Lista de Exercícios

MAT5748 - Operadores Lineares

Prof. Daniel Victor Tausk

1. Seja X um espaço vetorial real e seja $J : X \to X$ uma estrutura complexa em X, i.e., J é uma aplicação $\mathbb{R}$-linear tal que $J^2 = -\mathrm{I}$, onde I denota o operador identidade de X. Denote por (X, J) o espaço vetorial complexo obtido definindo em X a multiplicação:

$$(a + bi)x \stackrel{\text{def}}{=} ax + bJ(x), \quad x \in X,\ a, b \in \mathbb{R}.$$

(a) Mostre que para todo funcional $\mathbb{R}$-linear $\alpha_0 : X \to \mathbb{R}$ existe um *único* funcional $\mathbb{C}$-linear $\alpha : (X, J) \to \mathbb{C}$ que tem α_0 como sua parte real; escreva explicitamente uma expressão para α em termos de α_0 e J.

(b) Se $\Re : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ denota a aplicação que associa a cada número complexo sua parte real, mostre que:

$$(X, J)^* \ni \alpha \longmapsto \Re \circ \alpha \in (X^*, J^*) \tag{1}$$

é um isomorfismo $\mathbb{C}$-linear; em (1) denotamos por (X^*, J^*) o espaço vetorial complexo obtido do espaço vetorial real X^* e da estrutura complexa $J^* : X^* \to X^*$.

(c) Suponha que X é munido de uma norma $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ *compatível* com a estrutura complexa J, no sentido que $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$, para todos $\lambda \in \mathbb{C}$, $x \in X$. Mostre que para todo funcional $\mathbb{C}$-linear $\alpha : (X, J) \to \mathbb{C}$ vale a igualdade:

$$\sup_{\|x\| \le 1} \big|\alpha(x)\big| = \sup_{\|x\| \le 1} \big|(\Re \circ \alpha)(x)\big|.$$

(d) Conclua do item (c) que a aplicação (1) é uma isometria entre o dual topológico de (X, J) e o dual topológico de X.

Dica para o item (c): dado $x \in X$, existe um número complexo $\lambda \in \mathbb{C}$ com $|\lambda| = 1$ e $\lambda\alpha(x) = |\alpha(x)|$.

2. Seja X um espaço vetorial real e seja $J : X \to X$ uma estrutura complexa em X; como no Exercício 1, consideramos (X, J) como sendo um espaço vetorial complexo.

(a) Seja $\langle \cdot, \cdot \rangle$ um produto interno (sesqui-linear) no espaço vetorial complexo (X, J). Mostre que a parte real:

$$\langle x, y \rangle_0 \stackrel{\text{def}}{=} \Re\langle x, y \rangle, \quad x, y \in X,$$

de $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é um produto interno no espaço vetorial real X.

(b) Mostre que $\langle \cdot, \cdot \rangle_0$ e $\langle \cdot, \cdot \rangle$ induzem a mesma norma em X.

(c) Mostre que:

$$\langle Jx, Jy\rangle_0 = \langle x, y\rangle_0, \tag{2}$$

$$\langle Jx, y\rangle_0 = -\langle x, Jy\rangle_0, \tag{3}$$

para todos $x, y \in X$.

(d) Seja agora $\langle\cdot,\cdot\rangle_0$ um produto interno arbitrário no espaço vetorial real X. Mostre que as condições (2) e (3) são equivalentes.

(e) Se um produto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle_0$ em X satisfaz uma (e portanto ambas) as condições equivalentes (2) e (3), mostre que existe *um único* produto interno (sesqui-linear) $\langle\cdot,\cdot\rangle$ em (X, J) cuja parte real é $\langle\cdot,\cdot\rangle_0$. Escreva uma expressão explícita para $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

Definição 1. Seja X um espaço vetorial real. Uma *complexificação* para X é um par (W, ϕ), onde W é um espaço vetorial complexo e $\phi : X \to W$ é uma aplicação $\mathbb{R}$-linear injetora tal que $W = \phi(X) \oplus i\phi(X)$.

3. Seja X um espaço vetorial real e seja $X^{\mathbb{C}} = X \oplus X$ a soma direta (externa) de X com si mesmo; transformamos $X^{\mathbb{C}}$ num espaço vetorial complexo através da estrutura complexa:

$$X^{\mathbb{C}} \ni (x, y) \longmapsto (-y, x) \in X^{\mathbb{C}}.$$

Se $\iota : X \ni x \mapsto (x, 0) \in X^{\mathbb{C}}$ denota a inclusão na primeira variável, mostre que $(X^{\mathbb{C}}, \iota)$ é uma complexificação de X.

4. Seja X um espaço vetorial real e (W, ϕ) uma complexificação de X.

(a) Seja Z um espaço vetorial complexo e seja $T : X \to Z$ uma aplicação $\mathbb{R}$-linear. Mostre que existe uma única aplicação $\mathbb{C}$-linear $\widetilde{T} : W \to Z$ tal que $\widetilde{T} \circ \phi = T$, i.e., tal que o diagrama:

$$\begin{tikzcd} W \arrow[dr, "\widetilde{T}"] & \\ X \arrow[u, "\phi"] \arrow[r, "T"'] & Z \end{tikzcd}$$

comuta.

(b) Mostre que complexificações são únicas a menos de isomorfismos; mais precisamente, mostre que se (W', ϕ') é uma outra complexificação de X então existe um isomorfismo $\mathbb{C}$-linear $\psi : W \to W'$ tal que $\psi \circ \phi = \phi'$, i.e., tal que o diagrama:

$$\begin{tikzcd} W \arrow[rr, "\psi", "\cong"'] & & W' \\ & X \arrow[ul, "\phi"] \arrow[ur, "\phi'"'] & \end{tikzcd}$$

comuta.

Definição 2. Seja W um espaço vetorial complexo. Uma *forma real* em W é um subespaço vetorial real W_0 de W tal que $W = W_0 \oplus iW_0$.

5. Se W é um espaço vetorial complexo e W_0 é uma forma real em W, mostre que (W, ι) é uma complexificação de W_0, onde $\iota : W_0 \to W$ denota a aplicação inclusão.

Observação 1. No que segue, o espaço $X^{\mathbb{C}}$ definido no Exercício 3 será chamado *a complexificação* de X e identificamos X com o subespaço $X \oplus \{0\}$ de $X^{\mathbb{C}}$.

6. Seja X um espaço vetorial real e seja $\langle \cdot, \cdot \rangle$ um produto interno em X.

(a) Mostre que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ estende-se de modo único a um produto interno (sesqui-linear) $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{C}}$ no espaço complexo $X^{\mathbb{C}}$. Escreva uma fórmula explícita para $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{C}}$.

(b) Mostre que a norma $\|\cdot\|_{\mathbb{C}}$ induzida em $X^{\mathbb{C}}$ por $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{C}}$ é uma extensão da norma $\|\cdot\|$ induzida em X por $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

(c) Mostre que:
$$\|x + iy\|_{\mathbb{C}}^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2,$$
para todos $x, y \in X$.

(d) Mostre que a topologia induzida em $X^{\mathbb{C}}$ por $\|\cdot\|_{\mathbb{C}}$ coincide com a topologia produto de $X \times X$, onde X é munido da topologia induzida por $\|\cdot\|$.

(e) Mostre que X (munido de $\langle \cdot, \cdot \rangle$) é um espaço de Hilbert real se e somente se $X^{\mathbb{C}}$ (munido de $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{C}}$) é um espaço de Hilbert complexo.

Notação 1. No que segue, se X, Y são espaços vetoriais normados, denotamos por $\mathrm{Lin}(X, Y)$ o espaço das aplicações lineares contínuas $T : X \to Y$ munido da norma:
$$\|T\| \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\|x\| \le 1} \big\|T(x)\big\|.$$
Em alguns casos escrevemos $\mathrm{Lin}_{\mathbb{R}}(X, Y)$ ou $\mathrm{Lin}_{\mathbb{C}}(X, Y)$ para enfatizar que estamos considerando aplicações $\mathbb{R}$-lineares ou $\mathbb{C}$-lineares, respectivamente.

7. Sejam X, Y espaços vetoriais normados reais e considere o espaço normado real $\mathrm{Lin}(X, Y)$.

(a) Se é dada uma estrutura complexa em Y que o torna um espaço vetorial normado complexo, mostre que:
$$(\lambda T)(x) \stackrel{\text{def}}{=} \lambda\, T(x), \quad x \in X,\ T \in \mathrm{Lin}(X, Y),\ \lambda \in \mathbb{C},$$
torna $\mathrm{Lin}(X, Y)$ um espaço normado complexo.

(b) Se é dada uma estrutura complexa em X que o torna um espaço vetorial normado complexo, mostre que:
$$(\lambda T)(x) \stackrel{\text{def}}{=} T(\lambda x), \quad x \in X,\ T \in \mathrm{Lin}(X, Y),\ \lambda \in \mathbb{C},$$
torna $\mathrm{Lin}(X, Y)$ um espaço normado complexo.

(c) Se são dadas estruturas complexas em X e Y que tornam ambos espaços normados complexos, mostre que as estruturas complexas definidas em $\mathrm{Lin}(X,Y)$ nos itens anteriores coincidem no subespaço $\mathrm{Lin}_{\mathbb{C}}(X,Y)$ de $\mathrm{Lin}(X,Y)$ (mas *não coincidem* em geral em $\mathrm{Lin}(X,Y)$).

8. Seja X um espaço vetorial real normado e denote por $X' = \mathrm{Lin}(X,\mathbb{C})$ o espaço das aplicações $\mathbb{R}$-lineares contínuas $\alpha : X \to \mathbb{C}$ munido da norma usual; pelo resultado do Exercício 7, X' torna-se um espaço de Banach complexo quando definimos:

$$(\lambda\alpha)(x) \stackrel{\text{def}}{=} \lambda\alpha(x),$$

para todos $x \in X$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $\alpha \in X'$. Seja agora $\mathrm{Lin}_{\mathbb{C}}(X',\mathbb{C})$ o espaço das aplicações $\mathbb{C}$-lineares contínuas $\eta : X' \to \mathbb{C}$, munido também de sua norma usual; sabemos que $\mathrm{Lin}_{\mathbb{C}}(X',\mathbb{C})$ é um espaço de Banach complexo. Para cada $x \in X$, denote por $\hat{x} \in \mathrm{Lin}_{\mathbb{C}}(X',\mathbb{C})$ a aplicação de *avaliação em* x definida por $\hat{x}(\alpha) = \alpha(x)$, para todo $\alpha \in X'$.

(a) Mostre que a aplicação:

$$X \ni x \longmapsto \hat{x} \in \mathrm{Lin}_{\mathbb{C}}(X',\mathbb{C}) \tag{4}$$

é uma imersão isométrica $\mathbb{R}$-linear.

(b) Seja $\theta : X^{\mathbb{C}} \to \mathrm{Lin}_{\mathbb{C}}(X',\mathbb{C})$ a única aplicação $\mathbb{C}$-linear que estende a aplicação (4) (veja item (a) do Exercício 4). Mostre que:

$$\|z\|_{\mathbb{C}} \stackrel{\text{def}}{=} \|\theta(z)\|, \quad z \in X^{\mathbb{C}},$$

define uma norma em $X^{\mathbb{C}}$ que estende a norma de X e que torna $X^{\mathbb{C}}$ um espaço normado complexo.

(c) Para cada $\alpha \in \mathrm{Lin}(X,\mathbb{C})$, denote por $\tilde{\alpha} : X^{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$ a única extensão $\mathbb{C}$-linear de α. Mostre que:

$$\|z\|_{\mathbb{C}} = \sup\big\{|\tilde{\alpha}(z)| : \alpha \in \mathrm{Lin}(X,\mathbb{C}),\ \|\alpha\| \le 1\big\}.$$

(d) Se $z = x + iy \in X^{\mathbb{C}}$, com $x, y \in X$, mostre que:

$$\max\{\|x\|, \|y\|\} \le \|z\|_{\mathbb{C}} \le \|x\| + \|y\|;$$

conclua que a norma $\|\cdot\|_{\mathbb{C}}$ em $X^{\mathbb{C}}$ é equivalente à norma:

$$x + iy \longmapsto \|x\| + \|y\|, \quad x, y \in X; \tag{5}$$

observe, no entanto, que a norma (5) em geral *não é compatível* com a estrutura complexa de $X^{\mathbb{C}}$.

(e) Mostre que a topologia induzida em $X^{\mathbb{C}}$ por $\|\cdot\|_{\mathbb{C}}$ coincide com a topologia produto de $X \times X$.

(f) Mostre que X é um espaço de Banach real se e somente se $X^{\mathbb{C}}$ é um espaço de Banach complexo.

(g) Mostre que a aplicação:

$$X' \ni \alpha \longmapsto \tilde{\alpha} \in \mathrm{Lin}(X^{\mathbb{C}},\mathbb{C})$$

é uma isometria $\mathbb{C}$-linear.

(h) Se Y é um espaço vetorial normado complexo, $T : X \to Y$ é uma aplicação linear contínua e $\widetilde{T} : X^{\mathbb{C}} \to Y$ denota sua única extensão $\mathbb{C}$-linear, mostre que:

$$\|T\| = \|\widetilde{T}\|.$$

(i) Se X é o espaço $\mathbb{R}^2$ munido da norma Euclideana, calcule explicitamente a norma $\|\cdot\|_{\mathbb{C}}$ do vetor $(1, i) \in \mathbb{C}^2 = X^{\mathbb{C}}$. Conclua que se a norma $\|\cdot\|$ de um espaço X provém de um produto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$ então a norma $\|\cdot\|_{\mathbb{C}}$ em $X^{\mathbb{C}}$ em geral *não provém* do produto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbb{C}}$ (veja Exercício 6).

Notação 2. No que segue, se X é um espaço vetorial normado então X^* denota o *dual topológico* de X, i.e., o espaço normado $\mathrm{Lin}(X, \mathbb{K})$ constituído pelos funcionais lineares contínuos $\alpha : X \to \mathbb{K}$.

9. Seja X um espaço de Banach. Mostre que se X^* é separável então X também é separável.
Dica: seja $(\alpha_n)_{n\ge 1}$ uma seqüência densa na esfera unitária de X^* e seja $(x_n)_{n\ge 1}$ uma seqüência em X tal que $\|x_n\| = 1$ e $|\alpha_n(x_n)| > \frac{1}{2}$, para todo $n \ge 1$. Mostre que o anulador do subespaço gerado pelos vetores x_n, $n \ge 1$, é nulo.

10. Sejam X, Y espaços de Banach. Mostre que um operador limitado $T : X \to Y$ é uma perturbação compacta de um isomorfismo (i.e., $T = L + K$, com $L : X \to Y$ um isomorfismo limitado e $K : X \to Y$ um operador compacto) se e somente se T é um operador de Fredholm de índice zero.

11. Sejam X, Y espaços de Banach e suponha que:

$$X = \bigoplus_{i=1}^{n} X_i, \quad Y = \bigoplus_{i=1}^{n} Y_i,$$

onde X_i, $i = 1, \ldots, n$, são subespaços fechados de X e Y_i, $i = 1, \ldots, n$, são subespaços fechados de Y. Seja $T : X \to Y$ um operador linear tal que $T(X_i) \subset Y_i$, para $i = 1, \ldots, n$; denote por $T_i : X_i \to Y_i$ a restrição de T ao subespaço X_i.

(a) Mostre que T é limitado se e somente se cada T_i é limitado.
(b) Mostre que T é compacto se e somente se cada T_i é compacto.
(c) Mostre que T é um isomorfismo se e somente se cada T_i é um isomorfismo.
(d) Mostre que T é um operador de Fredholm se e somente se cada T_i é um operador de Fredholm; em caso afirmativo, mostre que:

$$\mathrm{ind}(T) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{ind}(T_i).$$

12. Sejam X, Y espaços de Banach e $T : X \to Y$ um operador de Fredholm. Mostre que $T^* : Y^* \to X^*$ também é um operador de Fredholm e que $\mathrm{ind}(T^*) = -\mathrm{ind}(T)$.

13. Sejam X um espaço de Hilbert e $T : X \to X$ um operador limitado normal (i.e., $TT^* = T^*T$, onde $T^* : X \to X$ denota o adjunto de T).

(a) Mostre que $\mathrm{Ker}(T) = \mathrm{Ker}(T^*) = \mathrm{Im}(T)^\perp$.
(b) Mostre que $\mathrm{Ker}(T^2) = \mathrm{Ker}(T)$.
(c) Se T é um operador de Fredholm, mostre que $\mathrm{ind}(T) = 0$.

Definição 3. Seja X um espaço vetorial topológico. Uma *rede de Cauchy* em X é uma rede $(x_i)_{i\in I}$ em X tal que para toda vizinhança V da origem em X existe $i_0 \in I$ com $x_i - x_j \in V$, sempre que $i, j \geq i_0$. Um espaço vetorial topológico X é dito *completo* se toda rede de Cauchy em X é convergente.

14. Seja X um espaço vetorial normado. Mostre que se toda seqüência de Cauchy em X é convergente (i.e., se X é completo como espaço métrico) então toda rede de Cauchy em X é convergente (i.e., X é completo como espaço vetorial topológico).
Dica: se $(x_i)_{i\in I}$ é uma rede de Cauchy em X, construa uma seqüência crescente $(i_n)_{n\geq 1}$ em I com a seguinte propriedade: para todo $n \geq 1$, se $i, j \geq i_n$ então $\|x_i - x_j\| < \frac{1}{n}$.

15. Seja X um espaço vetorial topológico Hausdorff e seja Y um subespaço de X. Mostre que se Y é completo então Y é fechado em X.

16. Seja X um espaço vetorial normado e considere o *dual algébrico* (i.e., o conjunto de *todos* os funcionais lineares $\alpha : X \to \mathbb{K}$) munido da topologia da convergência pontual (i.e., a topologia induzida pela topologia produto de $\mathbb{K}^X$).

(a) Mostre que o dual topológico de X é denso no dual algébrico de X.
(b) Se X tem dimensão infinita, conclua que o dual topológico de X não é completo quando munido da topologia fraca-$*$.
(c) Mostre que o dual topológico de X munido da topologia fraca-$*$ é *seqüencialmente completo*, i.e., toda seqüência de Cauchy converge em X^*.

17. Seja X um espaço vetorial sobre um corpo arbitrário K e seja $T : X \to X$ um operador linear de posto finito. Mostre que existe um polinômio não nulo $p \in K[t]$ tal que $p(T) = 0$.

18. *Esse exercício requer mais conhecimentos de álgebra que os outros.*

Seja X um espaço vetorial sobre um corpo arbitrário K e seja $T : X \to X$ um operador linear. Denote por $K[t]\otimes X$ o produto tensorial sobre K do anel de polinômios $K[t]$ por X. Podemos introduzir em $K[t] \otimes X$ uma estrutura de $K[t]$-módulo, definindo:

$$p(q \otimes v) \stackrel{\text{def}}{=} (pq) \otimes v,$$

para todos $p, q \in K[t]$, $v \in X$ (*porque essa operação está bem definida?*). Podemos também definir em X uma estrutura de $K[t]$-módulo fazendo:

$$pv \stackrel{\text{def}}{=} p(T)v,$$

para todos $p \in K[t]$, $v \in X$. Considere as aplicações K-lineares

$$\phi : K[t] \otimes X \longrightarrow K[t] \otimes X, \quad m : K[t] \otimes X \longrightarrow X$$

que satisfazem:

$$\phi(p \otimes v) = (tp) \otimes v - p \otimes T(v), \quad m(p \otimes v) = pv \stackrel{\text{def}}{=} p(T)v,$$

para todos $p \in K[t]$, $v \in X$ (*porque ϕ e m estão bem definidas?*).

(a) Mostre que ϕ e m são morfismos de $K[t]$-módulos.

(b) Mostre que $K[t] \otimes X$ é um $K[t]$-módulo livre; mais precisamente, mostre que se $(b_i)_{i \in I}$ é uma K-base para X então $(1 \otimes b_i)_{i \in I}$ é uma $K[t]$-base para $K[t] \otimes X$. Qual é a matriz que representa ϕ com respeito a essa base?

(c) Mostre que:

$$K[t] \otimes X \xrightarrow{\phi} K[t] \otimes X \xrightarrow{m} X \longrightarrow 0$$

é uma seqüência exata de $K[t]$-módulos.

(d) Conclua que, se X tem dimensão finita, então X é isomorfo como $K[t]$-módulo a uma soma direta $\bigoplus_{i=1}^{k} K[t]/\langle p_i \rangle$, onde $p_i \in K[t]$ são polinômios mônicos de grau positivo e o produto $\prod_{i=1}^{k} p_i$ é exatamente o polinômio característico do operador T.

Dica para o item (c): para mostrar que a imagem de ϕ coincide exatamente com o núcleo de m, mostre primeiramente que todo elemento de $K[t] \otimes X$ escreve-se como soma de um elemento da imagem de ϕ com um elemento da forma $1 \otimes v$, $v \in X$.

Dica para o item (d): recorde o seguinte resultado: se M, N são módulos livres de posto finito sobre um domínio de ideais principais R então todo morfismo $\phi : M \to N$ pode ser diagonalizado em bases apropriadas dos R-módulos M e N.