Álgebras de Boole e a Dualidade de Stone

MAT0554 – Panorama de Matemática

Prof. Daniel Victor Tausk

16/02/2016

1. Reticulados e álgebras de Boole

Definição 1.1 (pré-ordem, ordem parcial)**.** Sejam P um conjunto e $\le$ uma relação binária em P. Dizemos que $\le$ é uma *pré-ordem* em P se satisfaz as seguintes condições:

- $p \le p$, para todo $p \in P$ (reflexiva);
- $p \le q$ e $q \le r$ implicam $p \le r$, para todos $p, q, r \in P$ (transitiva).

Uma pré-ordem que satisfaz também a condição:

- $p \le q$ e $q \le p$ implicam $p = q$, para todos $p, q \in P$ (anti-simétrica),

é chamada uma *ordem parcial* em P. Um conjunto munido de uma ordem parcial é dito *parcialmente ordenado*.

Exercício 1.1. Sejam P um conjunto, $\le$ uma pré-ordem (resp., uma ordem parcial) em P e S um subconjunto de P. Mostre que a restrição[1] a S da relação binária $\le$ é uma pré-ordem (resp., uma ordem parcial) em S. Essa restrição é chamada a *pré-ordem induzida* (resp., a *ordem parcial induzida*) em S por $\le$.

Exercício 1.2. Sejam P um conjunto e $\le$ uma pré-ordem em P. Defina uma relação binária $\sim$ em P fazendo:

$$p \sim q \iff p \le q \text{ e } q \le p,$$

para todos $p, q \in P$. Mostre que $\sim$ é uma relação de equivalência em P.

Exercício 1.3. Sejam P um conjunto e $\le$ uma pré-ordem em P. Considere a relação de equivalência $\sim$ em P definida no Exercício 1.2. Dadas classes de equivalência $u, v \in P/{\sim}$, mostre que a condição $p \le q$ é independente da escolha de representantes $p \in u$, $q \in v$; mais precisamente, mostre que se $p_1, p_2, q_1, q_2 \in P$ são tais que $p_1 \sim p_2$ e $q_1 \sim q_2$, então

$$p_1 \le q_1 \iff p_2 \le q_2.$$

Defina uma relação binária $\preceq$ no conjunto quociente $P/{\sim}$ fazendo:

$$u \preceq v \iff p \le q,$$

para todos $u, v \in P/{\sim}$, onde $p \in u$ e $q \in v$ são representantes arbitrariamente escolhidos das classes u e v. Mostre que $\preceq$ é uma ordem parcial no conjunto quociente $P/{\sim}$.

[1]Se $\preceq$ é uma relação binária num conjunto P, então a *restrição* de $\preceq$ a um subconjunto S de P é a relação binária $\preceq_{|S}$ em S tal que $p \preceq_{|S} q \Leftrightarrow p \preceq q$, para todos $p, q \in S$.

Notação. Se $\leq$ é uma ordem parcial, escrevemos $p < q$ quando $p \leq q$ e $p \neq q$. Quando $p \leq q$ (resp., $p < q$), escrevemos também $q \geq p$ (resp., $q > p$).

Exercício 1.4. Sejam P um conjunto, $\leq$ uma ordem parcial em P e sejam $p, q \in P$. Mostre que:

$$p \leq q \iff p < q \text{ ou } p = q.$$

Definição 1.2 (cota superior, inferior, conjunto limitado)**.** Sejam P um conjunto, $\leq$ uma ordem parcial em P, S um subconjunto de P e $p \in P$. Dizemos que p é uma *cota superior* (resp., *cota inferior*) de S se $p \geq q$ (resp., $p \leq q$), para todo $q \in S$. Dizemos que S é *limitado superiormente* (resp., *limitado inferiormente*) em P se admite uma cota superior (resp., uma cota inferior) em P. Dizemos que S é *limitado* em P se for limitado superiormente e inferiormente em P. Dizemos que o conjunto parcialmente ordenado P é *limitado* (resp., *limitado superiormente*, *limitado inferiormente*) se for limitado (resp., limitado superiormente, limitado inferioriormente) em si mesmo.

Definição 1.3 (maior, menor elemento; elemento maximal, minimal)**.** Sejam P um conjunto, $\leq$ uma ordem parcial em P e $p \in P$. Dizemos que:

- p é o *maior elemento* (resp., o *menor elemento*) de P se p é uma cota superior (resp., cota inferior) de P;
- p é um *elemento maximal* (resp., um *elemento minimal*) de P se não existe $q \in P$ tal que $q > p$ (resp., tal que $q < p$).

Para subconjuntos S de um conjunto parcialmente ordenado P, as expressões "maior elemento de S", "menor elemento de S", "elemento maximal de S", "elemento minimal de S" são definidas como acima, considerando em S a ordem parcial induzida pela ordem parcial de P (vide Exercício 1.1).

Exercício 1.5. Mostre que um conjunto parcialmente ordenado possui no máximo um maior elemento e no máximo um menor elemento.

Definição 1.4 (supremo, ínfimo)**.** Sejam P um conjunto parcialmente ordenado e S um subconjunto de P. O *supremo* (resp., *ínfimo*) de S em P é, se existir, o menor elemento do conjunto das cotas superiores de S em P (resp., o maior elemento do conjunto das cotas inferiores de S em P).

Notação. Se S é um subconjunto de um conjunto parcialmente ordenado, denotamos por $\sup S$ o supremo de S e por $\inf S$ o ínfimo de S, se existirem. Dados elementos p e q de um conjunto parcialmente ordenado, denotamos por $p \vee q$ o supremo do conjunto $\{p, q\}$ e por $p \wedge q$ o ínfimo do conjunto $\{p, q\}$, se existirem.

Exercício 1.6. Sejam P um conjunto parcialmente ordenado e S um subconjunto de P. Mostre que se S tem um maior (resp., menor) elemento, então ele é o supremo (resp., ínfimo) de S em P.

Exercício 1.7. Seja P um conjunto parcialmente ordenado. Mostre que o supremo em P (resp., o ínfimo em P) do conjunto vazio é, se existir, o menor (resp., o maior) elemento de P.

Definição 1.5 (reticulado)**.** Um conjunto parcialmente ordenado P é dito um *reticulado* se, para quaisquer $p, q \in P$, existem o supremo $p \vee q$ e o ínfimo $p \wedge q$.

Exercício 1.8. Seja P um reticulado. Mostre que:

$$(p \vee q) \vee r = \sup\{p, q, r\} = p \vee (q \vee r), \quad (p \wedge q) \wedge r = \inf\{p, q, r\} = p \wedge (q \wedge r),$$

para todos $p, q, r \in P$. Conclua que as operações binárias $\vee$ e $\wedge$ são associativas e comutativas.

Exercício 1.9. Mostre que, num reticulado, todo subconjunto finito não vazio possui supremo e ínfimo.

Exercício 1.10. Seja P um reticulado munido de uma ordem parcial $\le$. Mostre que, para todos $p, q \in P$, vale que:

$$p \vee q = q \Longleftrightarrow p \le q \Longleftrightarrow p \wedge q = p.$$

Exercício 1.11. Seja P um reticulado munido de uma ordem parcial $\le$. Dados $p_1, p_2, q_1, q_2 \in P$ com $p_1 \le p_2$ e $q_1 \le q_2$, mostre que:

$$p_1 \wedge q_1 \le p_2 \wedge q_2 \quad \text{e} \quad p_1 \vee q_1 \le p_2 \vee q_2.$$

Exercício 1.12. Seja P um reticulado. Mostre que as duas condições abaixo são equivalentes:

(1) $p \vee (q \wedge r) = (p \vee q) \wedge (p \vee r)$, para todos $p, q, r \in P$;

(2) $p \wedge (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$, para todos $p, q, r \in P$.

(Sugestão: para provar (2) assumindo (1), note que de (1) segue que

$$(p \wedge q) \vee (p \wedge r) = (p \vee p) \wedge (p \vee r) \wedge (q \vee p) \wedge (q \vee r),$$

para todos $p, q, r \in P$.)

Definição 1.6 (reticulado distributivo)**.** Um reticulado P é dito *distributivo* quando satisfaz uma das (e portanto ambas as) condições equivalentes no enunciado do Exercício 1.12.

Exercício 1.13. Seja P um conjunto munido de uma ordem parcial $\le$. Dizemos que a ordem parcial $\le$ é *total* (e que P é *totalmente ordenado*) se para todos $p, q \in P$ temos $p \le q$ ou $q \le p$. Mostre que se a ordem $\le$ é total, então P é um reticulado distributivo.

Exercício 1.14. Sejam X um conjunto e $\wp(X)$ o conjunto de todas as partes de X. Mostre que a relação binária $\le$ em $\wp(X)$ definida por:

$$A \le B \Longleftrightarrow A \subset B, \quad A, B \in \wp(X) \tag{1.1}$$

é uma ordem parcial e que, munido dela, $\wp(X)$ é um reticulado distributivo em que:

$$A \vee B = A \cup B, \quad A \wedge B = A \cap B,$$

para todos $A, B \in \wp(X)$. Quando dizemos que $\wp(X)$ (resp., algum subconjunto de $\wp(X)$) está *parcialmente ordenado por inclusão* estamos nos referindo à ordem parcial (1.1) (resp., à sua restrição ao subconjunto dado de $\wp(X)$).

Exercício 1.15. Sejam V um espaço vetorial e considere a coleção $\mathfrak{S}(V)$ de todos os subespaços de V, parcialmente ordenada por inclusão. Mostre que $\mathfrak{S}(V)$ é um reticulado em que:

$$W_1 \vee W_2 = W_1 + W_2, \quad W_1 \wedge W_2 = W_1 \cap W_2,$$

para todos $W_1, W_2 \in \mathfrak{S}(V)$. Mostre que se $\dim(V) \geq 2$, então o reticulado $\mathfrak{S}(V)$ não é distributivo. Note que a operação $\vee$ do reticulado $\mathfrak{S}(V)$ não coincide com a restrição da operação $\vee$ do reticulado $\wp(V)$, embora a ordem parcial de $\mathfrak{S}(V)$ seja a restrição da ordem parcial de $\wp(V)$.

Definição 1.7 (complemento)**.** Seja P um reticulado limitado (vide Definição 1.2) e denote por 0 e 1 seu menor e maior elemento, respectivamente. Dado $p \in P$, dizemos que $q \in P$ é um *complemento* para p em P se $p \wedge q = 0$ e $p \vee q = 1$. Dizemos que o reticulado limitado P é *complementado* se todo elemento de P possui um complemento em P.

Exercício 1.16. Mostre que num reticulado limitado em que a ordem é total (vide Exercício 1.13), os únicos elementos que admitem um complemento são o menor e o maior elemento do reticulado.

Exercício 1.17. Seja P um reticulado limitado distributivo munido de uma ordem parcial $\leq$ e denote por 0 o seu menor elemento. Dados $p \in P$ e um complemento q de p em P, mostre que:

$$r \wedge p = 0 \Longleftrightarrow r \leq q,$$

para todo $r \in P$. Conclua que num reticulado limitado distributivo, todo elemento possui *no máximo um* complemento. Note que o reticulado do Exercício 1.15 é complementado, mas em geral um elemento pode ter mais de um complemento.

Definição 1.8 (álgebra de Boole)**.** Uma *álgebra de Boole* é um reticulado limitado, distributivo e complementado. Numa álgebra de Boole qualquer, denotamos por $\leq$ sua ordem parcial e por 0 e 1 seu menor e maior elemento, respectivamente. O único complemento de um elemento p da álgebra (vide Exercício 1.17) é denotado por p'.

Exercício 1.18. Denote por 2 o conjunto $\{0, 1\}$ munido da relação binária $\leq$ tal que valem

$$0 \leq 0, \quad 0 \leq 1, \quad 1 \leq 1$$

e não vale $1 \leq 0$. Mostre que 2, munido de $\leq$, é uma álgebra de Boole.

Exercício 1.19. Mostre que o reticulado distributivo $\wp(X)$ definido no Exercício 1.14 é uma álgebra de Boole em que $0 = \emptyset$, $1 = X$ e $A' = X \setminus A$, para todo $A \in \wp(X)$.

Exercício 1.20. Seja $\mathcal{B}$ uma álgebra de Boole. Mostre que:

- $0' = 1$ e $1' = 0$;
- $p'' = p$, para todo $p \in \mathcal{B}$;
- $p \wedge q = 0$ se, e somente se, $p \leq q'$, para todos $p, q \in \mathcal{B}$ (isso é um caso particular do resultado do Exercício 1.17);
- $p \leq q$ se, e somente se, $q' \leq p'$, para todos $p, q \in \mathcal{B}$;
- $(p \vee q)' = p' \wedge q'$, para todos $p, q \in \mathcal{B}$;
- $(p \wedge q)' = p' \vee q'$, para todos $p, q \in \mathcal{B}$.

Definição 1.9 ($\setminus$, $\triangle$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$)**.** Definimos as operações binárias $\setminus$, $\triangle$, $\rightarrow$ e $\leftrightarrow$ numa álgebra de Boole $\mathcal{B}$ fazendo:

- $p \setminus q = p \wedge q'$,
- $p \triangle q = (p \setminus q) \vee (q \setminus p)$,
- $p \rightarrow q = p' \vee q$,
- $p \leftrightarrow q = (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$,

para todos $p, q \in \mathcal{B}$.

Exercício 1.21. Seja $\mathcal{B}$ uma álgebra de Boole. Mostre que:

- $(p \rightarrow q)' = p \setminus q$, para todos $p, q \in \mathcal{B}$;
- $(p \leftrightarrow q)' = p \triangle q$, para todos $p, q \in \mathcal{B}$;
- $p \setminus q = 0$ se, e somente se, $p \leq q$, para todos $p, q \in \mathcal{B}$;
- $p \triangle q = 0$ se, e somente se, $p = q$, para todos $p, q \in \mathcal{B}$;
- $p \rightarrow q = 1$ se, e somente se, $p \leq q$, para todos $p, q \in \mathcal{B}$;
- $p \leftrightarrow q = 1$ se, e somente se, $p = q$, para todos $p, q \in \mathcal{B}$;
- $p \leq q \rightarrow r$ se, e somente se, $p \wedge q \leq r$, para todos $p, q, r \in \mathcal{B}$;
- $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \leq p \rightarrow r$, para todos $p, q, r \in \mathcal{B}$;
- $(p \leftrightarrow q) \wedge (q \leftrightarrow r) \leq p \leftrightarrow r$, para todos $p, q, r \in \mathcal{B}$;
- $p \setminus r \leq (p \setminus q) \vee (q \setminus r)$, para todos $p, q, r \in \mathcal{B}$;
- $p \triangle r \leq (p \triangle q) \vee (q \triangle r)$, para todos $p, q, r \in \mathcal{B}$;
- $(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r) \leq (p \vee q) \rightarrow r$, para todos $p, q, r \in \mathcal{B}$;
- $(r \rightarrow p) \wedge (r \rightarrow q) \leq r \rightarrow (p \wedge q)$, para todos $p, q, r \in \mathcal{B}$.

Definição 1.10 (homomorfismo de álgebras de Boole)**.** Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ álgebras de Boole. Uma função $\phi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ é dita um *homomorfismo* se valem as seguintes condições:

- $\phi(p \vee q) = \phi(p) \vee \phi(q)$, para todos $p, q \in \mathcal{A}$;
- $\phi(p') = \phi(p)'$, para todo $p \in \mathcal{A}$.

Notação. Dadas álgebras de Boole $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$, denotamos por $\mathrm{Hom}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ o conjunto de todos os homomorfismos $\phi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$.

Exercício 1.22. Se $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ são álgebras de Boole e $\phi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ é um homomorfismo bijetor, mostre que ϕ^{-1} também é um homomorfismo.

Definição 1.11 (isomorfismo de álgebras de Boole)**.** Um homomorfismo bijetor entre álgebras de Boole é chamado um *isomorfismo*. Quando existe um isomorfismo entre duas álgebras de Boole, elas são ditas *isomorfas*.

Exercício 1.23. Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ álgebras de Boole e seja $\phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ um homomorfismo. Mostre que:

- $\phi(p \wedge q) = \phi(p) \wedge \phi(q)$, para todos $p, q \in \mathcal{A}$;
- $\phi(0) = 0$ e $\phi(1) = 1$;
- se $p \leq q$, então $\phi(p) \leq \phi(q)$, para todos $p, q \in \mathcal{A}$;
- $\phi(p \setminus q) = \phi(p) \setminus \phi(q)$, para todos $p, q \in \mathcal{A}$;
- $\phi(p \bigtriangleup q) = \phi(p) \bigtriangleup \phi(q)$, para todos $p, q \in \mathcal{A}$;
- $\phi(p \to q) = \phi(p) \to \phi(q)$, para todos $p, q \in \mathcal{A}$;
- $\phi(p \leftrightarrow q) = \phi(p) \leftrightarrow \phi(q)$, para todos $p, q \in \mathcal{A}$.

Exercício 1.24. Sejam X e Y conjuntos e $f : X \to Y$ uma função. Mostre que a aplicação $f^* : \wp(Y) \to \wp(X)$ definida por:

$$f^*(A) = f^{-1}[A] = \big\{x \in X : f(x) \in A\big\},$$

para todo $A \in \wp(Y)$, é um homomorfismo entre as álgebras de Boole $\wp(Y)$ e $\wp(X)$, ambas parcialmente ordenadas por inclusão (vide Exercício 1.19).

Definição 1.12 (subálgebra)**.** Sejam $\mathcal{B}$ uma álgebra de Boole e $\mathcal{A}$ um subconjunto de $\mathcal{B}$. Dizemos que $\mathcal{A}$ é uma *subálgebra* de $\mathcal{B}$ se valem as seguintes condições:

- $\mathcal{A}$ não é vazio;
- $p \vee q \in \mathcal{A}$, para todos $p, q \in \mathcal{A}$;
- $p' \in \mathcal{A}$, para todo $p \in \mathcal{A}$;

Exercício 1.25. Sejam $\mathcal{B}$ uma álgebra de Boole e $\mathcal{A}$ uma subálgebra de $\mathcal{B}$. Mostre que:

- $p \wedge q \in \mathcal{A}$, $p \setminus q \in \mathcal{A}$, $p \bigtriangleup q \in \mathcal{A}$, $p \to q \in \mathcal{A}$ e $p \leftrightarrow q \in \mathcal{A}$, para todos $p, q \in \mathcal{A}$;
- $0 \in \mathcal{A}$ e $1 \in \mathcal{A}$;
- o conjunto $\mathcal{A}$, munido da ordem parcial induzida da ordem parcial de $\mathcal{B}$, é uma álgebra de Boole e a aplicação inclusão $i : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ é um homomorfismo.

Exercício 1.26. Mostre que a imagem de um homomorfismo de álgebras de Boole é uma subálgebra do seu contradomínio.

Definição 1.13 (ideal)**.** Seja $\mathcal{B}$ uma álgebra de Boole. Um subconjunto $\mathcal{I}$ de $\mathcal{B}$ é dito um *ideal* de $\mathcal{B}$ se valem as seguintes condições:

- $\mathcal{I}$ não é vazio;
- $p \vee q \in \mathcal{I}$, para todos $p, q \in \mathcal{I}$;
- para todos $p \in \mathcal{I}$ e $q \in \mathcal{B}$, se $q \leq p$, então $q \in \mathcal{I}$.

Definição 1.14 (filtro)**.** Seja $\mathcal{B}$ uma álgebra de Boole. Um subconjunto $\mathcal{F}$ de $\mathcal{B}$ é dito um *filtro* de $\mathcal{B}$ se valem as seguintes condições:

- $\mathcal{F}$ não é vazio;
- $p \wedge q \in \mathcal{F}$, para todos $p, q \in \mathcal{F}$;
- para todos $p \in \mathcal{F}$ e $q \in \mathcal{B}$, se $q \geq p$, então $q \in \mathcal{F}$.

Exercício 1.27. Numa álgebra de Boole $\mathcal{B}$ qualquer, mostre que $\mathcal{B}$ é ao mesmo tempo um ideal e um filtro de $\mathcal{B}$, que 0 (resp., 1) pertence a qualquer ideal (resp., filtro) de $\mathcal{B}$ e que $\{0\}$ (resp., $\{1\}$) é um ideal (resp., um filtro) de $\mathcal{B}$.

Exercício 1.28. Mostre que um ideal $\mathcal{I}$ de $\mathcal{B}$ é próprio (i.e., $\mathcal{I} \neq \mathcal{B}$) se, e somente se, $1 \notin \mathcal{I}$. Similarmente, mostre que um filtro $\mathcal{F}$ de $\mathcal{B}$ é próprio se, e somente se, $0 \notin \mathcal{F}$.

Exercício 1.29. Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ álgebras de Boole e seja $\phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ um homomorfismo. Mostre que $\phi^{-1}(0)$ é um ideal de $\mathcal{A}$ e que $\phi^{-1}(1)$ é um filtro de $\mathcal{A}$.

Exercício 1.30. Seja $\mathcal{B}$ uma álgebra de Boole. Se $\mathcal{I}$ é um ideal de $\mathcal{B}$, mostre que:

$$\mathcal{I}' = \big\{p' : p \in \mathcal{I}\big\}$$

é um filtro de $\mathcal{B}$. Similarmente, se $\mathcal{F}$ é um filtro de $\mathcal{B}$, mostre que:

$$\mathcal{F}' = \big\{p' : p \in \mathcal{F}\big\}$$

é um ideal de $\mathcal{B}$. Conclua que a aplicação $\mathcal{I} \mapsto \mathcal{I}'$ estabelece uma bijeção entre o conjunto dos ideais e o conjunto dos filtros de $\mathcal{B}$.

Definição 1.15 (base de filtro)**.** Seja $\mathcal{B}$ uma álgebra de Boole. Um subconjunto S de $\mathcal{B}$ é dito uma *base de filtro* em $\mathcal{B}$ se:

$$\mathcal{F} = \big\{p \in \mathcal{B} : \text{existe } q \in S \text{ tal que } p \geq q\big\} \tag{1.2}$$

é um filtro de $\mathcal{B}$.

Exercício 1.31. Seja $\mathcal{B}$ uma álgebra de Boole. Mostre que um subconjunto S de $\mathcal{B}$ é uma base de filtro em $\mathcal{B}$ se, e somente se, valem as seguintes condições:

- S não é vazio;
- para todos $p, q \in S$, existe $r \in S$ tal que $r \leq p \wedge q$.

Mostre também que se S é uma base de filtro em $\mathcal{B}$, então o filtro $\mathcal{F}$ definido em (1.2) é o menor filtro de $\mathcal{B}$ que contém S (i.e., $\mathcal{F}$ é um filtro de $\mathcal{B}$ que contém S e todo filtro de $\mathcal{B}$ que contém S contém $\mathcal{F}$).

Exercício 1.32. Seja $\mathcal{B}$ uma álgebra de Boole. Mostre que se M é um subconjunto qualquer de $\mathcal{B}$, então[2]:

$$S = \{1\} \cup \big\{p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n : p_1, p_2, \ldots, p_n \in M,\ n \geq 1\big\} \tag{1.3}$$

[2]Note que S é, na verdade, a coleção dos ínfimos de todos os subconjuntos finitos de M, já que 1 é o ínfimo do conjunto vazio.

é uma base de filtro em $\mathcal{B}$. Mostre também que se $\mathcal{F}$ é definido a partir de S como em (1.2), então $\mathcal{F}$ é o menor filtro de $\mathcal{B}$ que contém M.

Exercício 1.33. Sejam $\mathcal{B}$ uma álgebra de Boole e $\mathcal{F}$ um filtro de $\mathcal{B}$. Considere a relação binária $\leq_{\mathcal{F}}$ em $\mathcal{B}$ definida por:

$$p \leq_{\mathcal{F}} q \Longleftrightarrow p \to q \in \mathcal{F},$$

para todos $p, q \in \mathcal{B}$. Mostre que $\leq_{\mathcal{F}}$ é uma pré-ordem em $\mathcal{B}$ e que a relação de equivalência $\sim_{\mathcal{F}}$ em $\mathcal{B}$ definida a partir de $\leq_{\mathcal{F}}$ como no Exercício 1.2 é dada por:

$$p \sim_{\mathcal{F}} q \Longleftrightarrow p \leftrightarrow q \in \mathcal{F},$$

para todos $p, q \in \mathcal{B}$. Mostre também que:

$$p \leq q \Longrightarrow p \leq_{\mathcal{F}} q,$$

para todos $p, q \in \mathcal{B}$.

Exercício 1.34. Sejam $\mathcal{B}$ uma álgebra de Boole e $\mathcal{F}$ um filtro de $\mathcal{B}$. Considere a pré-ordem $\leq_{\mathcal{F}}$ e a relação de equivalência $\sim_{\mathcal{F}}$ em $\mathcal{B}$ definidas no Exercício 1.33. Denote por $\preceq_{\mathcal{F}}$ a ordem parcial no conjunto quociente $\mathcal{B}/{\sim_{\mathcal{F}}}$ definida a partir da pré-ordem $\leq_{\mathcal{F}}$ como no Exercício 1.3. Mostre que $\mathcal{B}/{\sim_{\mathcal{F}}}$, munido de $\preceq_{\mathcal{F}}$, é uma álgebra de Boole e que a aplicação quociente

$$\mathfrak{q} : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{B}/{\sim_{\mathcal{F}}}$$

é um homomorfismo tal que $\mathfrak{q}^{-1}(1) = \mathcal{F}$. Mostre também que, para quaisquer $u, v \in \mathcal{B}/{\sim_{\mathcal{F}}}$, temos $u \preceq_{\mathcal{F}} v$ se, e somente se, existem $p \in u$ e $q \in v$ tais que $p \leq q$. (Sugestão para a última parte: se $u \preceq_{\mathcal{F}} v$, $p \in u$ e $q \in v$, verifique que $p \wedge q \in u$.)

Definição 1.16 (ideal maximal, ultrafiltro)**.** Seja $\mathcal{B}$ uma álgebra de Boole. Um *ideal maximal* de $\mathcal{B}$ é um ideal próprio $\mathcal{I}$ de $\mathcal{B}$ que não está contido em nenhum ideal próprio de $\mathcal{B}$ diferente de $\mathcal{I}$. Um *ultrafiltro* de $\mathcal{B}$ é um filtro próprio $\mathcal{F}$ de $\mathcal{B}$ que não está contido em nenhum filtro próprio de $\mathcal{B}$ diferente de $\mathcal{F}$.

Exercício 1.35. Sejam $\mathcal{B}$ uma álgebra de Boole, $\mathcal{I}$ um ideal de $\mathcal{B}$ e $\mathcal{I}'$ o filtro de $\mathcal{B}$ definido como no Exercício 1.30. Mostre que $\mathcal{I}$ é um ideal maximal de $\mathcal{B}$ se, e somente se, $\mathcal{I}'$ é um ultrafiltro de $\mathcal{B}$.

Definição 1.17 (PIF)**.** Seja $\mathcal{B}$ uma álgebra de Boole. Dizemos que um subconjunto M de $\mathcal{B}$ possui a *propriedade da interseção finita* (PIF) se 0 não pertence ao conjunto S definido[3] em (1.3).

Exercício 1.36. Sejam $\mathcal{B}$ uma álgebra de Boole, $\mathcal{F}$ um filtro de $\mathcal{B}$ e $p \in \mathcal{B}$. Mostre que $\mathcal{F} \cup \{p\}$ tem PIF se, e somente se, $p' \notin \mathcal{F}$.

[3]Note que 1 sempre pertence a S, de modo que se $1 = 0$, então nenhum subconjunto M de $\mathcal{B}$ (nem o vazio!) tem PIF. Note também que a igualdade $1 = 0$ só vale na álgebra de Boole trivial $\mathcal{B} = \{0\} = \{1\}$ que tem um único elemento.

Exercício 1.37. Sejam $\mathcal{B}$ uma álgebra de Boole e M um subconjunto de $\mathcal{B}$. Mostre que:

(a) M está contido em algum filtro próprio de $\mathcal{B}$ se, e somente se, M tem PIF;

(b) todo filtro próprio de $\mathcal{B}$ está contido em algum ultrafiltro de $\mathcal{B}$;

(c) M está contido em algum ultrafiltro de $\mathcal{B}$ se, e somente se, M tem PIF.

(Sugestão: para mostrar o item (b), use o Lema de Zorn e o resultado do Exercício 1.28.)

Exercício 1.38. Seja $\mathcal{B}$ uma álgebra de Boole. Mostre que um filtro $\mathcal{F}$ de $\mathcal{B}$ é um ultrafiltro se, e somente se, para todo $p \in \mathcal{B}$, temos que ou p ou p' está em $\mathcal{F}$, mas não ambos. (Sugestão: use o resultado do Exercício 1.36 e o resultado do item (a) do Exercício 1.37.) Similarmente, mostre que um ideal $\mathcal{I}$ de $\mathcal{B}$ é maximal se, e somente se, para todo $p \in \mathcal{B}$, temos que ou p ou p' está em $\mathcal{I}$, mas não ambos. (Sugestão: use o resultado do Exercício 1.35.) Conclua que se $\mathcal{F}$ é um ultrafiltro de $\mathcal{B}$, então o ideal $\mathcal{F}'$ definido no Exercício 1.30 é o complementar de $\mathcal{F}$ em $\mathcal{B}$.

Exercício 1.39. Seja $\mathcal{B}$ uma álgebra de Boole e considere a álgebra de Boole 2 definida no Exercício 1.18. Mostre que se $\phi : \mathcal{B} \to 2$ é um homomorfismo, então $\phi^{-1}(1)$ é um ultrafiltro de $\mathcal{B}$ e $\phi^{-1}(0)$ é um ideal maximal de $\mathcal{B}$. Reciprocamente, se $\mathcal{F}$ é um ultrafiltro de $\mathcal{B}$, mostre que a *função característica de* $\mathcal{F}$, i.e., a função $\chi_{\mathcal{F}} : \mathcal{B} \to 2$ definida por:

$$\chi_{\mathcal{F}}(p) = \begin{cases} 1, & \text{se } p \in \mathcal{F}, \\ 0, & \text{se } p \notin \mathcal{F}, \end{cases}$$

é um homomorfismo.

Definição 1.18 (anel)**.** Um *anel* é um conjunto R, munido de operações binárias:

$$R \times R \ni (r,s) \longmapsto r + s \in R, \quad R \times R \ni (r,s) \longmapsto rs \in R,$$

satisfazendo as seguintes condições:

(1) $(r+s)+t = r+(s+t)$, para todos $r,s,t \in R$;

(2) $r+s = s+r$, para todos $r,s \in R$;

(3) existe um (automaticamente único) elemento $0 \in R$ tal que
$$r + 0 = 0 + r = r,$$
para todo $r \in R$;

(4) para todo $r \in R$, existe um (sob a condição (1), automaticamente único) elemento $-r \in R$ tal que $r + (-r) = (-r) + r = 0$, sendo 0 definido na condição (3);

(5) $(rs)t = r(st)$, para todos $r,s,t \in R$;

(6) $(r+s)t = rt + st$ e $t(r+s) = tr + ts$, para todos $r,s,t \in R$.

O anel R é dito *comutativo* se

$$rs = sr,$$

para todos $r, s \in R$ e é dito um *anel com unidade* se existe um (automaticamente único) elemento $1 \in R$ tal que

$$r1 = 1r = r,$$

para todo $r \in R$.

Definição 1.19 (anel booleano)**.** Um anel R é dito *booleano* se

$$r^2 = r,$$

para todo $r \in R$, onde $r^2 = rr$.

Exercício 1.40. Mostre que se R é um anel booleano, então $-r = r$, para todo $r \in R$.

Exercício 1.41. Mostre que todo anel booleano é comutativo. (Sugestão: use $(r+s)^2 = r + s$.)

Exercício 1.42. Seja R um anel booleano e defina uma relação binária $\leq$ em R fazendo:

$$r \leq s \Longleftrightarrow r = rs,$$

para todos $r, s \in R$. Mostre que $\leq$ é uma ordem parcial em R e que R, munido dessa ordem parcial, é um reticulado distributivo em que:

$$r \vee s = r + s + rs, \quad r \wedge s = rs,$$

para todos $r, s \in R$.

Exercício 1.43. Mostre que se R é um anel booleano com unidade, então R, munido da ordem parcial definida no Exercício 1.42, é uma álgebra de Boole em que o elemento 0 do anel R é o menor elemento da álgebra, o elemento 1 do anel R é o maior elemento da álgebra,

$$r' = 1 + r,$$

para todo $r \in R$ e

$$r + s = r \bigtriangleup s,$$

para todos $r, s \in R$. Reciprocamente, mostre que se $\mathcal{B}$ é uma álgebra de Boole, então $\mathcal{B}$, munida das operações binárias definidas por:

$$\mathcal{B} \times \mathcal{B} \ni (p, q) \longmapsto p + q = p \bigtriangleup q \in \mathcal{B}, \quad \mathcal{B} \times \mathcal{B} \ni (p, q) \longmapsto pq = p \wedge q \in \mathcal{B},$$

é um anel booleano com unidade em que

$$p \leq q \Longleftrightarrow p = pq,$$

para todos $p, q \in \mathcal{B}$. (Sugestão: para mostrar que $\bigtriangleup$ é associativa, verifique que:

$$(p \bigtriangleup q) \bigtriangleup r = (p \wedge q' \wedge r') \vee (p' \wedge q \wedge r') \vee (p' \wedge q' \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge r),$$

para todos $p, q, r \in \mathcal{B}$.)

Definição 1.20 (ideal de um anel)**.** Seja R um anel. Um subconjunto I de R é dito um *ideal* se valem as seguintes condições:

- I não é vazio;
- $r + s \in I$, para todos $r, s \in I$;
- $-r \in I$, para todo $r \in I$;
- para todos $r, s \in R$, se $r \in I$ ou $s \in I$, então $rs \in I$.

Exercício 1.44. Seja $\mathcal{B}$ uma álgebra de Boole e defina operações em $\mathcal{B}$ que a tornam um anel booleano com unidade, como no Exercício 1.43. Mostre que um subconjunto $\mathcal{I}$ de $\mathcal{B}$ é um ideal da álgebra de Boole $\mathcal{B}$ se, e somente se, $\mathcal{I}$ é um ideal do anel $\mathcal{B}$.

Definição 1.21 (homomorfismo de anéis)**.** Sejam R e S anéis. Uma função $\phi : R \to S$ é dita um *homomorfismo de anéis* se valem as seguintes condições:

- $\phi(r_1 + r_2) = \phi(r_1) + \phi(r_2)$, para todos $r_1, r_2 \in R$;
- $\phi(r_1 r_2) = \phi(r_1)\phi(r_2)$, para todos $r_1, r_2 \in R$.

Se R e S são anéis com unidade, dizemos que $\phi : R \to S$ é um *homomorfismo de anéis com unidade* se ϕ é um homomorfismo de anéis e $\phi(1) = 1$.

Exercício 1.45. Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ álgebras de Boole e defina operações em $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ tornando-as anéis booleanos com unidade, como no Exercício 1.43. Mostre que uma função $\phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ é um homomorfismo de álgebras de Boole se, e somente se, é um homomorfismo de anéis com unidade.

2. Espaços booleanos e a dualidade de Stone

Definição 2.1 (clopen)**.** Um subconjunto de um espaço topológico X é dito *clopen* em X se for ao mesmo tempo aberto e fechado em X.

Notação. Denotamos por $\mathrm{Clop}(X)$ a coleção de todos os clopens de um espaço topológico X.

Exercício 2.1. Seja X um espaço topológico e considere a álgebra de Boole $\wp(X)$, parcialmente ordenada por inclusão. Mostre que $\mathrm{Clop}(X)$ é uma subálgebra de $\wp(X)$.

Definição 2.2 (espaço zero-dimensional)**.** Um espaço topológico X é dito *zero-dimensional* se $\mathrm{Clop}(X)$ é uma base de abertos de X. Assim, X é zero-dimensional se, e somente se, para todo aberto U de X e todo ponto $p \in U$, existe um clopen C de X com $p \in C \subset U$.

Definição 2.3 (espaço booleano)**.** Um espaço topológico é dito *booleano* se for compacto, Hausdorff e zero-dimensional.

Exercício 2.2. Mostre que:

- um conjunto finito, munido da topologia discreta, é um espaço booleano;

- um subconjunto fechado de um espaço booleano, munido da topologia induzida, é um espaço booleano;
- o produto de uma família arbitrária de espaços booleanos, munido da topologia produto, é um espaço booleano.

Notação. Dados conjuntos X e Y, denotamos por Y^X o conjunto de todas as funções $f : X \to Y$. Note que Y^X é precisamente o produtório da família de conjuntos indexada em X, em que todos os membros são iguais a Y, i.e., $Y^X = \prod_{x \in X} Y_x$, com $Y_x = Y$, para todo $x \in X$.

Exercício 2.3. Seja $\mathcal{B}$ uma álgebra de Boole e considere o conjunto $2^{\mathcal{B}}$, munido da topologia produto, em que $2 = \{0, 1\}$ é munido da topologia discreta. Se 2 é munido da ordem parcial definida no Exercício 1.18, mostre que $\mathrm{Hom}(\mathcal{B}, 2)$ é um subconjunto fechado de $2^{\mathcal{B}}$. Conclua (usando o resultado do Exercício 2.2) que $\mathrm{Hom}(\mathcal{B}, 2)$, munido da topologia induzida de $2^{\mathcal{B}}$, é um espaço Booleano.

Definição 2.4 (espaço de Stone)**.** Dada uma álgebra de Boole $\mathcal{B}$, o espaço Booleano $\mathrm{Hom}(\mathcal{B}, 2)$, munido da topologia definida no Exercício 2.3, é chamado o *espaço de Stone* de $\mathcal{B}$ e é denotado por $\mathrm{Stone}(\mathcal{B})$.

Exercício 2.4. Seja $\mathcal{B}$ uma álgebra de Boole e considere a bijeção:

$$\wp(\mathcal{B}) \ni S \longmapsto \chi_S \in 2^{\mathcal{B}}$$

que associa a cada subconjunto S de $\mathcal{B}$ a sua função característica χ_S. Conclua a partir do resultado do Exercício 1.39 que essa bijeção se restringe a uma bijeção entre o conjunto de todos os ultrafiltros de $\mathcal{B}$ e $\mathrm{Hom}(\mathcal{B}, 2)$.

Exercício 2.5. Seja $\mathcal{B}$ uma álgebra de Boole. Dado $p \in \mathcal{B}$, denote por p^* o subconjunto de $\mathrm{Stone}(\mathcal{B})$ definido por:

$$p^* = \big\{\phi \in \mathrm{Hom}(\mathcal{B}, 2) : \phi(p) = 1\big\}.$$

Mostre que p^* é um clopen de $\mathrm{Stone}(\mathcal{B})$.

Exercício 2.6. Seja $\mathcal{B}$ uma álgebra de Boole e considere a função (vide Exercício 2.5):

$$\mathcal{B} \ni p \longmapsto p^* \in \mathrm{Clop}\big(\mathrm{Stone}(\mathcal{B})\big). \tag{2.1}$$

Mostre que:

(a) (2.1) é um homomorfismo;

(b) dados $p, q \in \mathcal{B}$, se $p^* \subset q^*$, então $p \le q$;

(c) (2.1) é injetora;

(d) (2.1) é sobrejetora.

Conclua que (2.1) é um isomorfismo. (Sugestão para o item (b): se não vale $p \le q$, então existe um ultrafiltro $\mathcal{F}$ de $\mathcal{B}$ com $p \setminus q \in \mathcal{F}$, pelo resultado do Exercício 1.37. Sugestão para o item (d): por compacidade, todo clopen de $\mathrm{Stone}(\mathcal{B})$ é uma união finita de abertos básicos, que são dados por interseções finitas de conjuntos da forma p^* e seus complementares. Use o item (a) para concluir que a imagem de (2.1) é uma subálgebra de $\mathrm{Clop}\big(\mathrm{Stone}(\mathcal{B})\big)$.)

Exercício 2.7. Seja X um espaço topológico. Dado $x \in X$, considere a aplicação $\phi_x : \mathrm{Clop}(X) \to 2$ definida por:

$$\phi_x(C) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in C, \\ 0, & \text{se } x \notin C, \end{cases}$$

para todo $C \in \mathrm{Clop}(X)$. Mostre que:

(a) $\phi_x \in \mathrm{Stone}\big(\mathrm{Clop}(X)\big)$, isto é, ϕ_x é um homomorfismo, para todo x em X;

(b) a aplicação

$$X \ni x \longmapsto \phi_x \in \mathrm{Stone}\big(\mathrm{Clop}(X)\big) \tag{2.2}$$

é contínua;

(c) se X é Hausdorff[4] e zero-dimensional, então a aplicação (2.2) é injetora;

(d) se X é compacto, então a aplicação (2.2) é sobrejetora;

(e) se X é booleano, então a aplicação (2.2) é um homeomorfismo.

(Sugestão para o item (d): dado um homomorfismo $\phi : \mathrm{Clop}(X) \to 2$, considere o ultrafiltro $\mathcal{F} = \phi^{-1}(1)$ de $\mathrm{Clop}(X)$. Note que $\mathcal{F}$ é uma família de fechados com a propriedade da interseção finita no espaço compacto X e portanto existe um ponto x na interseção $\bigcap_{C \in \mathcal{F}} C$.)

[4] Na verdade, basta assumir que X satisfaz o axioma de separação T0. Mas, para espaços zero-dimensionais, é fácil ver que T0 implica Hausdorff.