Nona Lista

MAT0311 – Cálculo Diferencial e Integral V

Prof. Daniel Victor Tausk

12/10/2013

Exercício 1. Sejam $(V, \|\cdot\|)$, $(W, \|\cdot\|')$ espaços vetoriais normados. Denote por $\mathrm{L}(V, W)$ o espaço vetorial formado por todas as transformações lineares $T : V \to W$. Denote por $\mathcal{B}(V, W)$ o subconjunto de $\mathrm{L}(V, W)$ formado pelas transformações lineares contínuas.

(a) Mostre que $\mathcal{B}(V, W)$ é um subespaço de $\mathrm{L}(V, W)$.

(b) Mostre que a igualdade:

$$\|T\| = \sup_{\|x\| \le 1} \|T(x)\|', \quad T \in \mathcal{B}(V, W),$$

define uma norma em $\mathcal{B}(V, W)$.

(c) Mostre que $\|T(x)\|' \le \|T\| \|x\|$, para todo $x \in V$ e toda $T \in \mathcal{B}(V, W)$.

(d) Dado um espaço vetorial normado $(Z, \|\cdot\|'')$ e dadas $T \in \mathcal{B}(V, W)$, $S \in \mathcal{B}(W, Z)$, mostre que $\|S \circ T\| \le \|S\| \|T\|$.

Exercício 2. Sejam (M, d), (N, d') espaços métricos e $f : M \to N$ uma função contínua. Mostre que, para todo subconjunto A de M, vale que:

$$f\big[\,\overline{A}\,\big] \subset \overline{f[A]}.$$

Conclua que se M é separável e f é sobrejetora então N é separável. (Sugestão: seja A um subconjunto enumerável denso de M.)

Exercício 3. Sejam (M_i, d_i), $i = 1, \ldots, n$, espaços métricos e considere o produto cartesiano $M = \prod_{i=1}^n M_i$ munido de uma métrica produto. Mostre que, dados $A_i \subset M_i$, $i = 1, \ldots, n$, então:

$$\overline{A_1 \times \cdots \times A_n} = \overline{A_1} \times \cdots \times \overline{A_n}.$$

Exercício 4. Sejam (M, d) um espaço métrico e N um subconjunto de M. Mostre que se $\mathcal{B}$ é uma base de abertos para M então:

$$\big\{B \cap N : B \in \mathcal{B}\big\}$$

é uma base de abertos para N munido da restrição da métrica de M. Conclua que se M possui base enumerável de abertos então N possui base enumerável de abertos.

Exercício 5. Sejam (M, d) um espaço métrico e N um subconjunto de M, munido da restrição da métrica de M. Mostre que as seguintes condições são equivalentes:

(a) N possui a propriedade de Lindelöf (i.e., toda cobertura de N por abertos de N possui uma subcobertura enumerável);

(b) para toda família $(U_i)_{i \in I}$ de subconjuntos abertos de M tal que $\bigcup_{i \in I} U_i$ contém N existe um subconjunto enumerável J de I tal que $N \subset \bigcup_{i \in J} U_i$.

Exercício 6. Seja (M, d) um espaço métrico separável. Mostre que todo subconjunto aberto de M é uma união enumerável de bolas abertas.