Nona Lista

MAT5798 – Medida e Integração

Prof. Daniel Victor Tausk
07/06/2018

Esta lista de exercícios não faz parte da matéria da prova.

Exercício 1. Sejam $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida, $\bar{\mu} : \overline{\mathcal{A}} \to [0, +\infty]$ o completamento da medida μ e $(Y, \mathcal{B})$ um espaço mensurável. Suponha que a σ-álgebra $\mathcal{B}$ admita um conjunto de geradores enumerável (esse é o caso, por exemplo, se Y for um espaço topológico com base enumerável de abertos e $\mathcal{B}$ for a σ-álgebra de Borel de Y). Dada uma função mensurável $f : (X, \overline{\mathcal{A}}) \to (Y, \mathcal{B})$, mostre que existe $X' \in \mathcal{A}$ com $\mu(X \setminus X') = 0$ tal que $f|_{X'} : (X', \mathcal{A}|_{X'}) \to (Y, \mathcal{B})$ seja mensurável. (Sugestão: seja $\big\{B_k : k \geq 1\big\}$ um conjunto de geradores de $\mathcal{B}$ e para cada k escreva $f^{-1}[B_k] = A_k \cup N_k$, com $A_k \in \mathcal{A}$, $N_k \subset M_k$, $M_k \in \mathcal{A}$ e $\mu(M_k) = 0$. Tome X' igual ao complementar de $\bigcup_{k=1}^{\infty} M_k$ e mostre que $(f|_{X'})^{-1}[B_k] \in \mathcal{A}$, para todo k.) Conclua que existe uma função mensurável $g : (X, \mathcal{A}) \to (Y, \mathcal{B})$ tal que $f(x) = g(x)$ para $\bar{\mu}$-quase todo $x \in X$. (Sugestão: tome $g|_{X'} = f|_{X'}$ e $g|_{X \setminus X'}$ constante.)

Exercício 2. Sejam $(X, \mathcal{A}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ espaços de medida tais que as medidas μ e ν sejam σ-finitas. Dado $M \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ com $(\mu \times \nu)(M) = 0$, mostre que $\nu(M_x) = 0$ para μ-quase todo $x \in X$, em que:

$$M_x = \big\{y \in Y : (x, y) \in M\big\}.$$

(Sugestão: $(\mu \times \nu)(M) = \int_X \nu(M_x)\, \mathrm{d}\mu(x)$. Use o resultado do Exercício 6 da sexta lista.)

Exercício 3. Sejam $(X, \mathcal{A}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ espaços de medida tais que as medidas μ e ν sejam σ-finitas e completas. Considere o completamento

$$\overline{\mu \times \nu} : \overline{\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}} \longrightarrow [0, +\infty]$$

da medida produto $\mu \times \nu$. Seja $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ uma função quase integrável com respeito a $\overline{\mu \times \nu}$. Mostre que para μ-quase todo $x \in X$ a função

$$Y \ni y \longmapsto f(x, y) \in \overline{\mathbb{R}}$$

é quase integrável e que vale a igualdade:

$$\int_{X \times Y} f \, \mathrm{d}\overline{\mu \times \nu} = \int_X \Big(\int_Y f(x, y) \, \mathrm{d}\nu(y) \Big) \, \mathrm{d}\mu(x),$$

em que (como é usual) o valor de $\int_Y f(x, y) \, \mathrm{d}\nu(y)$ é substituído por qualquer elemento de $\overline{\mathbb{R}}$ no lado direito da igualdade acima para aqueles $x \in X$ no conjunto de medida nula para os quais essa integral não está bem-definida. (Sugestão: pelo resultado do Exercício 1, existe uma função mensurável $g : (X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}) \to \overline{\mathbb{R}}$ tal que o conjunto dos pontos de $X \times Y$ em que f e g diferem está contido num conjunto $M \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ com $(\mu \times \nu)(M) = 0$. Aplique o Teorema de Fubini–Tonelli para g e use o resultado do Exercício 2 para concluir que para quase todo $x \in X$, as funções $y \mapsto f(x, y)$ e $y \mapsto g(x, y)$ são iguais quase sempre. Use também o resultado do Exercício 8 da sexta lista.)

Exercício 4. Sejam $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida e $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ uma função mensurável. Dizemos que $c \in \overline{\mathbb{R}}$ é uma *cota superior essencial* para f se $f(x) \leq c$ para quase todo $x \in X$. Definimos:

$$\|f\|_\infty = \inf \big\{ c \in [0, +\infty] : c \text{ é uma cota superior essencial para } |f| \big\}.$$

Mostre que o ínfimo que aparece na igualdade acima é na verdade um mínimo, i.e., mostre que $\|f\|_\infty$ é uma cota superior essencial para $|f|$.

Exercício 5. Seja $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida e sejam $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ e $g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ funções mensuráveis. Mostre que:

(a) $\|f\|_\infty \geq 0$ e vale que $\|f\|_\infty = 0$ se, e somente, $f(x) = 0$ para quase todo $x \in X$.

(b) $\|\lambda f\|_\infty = |\lambda| \|f\|_\infty$, para todo $\lambda \in \overline{\mathbb{R}}$.

(c) $\|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$, se a função $f + g$ estiver bem-definida.

Exercício 6. Sejam $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida e $(f_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de funções mensuráveis $f_n : X \to \mathbb{R}$. Mostre que:

(a) se $f : X \to \mathbb{R}$ é uma função mensurável, então
$$\lim_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$$
se, e somente se, existe $X' \in \mathcal{A}$ com $\mu(X \setminus X') = 0$ tal que $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformemente para f em X'.

(b) $\lim_{n,m\to+\infty} \|f_n - f_m\|_\infty = 0$ se, e somente se, existe $X' \in \mathcal{A}$ com $\mu(X \setminus X') = 0$ tal que $(f_n)_{n\geq 1}$ é uniformemente de Cauchy em X'.

(c) se $\lim_{n,m\to+\infty} \|f_n - f_m\|_\infty = 0$, então existe uma função mensurável $f : X \to \mathbb{R}$ tal que $\lim_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$. (Sugestão: toda sequência uniformemente de Cauchy converge uniformemente.)

Exercício 7. Sejam $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida e $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ uma função mensurável. Mostre que:
$$\liminf_{p\to+\infty} \|f\|_p \geq \|f\|_\infty.$$
(Sugestão: se $0 < c < \|f\|_\infty$, então o conjunto
$$A = \big\{x \in X : |f(x)| > c\big\}$$
tem medida positiva. Verifique que $\|f\|_p \geq c\,\mu(A)^{\frac{1}{p}}$, para todo $p \in \,]0, +\infty[$.) Agora assuma que pelos menos uma das duas seguintes condições seja satisfeita:

(i) existe $p_0 \in \,]0, +\infty[$ tal que $\|f\|_{p_0} < +\infty$;

(ii) o conjunto $X_1 = \big\{x \in X : f(x) \neq 0\big\}$ tem medida finita.

Mostre que $\limsup_{p\to+\infty} \|f\|_p \leq \|f\|_\infty$ e conclua que:
$$\lim_{p\to+\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty.$$
(Sugestão: sob (i), verifique que $\|f\|_p \leq \|f\|_\infty\,\mu(X_1)^{\frac{1}{p}}$, para todo p em $]0, +\infty[$. Sob (ii), use que
$$|f(x)|^p = |f(x)|^{p_0}|f(x)|^{p-p_0} \leq |f(x)|^{p_0}\|f\|_\infty^{p-p_0},$$
para quase todo $x \in X$ e para todo $p \in \,]p_0, +\infty[$.)