MEDIDAS COM SINAL

DANIEL V. TAUSK

1. **Definição.** Seja $\mathcal{C}$ uma coleção de conjuntos tal que $\emptyset \in \mathcal{C}$. Uma *medida com sinal finitamente aditiva* em $\mathcal{C}$ é uma função $\mu : \mathcal{C} \to \overline{\mathbb{R}}$ tal que:

- $\mu(\emptyset) = 0$;
- se $(A_n)_{n=1}^t$ é uma seqüência finita em $\mathcal{C}$ de conjuntos dois a dois disjuntos e se $\bigcup_{n=1}^t A_n \in \mathcal{C}$ então a soma $\sum_{n=1}^t \mu(A_n)$ está bem definida[1] e é igual a $\mu\big(\bigcup_{n=1}^t A_n\big)$.

Uma *medida com sinal σ-aditiva* (ou, simplesmente, uma *medida com sinal*) em $\mathcal{C}$ é uma função $\mu : \mathcal{C} \to \overline{\mathbb{R}}$ tal que:

- $\mu(\emptyset) = 0$;
- se $(A_n)_{n\ge 1}$ é uma seqüência em $\mathcal{C}$ de conjuntos dois a dois disjuntos e se $\bigcup_{n=1}^\infty A_n \in \mathcal{C}$ então a soma $\sum_{n=1}^t \mu(A_n)$ está bem definida[2] para todo $t \ge 1$, o limite $\lim_{t\to+\infty} \sum_{n=1}^t \mu(A_n)$ existe e:
$$\mu\Big(\bigcup_{n=1}^\infty A_n\Big) = \sum_{n=1}^\infty \mu(A_n) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{t\to+\infty} \sum_{n=1}^t \mu(A_n).$$

Exercício 1. Mostre que uma medida com sinal é também uma medida com sinal finitamente aditiva. (sugestão: defina $A_k = \emptyset$ para $k > t$.)

Exercício 2. Se $\mu : \mathcal{C} \to \overline{\mathbb{R}}$ é uma medida com sinal e se $(A_n)_{n\ge 1}$ é uma seqüência em $\mathcal{C}$ de conjuntos dois a dois disjuntos tal que $\bigcup_{n=1}^\infty A_n \in \mathcal{C}$ e $\mu\big(\bigcup_{n=1}^\infty A_n\big) \in \mathbb{R}$ então $\mu(A_n) \in \mathbb{R}$ para todo $n \ge 1$ e a série $\sum_{n=1}^\infty \mu(A_n)$ é absolutamente convergente. (sugestão: a união de conjuntos é uma operação comutativa e portanto essa série é comutativamente convergente.)

Exercício 3. Seja $\mu : \mathcal{C} \to \overline{\mathbb{R}}$ uma medida com sinal finitamente aditiva e suponha que $\mathcal{C}$ seja fechada por diferenças próprias (i.e., se $A, B \in \mathcal{C}$ e $B \subset A$ então $A \setminus B \in \mathcal{C}$). Mostre que:

(a) se $A, B \in \mathcal{C}$, $B \subset A$ e $\mu(B) \in \mathbb{R}$ então $\mu(A \setminus B) = \mu(A) - \mu(B)$;
(b) se $A, B \in \mathcal{C}$, $B \subset A$ e $\mu(B) \in \{+\infty, -\infty\}$ então $\mu(A) = \mu(B)$;
(c) se $A, B \in \mathcal{C}$, $B \subset A$ e $\mu(A) \in \mathbb{R}$ então $\mu(B) \in \mathbb{R}$.

Exercício 4. Se $\mu : \mathcal{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ é uma medida com sinal finitamente aditiva definida num anel $\mathcal{R}$, mostre que ou $+\infty$ ou $-\infty$ não pertence à imagem de

Date: 13 de junho de 2011.

[1] Isso significa que ou $+\infty$ ou $-\infty$ não pertence ao conjunto $\{\mu(A_n) : n = 1, \ldots, t\}$.

[2] Isso significa que ou $+\infty$ ou $-\infty$ não pertence ao conjunto $\{\mu(A_n) : n \ge 1\}$.

μ. (sugestão: se $A, B \in \mathcal{R}$, $\mu(A) = +\infty$ e $\mu(B) = -\infty$, use o resultado do Exercício 3 para mostrar que:

$$\mu(A \cap B) \in \mathbb{R}, \quad \mu(A \setminus B) = +\infty, \quad \mu(B \setminus A) = -\infty.$$

Mas a soma $\mu(A \setminus B) + \mu(B \setminus A)$ deveria estar bem definida!)

Exercício 5. Seja $\mu : \mathcal{C} \to \overline{\mathbb{R}}$ uma medida com sinal e suponha que $\mathcal{C}$ seja fechada por diferenças próprias. Mostre que:

(a) se $(A_n)_{n\ge 1}$ é uma seqüência em $\mathcal{C}$, $A_n \nearrow A$ e $A \in \mathcal{C}$ então o limite $\lim_{n\to+\infty} \mu(A_n)$ existe e é igual a $\mu(A)$; (sugestão: defina $B_1 = A_1$, $B_n = A_n \setminus A_{n-1}$ para $n \ge 2$. Note que A_n é igual à união disjunta $\bigcup_{i=1}^n B_i$ e A é igual à união disjunta $\bigcup_{i=1}^\infty B_i$.)

(b) se $(A_n)_{n\ge 1}$ é uma seqüência em $\mathcal{C}$, $A_n \searrow A$, $A \in \mathcal{C}$ e $\mu(A_1) \in \mathbb{R}$ então o limite $\lim_{n\to+\infty} \mu(A_n)$ existe e é igual a $\mu(A)$; (sugestão: aplique o resultado do item (a) para os conjuntos $A_1 \setminus A_n$.)

Exercício 6. Seja $\mu : \mathcal{C} \to \overline{\mathbb{R}}$ uma medida com sinal e suponha que $\mathcal{C}$ seja fechada por uniões enumeráveis disjuntas (i.e., dada uma coleção enumerável de conjuntos dois a dois disjuntos pertencentes a $\mathcal{C}$ então a união dessa coleção pertence a $\mathcal{C}$). Se $(A_n)_{n\ge 1}$ é uma seqüência em $\mathcal{C}$ de conjuntos dois a dois disjuntos, mostre que:

(a) se $\mu\big(\bigcup_{n=1}^\infty A_n\big) = +\infty$ então:

$$\sum_{n=1}^\infty \big(\mu(A_n)\big)^+ = +\infty, \quad \sum_{n=1}^\infty \big(\mu(A_n)\big)^- < +\infty;$$

(b) se $\mu\big(\bigcup_{n=1}^\infty A_n\big) = -\infty$ então:

$$\sum_{n=1}^\infty \big(\mu(A_n)\big)^+ < +\infty, \quad \sum_{n=1}^\infty \big(\mu(A_n)\big)^- = +\infty.$$

(sugestão: seja A_+ a união dos conjuntos A_n tais que $\mu(A_n) \ge 0$ e A_- a união dos conjuntos A_n tais que $\mu(A_n) < 0$. Verifique que:

$$\sum_{n=1}^\infty \big(\mu(A_n)\big)^+ = \mu(A_+), \quad \sum_{n=1}^\infty \big(\mu(A_n)\big)^- = -\mu(A_-),$$

e que $\bigcup_{n=1}^\infty A_n$ é igual à união disjunta de A_+ com A_-.)

Exercício 7. Seja $\mu : \mathcal{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ uma medida com sinal finitamente aditiva definida num anel $\mathcal{R}$. Suponha que para qualquer seqüência $(A_n)_{n\ge 1}$ em $\mathcal{R}$ tal que $A_n \searrow \emptyset$ vale que $\lim_{n\to+\infty} \mu(A_n) = 0$. Mostre que μ é σ-aditiva. (sugestão: se $(B_n)_{n\ge 1}$ é uma seqüência em $\mathcal{R}$ de conjuntos dois a dois disjuntos tal que a união $B = \bigcup_{n=1}^\infty B_n$ está em $\mathcal{R}$, considere a seqüência $A_n = B \setminus \bigcup_{i=1}^n B_i$.)

2. **Definição.** Seja $\mu : \mathcal{C} \to \overline{\mathbb{R}}$ uma medida com sinal finitamente aditiva. Um conjunto $A \in \mathcal{C}$ é dito *positivo* (resp., *negativo*) se $\mu(B) \ge 0$ (resp., $\mu(B) \le 0$) para todo $B \in \mathcal{C}$ tal que $B \subset A$. Um conjunto $A \in \mathcal{C}$ é dito

nulo se A for positivo e negativo, i.e., se $\mu(B) = 0$ para todo $B \in \mathcal{C}$ tal que $B \subset A$.

Exercício 8. Seja $\mu : \mathcal{C} \to \overline{\mathbb{R}}$ uma medida com sinal finitamente aditiva. Se $A \in \mathcal{C}$ é um conjunto positivo (resp., negativo) e $B \in \mathcal{C}$ está contido em A, mostre que B é um conjunto positivo (resp., negativo). Se $A \in \mathcal{C}$ é um conjunto nulo e $B \in \mathcal{C}$ está contido em A, mostre que B é um conjunto nulo.

Exercício 9. Mostre que:

(a) se μ é uma medida com sinal finitamente aditiva definida num anel então a coleção dos conjuntos positivos, dos conjuntos negativos e a dos conjuntos nulos são anéis;
(b) se μ é uma medida com sinal definida num σ-anel então a coleção dos conjuntos positivos, dos conjuntos negativos e a dos conjuntos nulos são σ-anéis.

(sugestão: reescreva as uniões de conjuntos positivos/negativos/nulos como uniões disjuntas de conjuntos positivos/negativos/nulos, respectivamente.)

3. **Teorema** (decomposição de Hahn)**.** *Sejam $\mathcal{A}$ uma σ-álgebra de partes de um conjunto X e $\mu : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}$ uma medida com sinal. Então existem um conjunto positivo $P \in \mathcal{A}$ e um conjunto negativo $N \in \mathcal{A}$ tais que $X = P \cup N$ e $P \cap N = \emptyset$.*

Um par (P, N) em que $X = P \cup N$, $P \cap N = \emptyset$, P é positivo e N é negativo é dito uma *decomposição de Hahn* para μ. Para a demonstração do Teorema 3 serão necessários dois lemas.

4. **Lema.** *Sejam $\mathcal{A}$ uma σ-álgebra de partes de um conjunto X e $\mu : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}$ uma medida com sinal. Se $\mu(X) \in \,]0, +\infty[$ então existe um conjunto positivo $P \in \mathcal{A}$ tal que $\mu(P) > 0$.*

Demonstração. Note que, já que $\mu(X) \in \mathbb{R}$, a medida μ toma valores em $\mathbb{R}$. Suponha por absurdo que qualquer $P \in \mathcal{A}$ tal que $\mu(P) > 0$ não seja um conjunto positivo, i.e., que todo $P \in \mathcal{A}$ de medida positiva contenha um elemento de $\mathcal{A}$ de medida negativa. Vamos construir por recursão uma seqüência $(A_n)_{n \geq 1}$ de elementos de $\mathcal{A}$ de medida negativa dois a dois disjuntos, da seguinte forma: supondo os conjuntos $A_i \in \mathcal{A}$, $i = 1, \ldots, n-1$, de medida negativa e dois a dois disjuntos já construídos, consideramos primeiramente o conjunto:

$$X_n = X \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} A_i.$$

Note que:

$$\mu(X_n) = \mu(X) - \sum_{i=1}^{n-1} \mu(A_i) > 0,$$

já que $\mu(X) > 0$ e $\mu(A_i) < 0$ para $i = 1, \ldots, n-1$. Seja:

$$c_n = \inf \big\{ \mu(E) : E \in \mathcal{A},\ E \subset X_n \big\}.$$

Como $\mu(X_n) > 0$, temos que X_n não é um conjunto positivo, i.e., existe $E \in \mathcal{A}$ com $E \subset X_n$ e $\mu(E) < 0$. Daí $c_n < 0$. Se $c_n = -\infty$, seja $A_n \in \mathcal{A}$ um subconjunto de X_n tal que $\mu(A_n) \le -1$. Se $c_n > -\infty$, seja $A_n \in \mathcal{A}$ um subconjunto de X_n tal que:

$$c_n \le \mu(A_n) < \min\big\{c_n + \tfrac{1}{n}, 0\big\}.$$

Daí $\mu(A_n) < 0$ e os conjuntos A_i, $i = 1, \ldots, n$ são dois a dois disjuntos. Isso completa a construção dos conjuntos A_n. Seja:

$$P = X \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Temos:

$$\mu(P) = \mu(X) - \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) > 0.$$

Vamos mostrar que P é um conjunto positivo. Note primeiramente que o conjunto I dos índices n tais que $c_n = -\infty$ é finito; de fato, para $n \in I$ temos $\mu(A_n) \le -1$ e se I fosse infinito o conjunto $\bigcup_{n\in I} A_n$ teria medida igual a $-\infty$. Seja então n_0 tal que $n \ge n_0$ implica $c_n > -\infty$. Se $E \in \mathcal{A}$ e $E \subset P$ então, para todo $n \ge n_0$, temos que $A_n \cup E$ é um subconjunto de X_n e portanto:

$$\mu(A_n \cup E) \ge c_n.$$

Mas E é disjunto de A_n, donde $\mu(A_n \cup E) = \mu(A_n) + \mu(E) \ge c_n$ e daí:

$$\mu(E) \ge c_n - \mu(A_n) > c_n - \big(c_n + \tfrac{1}{n}\big) = -\tfrac{1}{n},$$

para todo $n \ge n_0$. Concluímos então que $\mu(E) \ge 0$. Assim P é positivo e $\mu(P) > 0$, contradizendo nossa hipótese. □

5. **Lema.** *Sejam $\mathcal{A}$ um σ-anel e $\mu : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}$ uma medida com sinal. Se:*

$$c = \sup\big\{\mu(P) : P \in \mathcal{A},\ P \text{ é positivo}\big\}$$

então existe um conjunto positivo $P \in \mathcal{A}$ tal que $\mu(P) = c$.

Demonstração. Note que o conjunto vazio é positivo, de modo que o conjunto do qual c é o supremo é um subconjunto não vazio de $[0, +\infty]$. Assim, $c \in [0, +\infty]$. Se $c < +\infty$, então para cada $n \ge 1$ escolha um conjunto positivo $P_n \in \mathcal{A}$ tal que $\mu(P_n) > c - \frac{1}{n}$; se $c = +\infty$, escolha para cada $n \ge 1$ um conjunto positivo $P_n \in \mathcal{A}$ tal que $\mu(P_n) > n$. Pelo resultado do item (b) do Exercício 9, temos que $P = \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n$ é um conjunto positivo. Para todo $n \ge 1$, temos:

$$\mu(P) = \mu(P_n) + \mu(P \setminus P_n) \ge \mu(P_n),$$

já que $\mu(P \setminus P_n) \ge 0$. Daí $\mu(P) \ge c$ e, obviamente, $\mu(P) \le c$. □

Demonstração do Teorema 3. Em vista do resultado do Exercício 4, temos que ou $+\infty$ ou $-\infty$ não pertence à imagem de μ. Trocando μ por $-\mu$, se necessário, podemos supor que $+\infty$ não pertence à imagem de μ. Sejam c e P como no enunciado do Lema 5. Como $c = \mu(P)$, temos $c < +\infty$. Como P

é positivo, é suficiente mostrar agora que $N = X \setminus P$ é negativo. Se não fosse, existiria $Y \in \mathcal{A}$ contido em N tal que $\mu(Y) > 0$. Temos então que a restrição de μ à σ-álgebra $\mathcal{A}|_Y$ de partes de Y satisfaz as hipóteses do Lema 4 e portanto existe um subconjunto positivo Q de Y tal que $\mu(Q) > 0$. Daí $P \cup Q$ é positivo e como P e Q são disjuntos, temos $\mu(P \cup Q) = \mu(P) + \mu(Q) > c$, contradizendo a maximalidade de c. $\square$

Exercício 10 (unicidade da decomposição de Hahn). Sejam $\mathcal{A}$ uma σ-álgebra de partes de um conjunto X e $\mu : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}$ uma medida com sinal. Se (P, N) e (P', N') são decomposições de Hahn para μ, mostre que $P \mathbin{\triangle} P' = N \mathbin{\triangle} N'$ é um conjunto nulo. (sugestão: a igualdade $P \mathbin{\triangle} P' = N \mathbin{\triangle} N'$ segue do fato que N é o complementar de P e N' é o complementar de P'. Para mostrar que $P \mathbin{\triangle} P'$ é nulo, note que $P \setminus P' = P \cap N'$ e que $P' \setminus P = P' \cap N$.)

Exercício 11. Seja $\mu : \mathcal{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ uma medida com sinal finitamente aditiva definida num anel $\mathcal{R}$. Se $A, B \in \mathcal{R}$ e $A \mathbin{\triangle} B$ é um conjunto nulo, mostre que $\mu(A) = \mu(B)$. (sugestão: mostre que $\mu(A) = \mu(A \cap B) = \mu(B)$.)

Exercício 12. Sejam $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida (sem sinal) e $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ uma função quase integrável. Mostre que:

$$\mu_f(E) = \int_E f \,\mathrm{d}\mu, \quad E \in \mathcal{A}$$

é uma medida com sinal e que:

$$P = [f \geq 0] = \big\{x \in X : f(x) \geq 0\big\}, \quad N = [f < 0] = \big\{x \in X : f(x) < 0\big\}$$

é uma decomposição de Hahn para μ_f. (sugestão: para ver que μ_f é uma medida com sinal, note que $\mu_f = \mu_{f^+} - \mu_{f^-}$ e recorde que μ_{f^+}, μ_{f^-} são medidas.)

Exercício 13 (decomposição de Jordan). Sejam $\mathcal{A}$ uma σ-álgebra de partes de um conjunto X e $\mu : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}$ uma medida com sinal. Se (P, N) é uma decomposição de Hahn para μ, defina $\mu^+ : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$, $\mu^- : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ fazendo:

$$\mu^+(E) = \mu(E \cap P), \quad \mu^-(E) = -\mu(E \cap N), \quad E \in \mathcal{A}.$$

Mostre que:

(a) μ^+ e μ^- não dependem da decomposição de Hahn (P, N); (sugestão: use os resultados dos Exercícios 10 e 11.)
(b) μ^+ e μ^- são medidas (sem sinal) e uma delas é finita;
(c) $\mu = \mu^+ - \mu^-$;
(d) se $\mu_1, \mu_2 : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ são medidas (sem sinal) tais que $\mu = \mu_1 - \mu_2$ então $\mu^+(E) \leq \mu_1(E)$ e $\mu^-(E) \leq \mu_2(E)$, para todo $E \in \mathcal{A}$;
(e) se $\mu_1, \mu_2 : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ são medidas (sem sinal) tais que $\mu = \mu_1 - \mu_2$ então existe uma medida finita (sem sinal) $\nu : \mathcal{A} \to [0, +\infty[$ tal que $\mu_1 = \mu^+ + \nu$ e $\mu_2 = \mu^- + \nu$. (sugestão: se $+\infty$ não está na imagem de μ então μ^+ e μ_1 são finitas. Defina $\nu = \mu_1 - \mu^+$. Similarmente, se $-\infty$ não está na imagem de μ, defina $\nu = \mu_2 - \mu^-$.)

O par de medidas (μ^+, μ^-) definido no enunciado do Exercício 13 é chamado uma *decomposição de Jordan* para μ. A soma $|\mu| = \mu^+ + \mu^-$ é uma medida (sem sinal). A medida $|\mu|$ é chamada a *variação total* de μ.

Exercício 14. Se μ, f e μ_f são como no Exercício 12, mostre que:

$$(\mu_f)^+ = \mu_{f^+}, \quad (\mu_f)^- = \mu_{f^-}, \quad |\mu_f| = \mu_{|f|}.$$

Exercício 15. Seja $\mathcal{A}$ uma σ-álgebra de partes de um conjunto X e seja $\mu : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}$ uma medida com sinal. Dado $E \in \mathcal{A}$, mostre que:

$$|\mu(E)| \leq |\mu|(E).$$

Exercício 16. Seja $\mathcal{A}$ uma σ-álgebra de partes de um conjunto X e seja $\mu : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}$ uma medida com sinal. Dado $E \in \mathcal{A}$, mostre que $|\mu|(E)$ é igual ao supremo das somas:

$$\sum_{A \in \mathcal{E}} |\mu(A)|,$$

onde $\mathcal{E}$ percorre todas as coleções finitas de subconjuntos mensuráveis dois a dois disjuntos de E. Mostre que o resultado continua valendo se deixamos $\mathcal{E}$ percorrer todas as coluções enumeráveis de subconjuntos mensuráveis dois a dois disjuntos de E. (sugestão: para verificar que esse supremo é menor ou igual a $|\mu|(E)$, use o resultado do Exercício 15 e a σ-aditividade da medida $|\mu|$. Para verificar a desigualdade oposta, considere a coleção:

$$\mathcal{E} = \{E \cap P, E \cap N\},$$

onde (P, N) é uma decomposição de Hahn para μ.)

Exercício 17. Seja $\mathcal{A}$ uma σ-álgebra de partes de um conjunto X e sejam $\mu : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}$ e $\nu : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}$ medidas com sinal. Assuma que μ e ν não assumam o valor $+\infty$ ou que μ e ν não assumam o valor $-\infty$. Mostre que $\mu + \nu$ é uma medida com sinal e que:

$$(\mu + \nu)^+ \leq \mu^+ + \nu^+, \quad (\mu + \nu)^- \leq \mu^- + \nu^-, \quad |\mu + \nu| \leq |\mu| + |\nu|.$$

(sugestão: $\mu + \nu = (\mu^+ + \nu^+) - (\mu^- + \nu^-)$. Use o resultado do item (d) do Exercício 13.)

Exercício 18. Seja $\mathcal{A}$ uma σ-álgebra de partes de um conjunto X e seja $\mu : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}$ uma medida com sinal. Dado $c \in \mathbb{R}$, mostre que $c\mu$ é uma medida com sinal e que:

(a) se $c \geq 0$ então $(c\mu)^+ = c\mu^+$ e $(c\mu)^- = c\mu^-$;
(b) se $c \leq 0$ então $(c\mu)^+ = -c\mu^-$ e $(c\mu)^- = -c\mu^+$;
(c) em qualquer caso, vale que $|c\mu| = |c||\mu|$.

Exercício 19. Seja $\mathcal{A}$ uma σ-álgebra de partes de um conjunto X e denote por $M(\mathcal{A})$ o conjunto de todas as medidas com sinal finitas definidas em $\mathcal{A}$. Mostre que:

(a) $M(\mathcal{A})$ é um subespaço do espaço vetorial de todas as funções a valores reais definidas em $\mathcal{A}$;

(b) $\|\mu\| = |\mu|(X)$ define uma norma em $M(\mathcal{A})$;

(c) se $\|\mu\|_{\sup} = \sup_{E\in\mathcal{A}} |\mu(E)|$ denota a *norma do supremo*, mostre que:

$$\|\mu\|_{\sup} \le \|\mu\| \le 2\|\mu\|_{\sup},$$

para qualquer $\mu \in M(\mathcal{A})$; (sugestão: para a primeira desigualdade, use o resultado do Exercício 15 e para a segunda observe que:

$$\|\mu\| = \mu(P) - \mu(N),$$

onde (P, N) é uma decomposição de Hahn para μ.)

(d) mostre que $M(\mathcal{A})$, munido de $\|\cdot\|$, é um espaço de Banach. (sugestão: pelo item (c), a norma $\|\cdot\|$ é equivalente à norma do supremo, então é suficiente mostrar que a norma do supremo é completa. Como o espaço das funções limitadas de $\mathcal{A}$ em $\mathbb{R}$, munido da norma do supremo, é completo, é suficiente mostrar que $M(\mathcal{A})$ é um subespaço fechado. Você deve portanto mostrar que o limite uniforme de medidas com sinal finitas é uma medida com sinal finita. Use o resultado do Exercício 7.)