb{R}^n$ e as uniões enumeráveis de fechados de $\mathbb{R}^n$ pertencem à σ-álgebra de Borel de $\mathbb{R}^n$.

Exercício 1.23. Seja $\mathcal{A}$ a σ-álgebra gerada pelos intervalos da forma $]-\infty, c]$, $c \in \mathbb{R}$. Como a σ-álgebra de Borel $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ é a σ-álgebra gerada pelos abertos de $\mathbb{R}$, o resultado do Exercício 1.21 nos diz que, para mostrar que $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$, é suficiente mostrar as seguintes afirmações:

(i) todo intervalo da forma $]-\infty, c]$ é um Boreleano de $\mathbb{R}$;
(ii) todo aberto de $\mathbb{R}$ pertence a $\mathcal{A}$.

A afirmação (i) é trivial, já que $]-\infty, c]$ é um subconjunto fechado de $\mathbb{R}$. Para mostrar a afirmação (ii), observe que o Lema 1.4.23 implica que todo aberto de $\mathbb{R}$ é uma união enumerável de intervalos compactos; é suficiente mostrar então que $[a, b] \in \mathcal{A}$, para todos $a, b \in \mathbb{R}$ com $a \le b$. Essa afirmação segue das identidades abaixo:

$$[a, b] = \bigcap_{k=1}^{\infty} \left]a - \tfrac{1}{k}, b\right], \quad \left]a - \tfrac{1}{k}, b\right] = \left]-\infty, b\right] \setminus \left]-\infty, a - \tfrac{1}{k}\right].$$

Exercício 1.24. Suponha por absurdo que F é um fechado de $\mathbb{R}$ contido propriamente em I com $\mathfrak{m}(F) = |I|$. Seja $x \in I \setminus F$. Como F é fechado, existe $\varepsilon > 0$ com $[x - \varepsilon, x + \varepsilon] \cap F = \emptyset$. Se x é um ponto interior de I então podemos escolher $\varepsilon > 0$ de modo que $[x - \varepsilon, x + \varepsilon] \subset I$; senão, se x é uma extremidade de I, podemos ao menos garantir que um dos intervalos $[x - \varepsilon, x]$, $[x, x + \varepsilon]$ está contido em I, para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno. Em todo caso, conseguimos um intervalo J contido em I, disjunto de F, com $|J| > 0$. Daí F e J são subconjuntos mensuráveis disjuntos de I e portanto:

$$|I| = \mathfrak{m}(I) \ge \mathfrak{m}(F \cup J) = \mathfrak{m}(F) + \mathfrak{m}(J) = |I| + |J| > |I|,$$

o que nos dá uma contradição e prova que $F = I$. Em particular, vemos que F não pode ter interior vazio.

Exercício 1.25. Se $K \subset A$ é compacto então $\mathfrak{m}(K) = \mathfrak{m}^*(K) \le \mathfrak{m}^*(A)$, pelo Lema 1.4.4. Logo $\mathfrak{m}^*(A)$ é uma cota superior do conjunto:

$$\big\{\mathfrak{m}(K) : K \subset A \text{ compacto}\big\}$$

e portanto é maior ou igual ao seu supremo, que é $\mathfrak{m}_*(A)$.

Exercício 1.26. Observe que:

$$\big\{\mathfrak{m}(K) : K \subset A_1 \text{ compacto}\big\} \subset \big\{\mathfrak{m}(K) : K \subset A_2 \text{ compacto}\big\}$$

e portanto:

$$\begin{aligned}\mathfrak{m}_*(A_1) = \sup \big\{\mathfrak{m}(K) : K \subset A_1 \text{ compacto}\big\}& \\ \le \sup \big\{\mathfrak{m}(K) : K \subset A_2 \text{ compacto}\big\} &= \mathfrak{m}_*(A_2).\end{aligned}$$

Exercício 1.27. Se $\mathcal{M}' \subset \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ contém todos os subconjuntos compactos de $\mathbb{R}^n$ então:

$$\big\{\mathfrak{m}(K) : K \subset A \text{ compacto}\big\} \subset \big\{\mathfrak{m}(E) : E \subset A,\ E \in \mathcal{M}'\big\}$$

e portanto:

$$\mathfrak{m}_*(A) = \sup \big\{\mathfrak{m}(K) : K \subset A \text{ compacto}\big\} \le \sup \big\{\mathfrak{m}(E) : E \subset A,\ E \in \mathcal{M}'\big\}.$$

Por outro lado, se $E \in \mathcal{M}'$ e $E \subset A$ então segue do Lema 1.4.57 e do resultado do Exercício 1.26 que:

$$\mathfrak{m}(E) = \mathfrak{m}_*(E) \le \mathfrak{m}_*(A);$$

isso mostra que $\mathfrak{m}_*(A)$ é uma cota superior do conjunto:

$$\big\{\mathfrak{m}(E) : E \subset A,\ E \in \mathcal{M}'\big\}$$

e portanto $\mathfrak{m}_*(A) \ge \sup \big\{\mathfrak{m}(E) : E \subset A,\ E \in \mathcal{M}'\big\}$.

Exercício 1.28. Se $\mathfrak{m}_*(A) < +\infty$ então para todo $r \ge 1$ existe um compacto $K_r \subset A$ com $\mathfrak{m}(K_r) > \mathfrak{m}_*(A) - \frac{1}{r}$; daí $W = \bigcup_{r=1}^{\infty} K_r$ é um F_σ contido em A e:

$$\mathfrak{m}_*(A) - \frac{1}{r} < \mathfrak{m}(K_r) \le \mathfrak{m}(W) = \mathfrak{m}_*(W) \le \mathfrak{m}_*(A),$$

para todo $r \ge 1$, onde usamos o Lema 1.4.57 e o resultado do Exercício 1.26. Segue que $\mathfrak{m}(W) = \mathfrak{m}_*(A)$. Se $\mathfrak{m}_*(A) = +\infty$ então para todo $r \ge 1$ existe um compacto $K_r \subset A$ com $\mathfrak{m}(K_r) > r$ e daí $W = \bigcup_{r=1}^{\infty} K_r$ é um F_σ contido em A tal que:

$$\mathfrak{m}(W) \ge \mathfrak{m}(K_r) > r,$$

para todo $r \ge 1$; logo $\mathfrak{m}(W) = +\infty = \mathfrak{m}_*(A)$.

Exercício 1.29. O resultado do Exercício 1.26 implica que $\big(\mathfrak{m}_*(A_k)\big)_{k\ge 1}$ é uma seqüência decrescente e que $\mathfrak{m}_*(A_k) \ge \mathfrak{m}_*(A)$, para todo $k \ge 1$; logo $\big(\mathfrak{m}_*(A_k)\big)_{k\ge 1}$ é convergente e:

$$\lim_{k\to\infty} \mathfrak{m}_*(A_k) \ge \mathfrak{m}_*(A).$$

Para cada $k \geq 1$, o resultado do Exercício 1.28 nos dá um subconjunto W_k de A_k de tipo F_σ tal que $\mathfrak{m}(W_k) = \mathfrak{m}_*(A_k)$. Defina $V_k = \bigcup_{r=k}^{\infty} W_r$. Daí V_k é mensurável e $W_k \subset V_k \subset A_k$, donde:

$$\mathfrak{m}_*(A_k) = \mathfrak{m}(W_k) \leq \mathfrak{m}(V_k) = \mathfrak{m}_*(V_k) \leq \mathfrak{m}_*(A_k),$$

onde usamos também o Lema 1.4.57. Mostramos então que $\mathfrak{m}(V_k) = \mathfrak{m}_*(A_k)$, para todo $k \geq 1$. Obviamente $V_k \supset V_{k+1}$ para todo $k \geq 1$ e:

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} V_k \subset \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = A.$$

Como $\mathfrak{m}(V_k) = \mathfrak{m}_*(A_k) < +\infty$ para algum $k \geq 1$, o Lema 1.4.48 nos dá:

$$\lim_{k\to\infty} \mathfrak{m}(V_k) = \mathfrak{m}\Big(\bigcap_{k=1}^{\infty} V_k\Big) = \mathfrak{m}_*\Big(\bigcap_{k=1}^{\infty} V_k\Big) \leq \mathfrak{m}_*(A),$$

e portanto:

$$\lim_{k\to\infty} \mathfrak{m}_*(A_k) \leq \mathfrak{m}_*(A).$$

Exercício 1.30.

(a) Consideramos primeiro o caso em que A e B têm medida exterior finita. Seja dado $\varepsilon > 0$ e sejam $(Q_k)_{k\geq 1}$ e $(Q'_l)_{l\geq 1}$ respectivamente uma seqüência de blocos retangulares m-dimensionais e uma seqüência de blocos retangulares n-dimensionais tais que:

$$A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k, \quad B \subset \bigcup_{l=1}^{\infty} Q'_l$$

e tais que:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |Q_k| < \mathfrak{m}^*(A) + \varepsilon, \quad \sum_{l=1}^{\infty} |Q'_l| < \mathfrak{m}^*(B) + \varepsilon.$$

Daí $(Q_k \times Q'_l)_{k,l\geq 1}$ é uma família enumerável de blocos retangulares $(m+n)$-dimensionais tal que $A \times B \subset \bigcup_{k,l\geq 1}(Q_k \times Q'_l)$. Logo:

$$\begin{aligned}\mathfrak{m}^*(A\times B) \leq \sum_{k,l\geq 1} |Q_k \times Q'_l| = \sum_{k,l\geq 1} |Q_k|\,|Q'_l| = \Big(\sum_{k=1}^{\infty}|Q_k|\Big)\Big(\sum_{l=1}^{\infty}|Q'_l|\Big)\\ < \big(\mathfrak{m}^*(A)+\varepsilon\big)\big(\mathfrak{m}^*(B)+\varepsilon\big).\end{aligned}$$

A conclusão é obtida fazendo $\varepsilon \to 0$. Consideramos agora o caso que $\mathfrak{m}^*(A) = +\infty$ ou $\mathfrak{m}^*(B) = +\infty$. Se $\mathfrak{m}^*(A) > 0$ e $\mathfrak{m}^*(B) > 0$ então $\mathfrak{m}^*(A)\mathfrak{m}^*(B) = +\infty$ e não há nada para mostrar. Suponha então que $\mathfrak{m}^*(A) = 0$ ou $\mathfrak{m}^*(B) = 0$, de modo que $\mathfrak{m}^*(A)\mathfrak{m}^*(B) = 0$; devemos mostrar então que $\mathfrak{m}^*(A\times B) = 0$ também. Consideraremos apenas o caso que $\mathfrak{m}^*(A) = +\infty$ e $\mathfrak{m}^*(B) = 0$ (o caso $\mathfrak{m}^*(A) = 0$ e

$\mathfrak{m}^*(B) = +\infty$ é análogo). Para cada $k \geq 1$, seja $A_k = A \cap [-k,k]^m$. Temos $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ e $\mathfrak{m}^*(A_k) < +\infty$, para todo $k \geq 1$. Logo:

$$0 \leq \mathfrak{m}^*(A_k \times B) \leq \mathfrak{m}^*(A_k)\mathfrak{m}^*(B) = 0,$$

ou seja, $\mathfrak{m}^*(A_k \times B) = 0$, para todo $k \geq 1$. Como:

$$A \times B = \bigcup_{k=1}^{\infty} (A_k \times B),$$

segue que $\mathfrak{m}^*(A \times B) = 0$.

(b) Consideramos primeiro o caso que $\mathfrak{m}(A) < +\infty$ e $\mathfrak{m}(B) < +\infty$. Dado $\varepsilon > 0$, existem abertos $U \subset I\!R^m$ e $V \subset I\!R^n$ contendo A e B respectivamente, de modo que $\mathfrak{m}(U) < \mathfrak{m}(A) + 1$, $\mathfrak{m}(V) < \mathfrak{m}(B) + 1$ e:

$$\mathfrak{m}(U \setminus A) < \frac{\varepsilon}{2\big(\mathfrak{m}(B)+1\big)}, \quad \mathfrak{m}(V \setminus B) < \frac{\varepsilon}{2\big(\mathfrak{m}(A)+1\big)}.$$

Daí $U \times V$ é um aberto de $I\!R^{m+n}$ contendo $A \times B$; além do mais:

$$(U \times V) \setminus (A \times B) \subset \big[(U \setminus A) \times V\big] \cup \big[U \times (V \setminus B)\big].$$

Usando o resultado do item (a) obtemos portanto:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{m}^*\big((U \times V) \setminus (A \times B)\big) &\leq \mathfrak{m}^*\big((U \setminus A) \times V\big) + \mathfrak{m}^*\big(U \times (V \setminus B)\big) \\
&\leq \mathfrak{m}(U \setminus A)\mathfrak{m}(V) + \mathfrak{m}(U)\mathfrak{m}(V \setminus B) \\
&\leq \mathfrak{m}(U \setminus A)\big(\mathfrak{m}(B)+1\big) + \mathfrak{m}(V \setminus B)\big(\mathfrak{m}(A)+1\big) < \varepsilon,
\end{aligned}$$

o que mostra que $A \times B$ é mensurável. Para o caso geral, definimos $A_k = A \cap [-k,k]^m$, $B_k = B \cap [-k,k]^n$. Daí $A_k \times B_k$ é mensurável para todo $k \geq 1$ e $A \times B = \bigcup_{k=1}^{\infty} (A_k \times B_k)$; portanto também $A \times B$ é mensurável.

(c) Mostremos primeiro que se $U \subset I\!R^m$, $V \subset I\!R^n$ são abertos então:

$$\mathfrak{m}(U \times V) = \mathfrak{m}(U)\mathfrak{m}(V). \tag{A.1.7}$$

Pelo Lema 1.4.23 podemos escrever $U = \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k$, onde $(Q_k)_{k \geq 1}$ é uma seqüência de blocos retangulares m-dimensionais com interiores dois a dois disjuntos; podemos também escrever $V = \bigcup_{l=1}^{\infty} Q'_l$, onde $(Q'_l)_{l \geq 1}$ é uma seqüência de blocos retangulares n-dimensionais com interiores dois a dois disjuntos. Note que $(Q_k \times Q'_l)_{k,l \geq 1}$ é uma família enumerável de blocos retangulares $(m+n)$-dimensionais com interiores dois a dois disjuntos e $U \times V = \bigcup_{k,l \geq 1} (Q_k \times Q'_l)$. Daí, pelo Corolário 1.4.21, obtemos:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{m}(U \times V) = \sum_{k,l \geq 1} |Q_k \times Q'_l| = \sum_{k,l \geq 1} |Q_k|\,|Q'_l| = \Big(\sum_{k=1}^{\infty} |Q_k|\Big)\Big(\sum_{l=1}^{\infty} |Q'_l|\Big) \\
= \mathfrak{m}(U)\mathfrak{m}(V).
\end{aligned}$$

Isso prova (A.1.7). Dados agora $A \subset I\!R^m$, $B \subset I\!R^n$ mensuráveis com $\mathfrak{m}(A) < +\infty$ e $\mathfrak{m}(B) < +\infty$ podemos, como no item (b), obter abertos $U \subset I\!R^m$, $V \subset I\!R^n$ contendo A e B respectivamente de modo que:

$$\mathfrak{m}^*\big((U \times V) \setminus (A \times B)\big) < \varepsilon.$$

Como os conjuntos $U \times V$ e $A \times B$ são mensuráveis e, pelo item (a), $\mathfrak{m}(A \times B) \le \mathfrak{m}(A)\mathfrak{m}(B) < +\infty$, obtemos:

$$\mathfrak{m}\big((U \times V) \setminus (A \times B)\big) = \mathfrak{m}(U \times V) - \mathfrak{m}(A \times B),$$

e portanto $\mathfrak{m}(U \times V) - \mathfrak{m}(A \times B) < \varepsilon$. Usando agora (A.1.7) concluímos que:

$$\mathfrak{m}(A \times B) > \mathfrak{m}(U \times V) - \varepsilon = \mathfrak{m}(U)\mathfrak{m}(V) - \varepsilon \ge \mathfrak{m}(A)\mathfrak{m}(B) - \varepsilon;$$

fazendo $\varepsilon \to 0$, obtemos $\mathfrak{m}(A \times B) \ge \mathfrak{m}(A)\mathfrak{m}(B)$. Provamos então a igualdade $\mathfrak{m}(A \times B) = \mathfrak{m}(A)\mathfrak{m}(B)$, já que a desigualdade oposta já foi provada no item (a). Sejam agora $A \subset I\!R^m$, $B \subset I\!R^n$ conjuntos mensuráveis arbitrários e defina:

$$A_k = A \cap [-k, k]^m, \quad B_k = B \cap [-k, k]^n,$$

para todo $k \ge 1$. Daí $A_k \nearrow A$, $B_k \nearrow B$, $A_k \times B_k \nearrow A \times B$ e portanto:

$$\mathfrak{m}(A \times B) = \lim_{k\to\infty} \mathfrak{m}(A_k \times B_k) = \lim_{k\to\infty} \mathfrak{m}(A_k)\mathfrak{m}(B_k) = \mathfrak{m}(A)\mathfrak{m}(B),$$

onde na última igualdade usamos o resultado do Exercício 1.5.

A.2. Exercícios do Capítulo 2

Exercício 2.1. Se $f : X \to X'$ é constante então para todo subconjunto A de X' temos $f^{-1}(A) = \emptyset$ ou $f^{-1}(A) = X$; em todo caso, $f^{-1}(A) \in \mathcal{A}$.

Exercício 2.2. Temos que $\mathcal{A}|_Y$ é uma σ-álgebra de partes de Y que contém $\mathcal{C}|_Y$; logo $\mathcal{A}|_Y$ contém $\sigma[\mathcal{C}|_Y]$. Para mostrar que $\mathcal{A}|_Y$ está contido em $\sigma[\mathcal{C}|_Y]$, considere a coleção:

$$\mathcal{A}' = \big\{A \subset X : A \cap Y \in \sigma[\mathcal{C}|_Y]\big\}.$$

Verifica-se diretamente que $\mathcal{A}'$ é uma σ-álgebra de partes de X; obviamente, $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}'$. Logo $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}'$, o que prova que $A \cap Y \in \sigma[\mathcal{C}|_Y]$, para todo $A \in \mathcal{A}$, i.e., $\mathcal{A}|_Y \subset \sigma[\mathcal{C}|_Y]$.

Exercício 2.3. De acordo com a definição da σ-álgebra de Borel de $\overline{I\!R}$, se $A \in \mathcal{B}(\overline{I\!R})$ então $A \cap I\!R \in \mathcal{B}(I\!R)$; logo $\mathcal{B}(\overline{I\!R})|_{I\!R} \subset \mathcal{B}(I\!R)$. Por outro lado, se $A \in \mathcal{B}(I\!R)$ então também $A \in \mathcal{B}(\overline{I\!R})$ (já que $A \cap I\!R = A$ é um Boreleano de $I\!R$) e portanto $A \cap I\!R = A \in \mathcal{B}(\overline{I\!R})|_{I\!R}$.

Exercício 2.4. Seja $\mathcal{C}$ a coleção formada pelos intervalos da forma $[-\infty, c]$, $c \in I\!\!R$. Claramente $\mathcal{C} \subset \mathcal{B}(\overline{I\!\!R})$ e portanto $\sigma[\mathcal{C}] \subset \mathcal{B}(\overline{I\!\!R})$. Vamos mostrar então que $\mathcal{B}(\overline{I\!\!R}) \subset \sigma[\mathcal{C}]$. Em primeiro lugar, afirmamos que:

$$\emptyset, \{+\infty\}, \{-\infty\}, \{+\infty, -\infty\} \in \sigma[\mathcal{C}], \tag{A.2.1}$$

$$I\!\!R \in \sigma[\mathcal{C}]. \tag{A.2.2}$$

De fato, (A.2.1) segue das igualdades:

$$\{-\infty\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} [-\infty, -k], \quad \{+\infty\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} [-\infty, k]^{\mathrm{c}},$$

e (A.2.2) segue de (A.2.1), já que $I\!\!R = \{+\infty, -\infty\}^{\mathrm{c}}$. Note que:

$$\mathcal{C}|_{I\!\!R} = \big\{ \,]-\infty, c] : c \in I\!\!R \big\}$$

e portanto o resultado do Exercício 1.23 nos dá $\sigma[\mathcal{C}|_{I\!\!R}] = \mathcal{B}(I\!\!R)$; daí, o resultado do Exercício 2.2 implica que:

$$\sigma[\mathcal{C}]|_{I\!\!R} = \mathcal{B}(I\!\!R). \tag{A.2.3}$$

Seja $A \in \mathcal{B}(\overline{I\!\!R})$, de modo que $A \cap I\!\!R \in \mathcal{B}(I\!\!R)$. Por (A.2.3), temos que existe $A' \in \sigma[\mathcal{C}]$ tal que $A \cap I\!\!R = A' \cap I\!\!R$. Daí (A.2.2) implica que $A \cap I\!\!R \in \sigma[\mathcal{C}]$. Finalmente, (A.2.1) implica que $A \cap \{+\infty, -\infty\} \in \sigma[\mathcal{C}]$, o que prova que $A = (A \cap I\!\!R) \cup \big(A \cap \{+\infty, -\infty\}\big) \in \sigma[\mathcal{C}]$.

Exercício 2.5. Pelo Corolário 2.1.18, a função

$$h : \big(f^{-1}(I\!\!R) \cap g^{-1}(I\!\!R)\big) \longrightarrow I\!\!R$$

definida por $h(x) = f(x) - g(x)$ é mensurável. Logo o conjunto:

$$h^{-1}(0) = \big\{x \in f^{-1}(I\!\!R) \cap g^{-1}(I\!\!R) : f(x) = g(x)\big\}$$

é mensurável. A conclusão segue da igualdade:

$$\begin{aligned}\big\{x \in X : f(x) = g(x)\big\} = \big(f^{-1}(+\infty) \cap g^{-1}(+\infty)\big) \cup \big(f^{-1}(-\infty) \cap g^{-1}(-\infty)\big)\\ \cup \big\{x \in f^{-1}(I\!\!R) \cap g^{-1}(I\!\!R) : f(x) = g(x)\big\}.\end{aligned}$$

Exercício 2.6. Vamos usar o Lema 2.1.13. Temos que os conjuntos:

$$\big\{(x, y) \in I\!\!R^2 : y \geq 1\big\}, \tag{A.2.4a}$$

$$\big\{(x, y) \in I\!\!R^2 : -1 < y < 1\big\}, \tag{A.2.4b}$$

$$\big\{(x, y) \in I\!\!R^2 : y \leq -1\big\}, \tag{A.2.4c}$$

constituem uma cobertura enumerável de $I\!\!R^2$ por Boreleanos. É suficiente então mostrar que a restrição de f a cada um desses Boreleanos é Borel mensurável. A restrição de f ao conjunto (A.2.4a) é contínua, e portanto Borel mensurável (veja Lema 2.1.15). A restrição de f ao conjunto (A.2.4b) é um limite pontual de funções contínuas e portanto é Borel mensurável, pelo Corolário 2.1.24 (na verdade, essa restrição de f também é contínua, já que a série em questão converge uniformemente, pelo teste M de Weierstrass). Finalmente, a restrição de f ao conjunto (A.2.4c) é Borel mensurável, sendo igual à composição da função contínua $(x, y) \mapsto x + y$ com a função Borel mensurável $\chi_{\mathbb{Q}}$.

Exercício 2.7.

(a) Como $X \setminus X_1$ tem medida nula, temos que todo subconjunto de $X \setminus X_1$ é mensurável (recorde Lema 1.4.16). Portanto, a restrição de f a $X \setminus X_1$ é automaticamente mensurável (seja lá qual for a função f). Como os conjuntos $X \setminus X_1$ e $X_1 = X \setminus (X \setminus X_1)$ são mensuráveis, segue do Lema 2.1.13 que f é mensurável.

(b) Como $f = g$ quase sempre, existe um subconjunto X_1 de X tal que $X \setminus X_1$ tem medida nula e tal que f e g coincidem em X_1. Como f é mensurável, segue que $g|_{X_1} = f|_{X_1}$ também é mensurável; logo, o resultado do item (a) implica que g é mensurável.

(c) Basta observar que $g = \liminf_{k\to\infty} f_k$ quase sempre e usar o resultado do item (b) juntamente com o Corolário 2.1.23.

Exercício 2.8. Devemos mostrar que se A é um subconjunto Lebesgue mensurável de $\mathbb{R}^m$ então $\pi^{-1}(A)$ é um subconjunto Lebesgue mensurável de $\mathbb{R}^{m+n}$. Mas $\pi^{-1}(A) = A \times \mathbb{R}^n$ e portanto a conclusão segue do resultado do item (b) do Exercício 1.30.

Exercício 2.9. Considere a função $\phi : X \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definida por $\phi(x, y) = y - f(x)$, para todos $x \in X$, $y \in \mathbb{R}^n$. Obviamente:

$$\mathrm{gr}(f) = \phi^{-1}(0).$$

Considere a projeção $\pi : \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}^m$ nas primeiras m coordenadas. Temos que π é contínua e portanto Borel mensurável; daí $X \times \mathbb{R}^n = \pi^{-1}(X)$ é Boreleano, caso X seja Boreleano. Além do mais, pelo resultado do Exercício 2.8, $X \times \mathbb{R}^n$ é Lebesgue mensurável, caso X seja Lebesgue mensurável. Para concluir a demonstração, vamos verificar que:

- ϕ é Borel mensurável se f for Borel mensurável;
- ϕ é mensurável se f for mensurável.

De fato, temos que ϕ é igual à diferença entre a função contínua $(x, y) \mapsto y$ e a função $(x, y) \mapsto f(x)$, que é simplesmente a composição da restrição de π a $X \times \mathbb{R}^n$ com f. A conclusão segue do resultado do Exercício 2.8.

Exercício 2.10.

(a) Se f é integrável então, por definição, f^+ e f^- são integráveis, donde $|f| = f^+ + f^-$ é integrável. Reciprocamente, se $|f|$ é integrável então f^+ e f^- são integráveis, já que $0 \le f^+ \le |f|$ e $0 \le f^- \le |f|$. Segue que f é integrável.

(b) Temos:

$$\Big|\int_X f\,\mathrm{d}\mu\Big| = \Big|\int_X f^+\,\mathrm{d}\mu - \int_X f^-\,\mathrm{d}\mu\Big| \le \Big|\int_X f^+\,\mathrm{d}\mu\Big| + \Big|\int_X f^-\,\mathrm{d}\mu\Big|$$
$$= \int_X f^+ + f^-\,\mathrm{d}\mu = \int_X |f|\,\mathrm{d}\mu.$$

Exercício 2.11. Seja $g_n = \sum_{k=1}^n f_k$. Daí $(g_n)_{n\ge1}$ é uma seqüência de funções mensuráveis não negativas com $g_n \nearrow f$. Segue do Teorema 2.3.3 que:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int_X f_k\,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\int_X f_k\,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty}\int_X g_n\,\mathrm{d}\mu = \int_X f\,\mathrm{d}\mu.$$

Exercício 2.12. Obviamente $\nu_f(\emptyset) = 0$, pelo Lema 2.4.10. Seja $(E_k)_{k\ge1}$ uma seqüência de subconjuntos mensuráveis dois a dois disjuntos de X. Temos:

$$f\chi_E = \sum_{k=1}^{\infty} f\chi_{E_k},$$

e portanto o Lema 2.3.4 e o resultado do Exercício 2.11 implicam:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\nu_f(E_k) = \sum_{k=1}^{\infty}\int_X f\chi_{E_k}\,\mathrm{d}\mu = \int_X f\chi_E\,\mathrm{d}\mu = \nu_f(E).$$

Exercício 2.13.

(a) Se a função f é não negativa, a afirmação segue do resultado do Exercício 2.12. No caso geral, temos:

$$\int_A f^+\,\mathrm{d}\mu = \sum_{k=1}^{\infty}\int_{A_k} f^+\,\mathrm{d}\mu, \quad \int_A f^-\,\mathrm{d}\mu = \sum_{k=1}^{\infty}\int_{A_k} f^-\,\mathrm{d}\mu,$$

e a conclusão segue subtraindo as duas igualdades acima.

(b) Se a função f é não negativa, a afirmação segue do resultado do Exercício 2.12 e do Lema 1.4.48. No caso geral, temos:

$$\int_A f^+\,\mathrm{d}\mu = \lim_{k\to\infty}\int_{A_k} f^+\,\mathrm{d}\mu, \quad \int_A f^-\,\mathrm{d}\mu = \lim_{k\to\infty}\int_{A_k} f^-\,\mathrm{d}\mu,$$

e a conclusão segue subtraindo as duas igualdades acima.

(c) Análogo ao item (b), observando que se $f|_{A_1}$ é integrável então $\int_{A_1} f^+\,\mathrm{d}\mu < +\infty$ e $\int_{A_1} f^-\,\mathrm{d}\mu < +\infty$.

Lista de Símbolos

Índice Remissivo

J

K

L

M

N

O

P

Q

R