Método prático para extrair uma base de um conjunto de geradores de um subespaço de $\mathbb{R}^n$

1. Descrição do método e alguns exemplos

Colocamos o seguinte problema: dado um conjunto finito:

$$\mathcal{A} = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$$

de elementos de $\mathbb{R}^n$, como obter uma base do subespaço $\mathcal{S}$ gerado por $\mathcal{A}$ que esteja *contida* em $\mathcal{A}$? O seguinte método resolve esse problema: montamos a matriz M que possui os vetores a_1, a_2, ..., a_m em suas colunas (de modo que M é uma matriz $n \times m$). Agora escalonamos M (com operações de *linha*!) até obter uma matriz escalonada M'. A base desejada é constituída pelos vetores a_i (que são colunas da matriz *original* M e *não* da matriz escalonada M') tais que a i-ésima coluna da matriz escalonada M' contém um pivô. Recorde que uma posição de uma matriz é dita um *pivô* se ela contém um elemento não nulo e se todas as posições a sua esquerda (isto é, na mesma linha, mas em colunas de número menor) contém zeros.

Os dois exemplos a seguir ilustram o método. Na seção seguinte vamos explicar porque o método funciona.

Exemplo 1. Seja $\mathcal{S}$ o subespaço de $\mathbb{R}^5$ gerado pelo conjunto:

$$\mathcal{A} = \{a_1, a_2, a_3, a_4\},$$

onde:

$$a_1 = (1, 0, -1, 2, 0), \quad a_2 = (2, 1, 3, 0, 0),$$
$$a_3 = (0, 1, -5, 4, 0), \quad a_4 = (1, 0, -11, 10, 0).$$

Queremos achar uma base de $\mathcal{S}$ contida em $\mathcal{A}$. Começamos considerando a matriz M cujas colunas são os vetores de $\mathcal{A}$:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & -5 & -11 \\ 2 & 0 & 4 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Agora escalonamos a matriz M usando operações de *linha*:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & -5 & -11 \\ 2 & 0 & 4 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -5 & -10 \\ 0 & -4 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -10 & -10 \\ 0 & 0 & 8 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 2 & 0 & 1 \\ 0 & \mathbf{1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = M'.$$

Na matriz escalonada M' acima nós marcamos em negrito os pivôs. Temos que as colunas de M' que contém pivô são as colunas de número 1, 2 e 3, donde uma base para o espaço $\mathcal{S}$ gerado por $\mathcal{A}$ é $\mathcal{B} = \{a_1, a_2, a_3\}$, isto é:

$$\mathcal{B} = \big\{(1, 0, -1, 2, 0), (2, 1, 3, 0, 0), (0, 1, -5, 4, 0)\big\}.$$

Exemplo 2. Seja $\mathcal{S}$ o subespaço de $\mathbb{R}^5$ gerado pelo conjunto:

$$\mathcal{A} = \{a_1, a_2, a_3, a_4\},$$

onde:

$$\begin{aligned} a_1 &= (1, 0, -1, 2, 0), \quad & a_2 &= (2, 1, 3, 8, 0), \\ a_3 &= (3, 1, 2, 10, 0), \quad & a_4 &= (0, 1, 6, 4, 0). \end{aligned}$$

Vamos determinar uma base para $\mathcal{S}$ contida em $\mathcal{A}$. Novamente, consideramos a matriz M cujas colunas são os vetores de $\mathcal{A}$:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & 6 \\ 2 & 8 & 10 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Escalonamos a matriz M usando operações de linha:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & 6 \\ 2 & 8 & 10 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 5 & 6 \\ 0 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 2 & 3 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = M'.$$

Temos que as colunas da matriz escalonada M' que contém pivô são as colunas de número 1, 2 e 4; portanto:

$$\mathcal{B} = \{a_1, a_2, a_4\} = \big\{(1,0,-1,2,0), (2,1,3,8,0), (0,1,6,4,0)\big\}$$

é uma base para $\mathcal{S}$.

2. Por que o método funciona?

Vamos agora justificar o método explicado na seção anterior. Primeiro vamos enunciar três fatos e demonstrar que o método funciona usando esses fatos. Em seguida, nós demonstraremos os três fatos enunciados.

Fato 1. Se uma matriz M' é obtida de uma matriz M através de operações de escalonamento (operações de *linha*) então as relações lineares satisfeitas pelas *colunas* de M são as mesmas que as relações lineares satisfeitas pelas *colunas* de M'; mais precisamente, se $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{R}^n$ são as colunas de M e se $a'_1, \ldots, a'_m \in \mathbb{R}^n$ são as colunas de M' então temos:

$$\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_m a_m = 0 \Longleftrightarrow \lambda_1 a'_1 + \cdots + \lambda_m a'_m = 0,$$

para quaisquer $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$.

Por exemplo, as colunas a_1, $\ldots$, a_4 da matriz M do Exemplo 1 satisfazem a relação $3a_1 - a_2 + a_3 - a_4 = 0$ (verifique!). A mesma relação é satisfeita pelas colunas da matriz escalonada M' obtida no Exemplo 1:

$$3(1,0,0,0,0) - (2,1,0,0,0) + (0,1,1,0,0) - (1,0,1,0,0) = 0.$$

Na verdade, todas as matrizes que aparecem nos passos intermediários do processo de escalonamento satisfazem essa relação (verifique!).

No que segue, vamos chamar de *coluna-pivô* de uma matriz escalonada uma coluna dessa matriz que contenha um pivô.

Fato 2. Se M' é uma matriz escalonada $n \times m$ então as colunas-pivô de M' formam um subconjunto linearmente independente de $\mathbb{R}^n$.

No Exemplo 2 as colunas-pivô de M' são as colunas de número 1, 2 e 4; é fácil verificar que elas formam um subconjunto linearmente independente de $\mathbb{R}^5$, isto é, o conjunto:

$$\big\{(1,0,0,0,0),(2,1,0,0,0),(0,1,1,0,0)\big\}$$

é linearmente independente.

Fato 3. Se M' é uma matriz escalonada $n \times m$ então uma coluna de M' que não contém pivô pertence ao subespaço de $\mathbb{R}^n$ gerado pelas colunas-pivô de M' que a precedem[1].

Por exemplo, a coluna de número 4 da matriz M' do Exemplo 1 não contém pivô; se a'_1, ..., a'_4 denotam as colunas da matriz M' então:

$$a'_4 = 3a'_1 - a'_2 + a'_3.$$

Olhando agora para a matriz M' do Exemplo 2, vemos que a coluna de número 3 não contém pivô e ela é igual à soma das duas primeiras colunas de M'.

Demonstração de que o método funciona. Seja:

$$\mathcal{A} = \{a_1, \ldots, a_m\} \subset \mathbb{R}^n$$

e considere a matriz M cujas colunas são os vetores de $\mathcal{A}$ (M é portanto uma matriz $n \times m$). Seja M' a matriz obtida de M por escalonamento (usando operações de linha). Sejam $i_1, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, m\}$ os números das colunas-pivô de M'. Devemos mostrar que:

$$\mathcal{B} = \big\{a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}\big\}$$

é uma base do subespaço $\mathcal{S}$ de $\mathbb{R}^n$ gerado por $\mathcal{A}$. Vamos denotar por a'_1, ..., a'_m as colunas de M'. O Fato 2 nos diz que o conjunto:

$$\mathcal{B}' = \{a'_{i_1}, \ldots, a'_{i_k}\}$$

das colunas-pivô de M' é linearmente independente; segue então do Fato 1 que $\mathcal{B}$ também é linearmente independente, já que uma relação linear satisfeita pelos vetores de $\mathcal{B}$ também seria satisfeita pelos vetores de $\mathcal{B}'$.

[1]O que acontece se a primeira coluna de M' não contiver pivô? Note que não há colunas que precedem a primeira. No entanto, se a primeira coluna de M' não contiver pivô, ela será necessariamente nula e portanto pertencerá ao subespaço gerado pelo conjunto vazio (que é o espaço nulo).

Vejamos agora que $\mathcal{B}$ gera $\mathcal{S}$; para isso, basta ver que toda coluna a_j de M pertence ao subespaço gerado por $\mathcal{B}$. Mas, segue facilmente do Fato 1 que a_j pertence ao subespaço gerado por $\mathcal{B}$ se e somente se a'_j pertence ao subespaço gerado por $\mathcal{B}'$. Se a'_j é uma coluna-pivô de M' então a'_j pertence a $\mathcal{B}'$ (e portanto pertence ao subespaço gerado por $\mathcal{B}'$). Por outro lado, se a'_j não é uma coluna-pivô de M' então, de acordo com o Fato 3, a'_j é combinação linear das colunas-pivô de M' que a precedem e, em particular, é combinação linear dos vetores de $\mathcal{B}'$. Logo a_j é combinação linear dos vetores de $\mathcal{B}$ e a demonstração está completa. $\square$

Vamos agora às demonstrações dos Fatos 1, 2 e 3.

Demonstração do Fato 1. A validade do Fato 1 segue da observação que o conjunto solução de um sistema linear homogêneo não se altera quando escalonamos (com operações de linha) a sua matriz de coeficientes e que as colunas $a_1, \ldots, a_m$ de uma matriz M satisfazem uma relação linear da forma:

$$\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_m a_m = 0$$

se e somente se os escalares $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ constituem uma solução do sistema linear homogêneo com matriz de coeficientes M. $\square$

Demonstração do Fato 2. Se o conjunto das colunas-pivô de M' fosse linearmente dependente, haveria uma coluna-pivô a'_j de M' que pertenceria ao subespaço gerado pelas colunas-pivô de M' que a precedem[2]. Se i é o número da linha onde está o pivô de a'_j então, de acordo com a definição de pivô, as colunas de número menor do que j possuem zero na linha de número i e evidentemente o mesmo vale para qualquer combinação linear das mesmas; como a linha de número i em a'_j não possui zero, segue que a'_j não pode ser combinação linear das colunas de M' que a precedem. $\square$

Demonstração do Fato 3. Seja a'_j uma coluna de M' que não contém pivô e seja N a matriz cujas colunas são as colunas-pivô de M' que precedem a'_j. Devemos mostrar que a'_j pertence ao subespaço gerado pelas colunas de N. Mas isso é equivalente a dizer que o sistema:

$$NX = a'_j$$

possui solução (aqui X denota uma matriz coluna contendo as incógnitas do sistema). Temos que a matriz N está escalonada e daí é fácil

[2]Faça como exercício: uma coleção de vetores $u_1, \ldots, u_m$ num espaço vetorial é linearmente dependente se e somente se algum dos vetores u_j pertence ao subespaço gerado pelos vetores $u_1, \ldots, u_{j-1}$.

ver que a única obstrução para que o sistema $NX = a'_j$ tenha solução seria a existência de uma linha de zeros em N correspondente a um elemento não nulo da coluna a'_j; mas um elemento não nulo de a'_j não pode ser precedido apenas por zeros em N, pois caso contrário ele seria um pivô e a'_j não possui pivô, por hipótese. Logo o sistema $NX = a'_j$ possui solução e a demonstração do Fato 3 está completa. $\square$