Nona Lista

MAT0216 – Cálculo Diferencial e Integral III

Prof. Daniel Victor Tausk

01/05/2019

Exercício 1. Sejam $f : U \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 definida num subconjunto aberto U de $\mathbb{R}^2$ e X um subconjunto Jordan mensurável de U. Escreva uma integral dupla cujo resultado seja a área do gráfico da restrição de f a X, isto é, a área da superfície:

$$\big\{\big(x, y, f(x, y)\big) : (x, y) \in X\big\}.$$

Exercício 2. Considere a região A do plano $\mathbb{R}^2$ delimitada pela elipse de equação

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

e o cilíndrico elíptico reto

$$A \times \mathbb{R} = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in A\big\}$$

cuja base é A. Calcule a área da superfície dada pela interseção de $A \times \mathbb{R}$ com o plano de equação $2x + 3y - z = 4$.

Exercício 3. Sejam $R > 0$ e $r > 0$ com $r < R$ e considere o toro obtido pela rotação em torno do eixo z do círculo C no plano xz de centro no ponto $(R, 0, 0)$ e raio r.

(a) Parametrize esse toro usando um ângulo θ que descreve a rotação em torno do eixo z e um ângulo α que parametriza o círculo C.

(b) Calcule a área desse toro.

Exercício 4. Seja $R > 0$ e considere o "hemisfério norte" H de uma esfera de raio R e centro na origem, ou seja:

$$H = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \text{ e } z \geq 0\big\}.$$

Considere uma distribuição de matéria uniforme sobre H (isto é, a densidade de massa por área é constante) com massa total $M > 0$.

(a) Escreva uma integral de superfície cujo resultado seja o momento de inércia dessa distribuição de matéria em relação ao eixo x.

(b) Calcule a integral que você escreveu no item (a).

Exercício* 5 (casquinha de tinta)**.** Seja $\sigma : U \to \mathbb{R}^3$ uma superfície parametrizada de classe C^2 definida num subconjunto aberto U de $\mathbb{R}^2$. Assuma que σ seja injetora e que os vetores $\frac{\partial\sigma}{\partial u}(u,v)$ e $\frac{\partial\sigma}{\partial v}(u,v)$ sejam linearmente independentes, para todo $(u,v) \in U$. Denote por S a imagem de σ. Defina $\vec{n} : U \to \mathbb{R}^3$ fazendo

$$\vec{n}(u,v) = \frac{\frac{\partial\sigma}{\partial u}(u,v) \wedge \frac{\partial\sigma}{\partial v}(u,v)}{\left\|\frac{\partial\sigma}{\partial u}(u,v) \wedge \frac{\partial\sigma}{\partial v}(u,v)\right\|},$$

para todo $(u,v) \in U$, de modo que $\vec{n}$ é uma aplicação de classe C^1 e $\vec{n}(u,v)$ é um vetor unitário e normal a S no ponto $\sigma(u,v)$. Considere a aplicação $\Psi : U \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ de classe C^1 definida por

$$\Psi(u,v,t) = \sigma(u,v) + t\vec{n}(u,v),$$

para todo $(u,v) \in U$ e todo $t \in \mathbb{R}$. Note que se $\varepsilon > 0$, então $\Psi\big[U \times [0,\varepsilon]\big]$ é uma "casquinha sólida" de espessura ε colocada sobre a superfície S, como se tivéssemos pintado a superfície S e a tinta usada tivesse uma pequena espessura ε. O volume dessa "casquinha sólida" é a quantidade de tinta que usamos para pintar S. O objetivo deste exercício é comparar esse volume com a área de S. Nós trabalharemos apenas com um pedaço compacto de S, pois o caso não compacto produz certas complicações. Seja então K um subconjunto compacto e Jordan mensurável de U. Daí $\sigma[K]$ é um pedaço compacto da superfície S.

(a) Calcule as derivadas parciais $\frac{\partial\Psi}{\partial u}(u,v,t)$, $\frac{\partial\Psi}{\partial v}(u,v,t)$ e $\frac{\partial\Psi}{\partial t}(u,v,t)$ num ponto $(u,v,t) \in U \times \mathbb{R}$.

(b) Dado $(u,v) \in U$, calcule o determinante da matriz Jacobiana de Ψ no ponto $(u,v,0)$. Verifique que esse determinante é diferente de zero.

(c) Seja

$$W = \big\{(u,v,t) \in U \times \mathbb{R} : \det\big(J\Psi(u,v,t)\big) \neq 0\big\}.$$

A continuidade da função $f(u,v,t) = \det\big(J\Psi(u,v,t)\big)$ implica que o conjunto W é aberto e o resultado do item (b) implica que W contém $U \times \{0\}$. Usando os resultados das Proposições 1 e 2 abaixo, conclua que existem um subconjunto aberto V de $\mathbb{R}^2$ contendo K e um escalar $r > 0$ de modo que $V \times \left]-r,r\right[$ está contido em W e de modo que Ψ seja injetora em $V \times \left]-r,r\right[$.

(d) Dado $\varepsilon \in \left]0,r\right[$, escreva uma integral tripla em $K \times [0,\varepsilon]$ cujo resultado seja o volume da "casquinha" $\Psi\big[K \times [0,\varepsilon]\big]$.

(e) Mostre que o limite

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1}{\varepsilon} \operatorname{vol}\Big(\Psi\big[K \times [0,\varepsilon]\big]\Big)$$

é igual à área da superfície $\sigma[K]$. Para isso, a Proposição 3 abaixo será útil.

As três proposições abaixo são necessárias na resolução do Exercício 5. As demonstrações usam algumas técnicas de Análise/Topologia que saem do escopo do curso de Cálculo (ainda assim coloquei elas aí, para quem conhece um pouco sobre esses assuntos).

Proposição 1. *Sejam W um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^m$, $\Psi : W \to \mathbb{R}^n$ uma função contínua e K um subconjunto compacto de W. Suponha que Ψ seja* localmente injetora*, isto é, que todo ponto de W pertence a algum aberto em que Ψ é injetora (pelo Teorema da Função Inversa essa hipótese é satisfeita, por exemplo, se Ψ for de classe C^1, $m = n$ e se a matriz Jacobiana de Ψ em qualquer ponto de W for inversível). Se Ψ for injetora em K, então existe um subconjunto aberto W' de W tal que K está contido em W' e Ψ é injetora em W'.*

Demonstração. Dado $\varepsilon > 0$, temos que o conjunto

$$W_\varepsilon = \big\{x \in \mathbb{R}^m : d(x, K) < \varepsilon\big\}$$

é aberto e contém K. Como K é compacto, o complementar de W é fechado e K é disjunto do complementar de W, temos que a distância de K ao complementar de W é positiva e daí W_ε está contido em W para $\varepsilon > 0$ menor do que essa distância. Vamos mostrar que existe $\varepsilon > 0$ tal que Ψ é injetora em W_ε. Supondo por absurdo que não, então para todo $k \geq 1$ existem dois pontos distintos $x_k, y_k \in W_{\frac{1}{k}}$ tais que $\Psi(x_k) = \Psi(y_k)$. Como as sequências $(x_k)_{k\geq 1}$ e $(y_k)_{k\geq 1}$ são limitadas, podemos encontrar subsequências $(x_{k_i})_{i\geq 1}$ e $(y_{k_i})_{i\geq 1}$ que são convergentes para pontos x e y em $\mathbb{R}^m$, respectivamente. Como $\lim_{i\to+\infty} d(x_{k_i}, K) = 0$ e $\lim_{i\to+\infty} d(y_{k_i}, K) = 0$, concluímos que $d(x, K) = d(y, K) = 0$ e portanto $x, y \in K$. Além do mais, da continuidade de Ψ vem $\lim_{i\to+\infty} \Psi(x_{k_i}) = \Psi(x)$ e $\lim_{i\to+\infty} \Psi(y_{k_i}) = \Psi(y)$ e portanto $\Psi(x) = \Psi(y)$. Do fato que Ψ é injetora em K, segue que $x = y$. Como Ψ é localmente injetora, existe um aberto contendo x em que Ψ é injetora. Mas x_{k_i} e y_{k_i} estarão ambos nesse aberto para i suficientemente grande e isso nos dá uma contradição. □

Proposição 2. *Sejam W um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$, K um subconjunto compacto de $\mathbb{R}^m$ e p um ponto de $\mathbb{R}^n$. Se $K \times \{p\}$ estiver contido em W, então existem um subconjunto aberto V de $\mathbb{R}^m$ contendo K e um escalar positivo r de modo que $V \times B(p; r) \subset W$, em que $B(p; r)$ denota a bola aberta em $\mathbb{R}^n$ de centro p e raio r.*

Demonstração. Como $K \times \{p\}$ é compacto, o complementar de W é fechado e $K \times \{p\}$ é disjunto do complementar de W, temos que a distância k de $K \times \{p\}$ ao complementar de W é positiva (estamos usando aqui a métrica Euclideana de $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^{m+n}$ para medir as distâncias). Tome $r > 0$ com $r\sqrt{2} \leq k$ e $V = \big\{x \in \mathbb{R}^m : d(x, K) < r\big\}$. Daí se $x \in V$ e $y \in B(p; r)$, então a distância de (x, y) até $K \times \{p\}$ é menor do que $r\sqrt{2}$ e portanto menor do que k. Isso implica que $(x, y) \in W$. □

Proposição 3. *Sejam K um subconjunto compacto e Jordan mensurável de $\mathbb{R}^m$, Y um subconjunto arbitrário de $\mathbb{R}^n$ e $f : K \times Y \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Temos que a função $g : Y \to \mathbb{R}$ definida por*

$$g(y) = \int_K f(x, y) \, \mathrm{d}x,$$

para todo $y \in Y$ é contínua.

Demonstração. Vamos mostrar que g é contínua num ponto arbitrário y_0 de Y. Para isso, seja dado $\varepsilon > 0$ e seja $\varepsilon' > 0$ tal que $\varepsilon' \operatorname{vol}(K) < \varepsilon$. Como a função f é contínua, temos que o conjunto

$$\big\{(x, y) \in K \times Y : |f(x, y) - f(x, y_0)| < \varepsilon'\big\} \tag{1}$$

é aberto relativamente a $K \times Y$, isto é, ele é a interseção de um aberto W de $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ com $K \times Y$. Evidentemente W contém $K \times \{y_0\}$ e portanto a Proposição 2 nos dá um $\delta > 0$ tal que $K \times B(y_0; \delta)$ está contido em W. Para todo $y \in Y$ com $\|y - y_0\| < \delta$ e todo $x \in K$ teremos então que (x, y) está em (1), isto é, $|f(x, y) - f(x, y_0)| < \varepsilon'$. Daí:

$$|g(y) - g(y_0)| \leq \int_K |f(x, y) - f(x, y_0)| \, \mathrm{d}x \leq \varepsilon' \operatorname{vol}(K) < \varepsilon. \qquad \square$$

Sugestões

Exercício 1. A função $\sigma : U \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$\sigma(x, y) = \big(x, y, f(x, y)\big),$$

para todo $(x, y) \in U$ é uma parametrização para o gráfico de f.

Exercício 2. Uma parametrização para essa superfície é obtida fazendo

$$\sigma(x, y) = (x, y, 2x + 3y - 4),$$

para todo $(x, y) \in A$.

Exercício 3. (a) Quando rodamos o ponto $(x, 0, z)$ por um ângulo θ em torno do eixo z obtemos o ponto $(x \cos\theta, x \operatorname{sen}\theta, z)$. Os pontos do círculo C são da forma $(R, 0, 0) + r(\cos\alpha, 0, \operatorname{sen}\alpha)$.

Exercício 5. (b) As colunas da matriz Jacobiana de Ψ são as derivadas parciais de Ψ. Se $\vec{z}_1, \vec{z}_2, \vec{z}_3 \in \mathbb{R}^3$ são as colunas de uma matriz real 3×3, então o determinante dessa matriz é igual ao produto misto $(\vec{z}_1 \wedge \vec{z}_2) \cdot \vec{z}_3$.

(e) Use o resultado do item (d), o Teorema de Fubini, o segundo Teorema Fundamental do Cálculo e a Proposição 3.

Respostas

Exercício 1. Se σ é definida como na sugestão, então

$$\frac{\partial\sigma}{\partial x}(x,y) = \Big(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\Big), \quad \frac{\partial\sigma}{\partial y}(x,y) = \Big(0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\Big)$$

e portanto a área do gráfico de $f|_X$ é dada pela integral:

$$\iint_X \Big\|\frac{\partial\sigma}{\partial x}(x,y) \wedge \frac{\partial\sigma}{\partial y}(x,y)\Big\| \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iint_X \Big[1 + \Big(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\Big)^2 + \Big(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\Big)^2\Big]^{\frac{1}{2}} \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Exercício 2. Se σ é definida como na sugestão, então

$$\Big\|\frac{\partial\sigma}{\partial x}(x,y) \wedge \frac{\partial\sigma}{\partial y}(x,y)\Big\| = \|(1,0,2) \wedge (0,1,3)\| = \sqrt{14}$$

e portanto a área é dada por

$$\iint_A \sqrt{14}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \sqrt{14}\ \text{área}(A) = 6\pi\sqrt{14},$$

já que os semi-eixos da elipse são 3 e 2 e a área delimitada por uma elipse de semi-eixos a e b é πab.

Exercício 3. (a) A parametrização é

$$\sigma(\alpha,\theta) = \big((R + r\cos\alpha)\cos\theta, (R + r\cos\alpha)\operatorname{sen}\theta, r\operatorname{sen}\alpha\big),$$

com $\alpha, \theta \in [0, 2\pi]$.

(b) Temos

$$\frac{\partial\sigma}{\partial\alpha}(\alpha,\theta) = (-r\operatorname{sen}\alpha\cos\theta, -r\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\theta, r\cos\alpha),$$

$$\frac{\partial\sigma}{\partial\theta}(\alpha,\theta) = \big(-(R + r\cos\alpha)\operatorname{sen}\theta, (R + r\cos\alpha)\cos\theta, 0\big)$$

e

$$\Big\|\frac{\partial\sigma}{\partial\alpha}(\alpha,\theta) \wedge \frac{\partial\sigma}{\partial\theta}(\alpha,\theta)\Big\| = \Big\|\frac{\partial\sigma}{\partial\alpha}(\alpha,\theta)\Big\|\Big\|\frac{\partial\sigma}{\partial\theta}(\alpha,\theta)\Big\| = r(R + r\cos\alpha),$$

já que os vetores $\frac{\partial\sigma}{\partial\alpha}(\alpha,\theta)$ e $\frac{\partial\sigma}{\partial\theta}(\alpha,\theta)$ são ortogonais e $R + r\cos\alpha \geq R - r > 0$. A área do toro é:

$$\int_0^{2\pi}\Big(\int_0^{2\pi} r(R + r\cos\alpha)\,\mathrm{d}\alpha\Big)\,\mathrm{d}\theta = 4\pi^2 Rr.$$

Exercício 4. (a) A densidade de massa por área é constante e igual a:

$$\mu = \frac{M}{2\pi R^2}\,.$$

O momento de inércia é dado pela integral de superfície:

$$\mu \iint_H (y^2 + z^2)\,\mathrm{d}A.$$

(b) Parametrizamos H fazendo:

$$(x, y, z) = \sigma(\theta, \phi) = (R\cos\theta \operatorname{sen}\phi, R\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi, R\cos\phi),$$

com $\theta \in [0, 2\pi]$ e $\phi \in \big[0, \frac{\pi}{2}\big]$. Daí $\mathrm{d}A = R^2 \operatorname{sen}\phi\, \mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi$ e:

$$\begin{aligned}\mu \iint_H (y^2 + z^2)\,\mathrm{d}A &= \mu R^4 \int_0^{2\pi} \Big(\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\operatorname{sen}^2\theta \operatorname{sen}^2\phi + \cos^2\phi)\operatorname{sen}\phi\,\mathrm{d}\phi\Big)\,\mathrm{d}\theta\\ &= \frac{2}{3} M R^2.\end{aligned}$$

Exercício 5. (a) Temos:

$$\frac{\partial\Psi}{\partial u}(u, v, t) = \frac{\partial\sigma}{\partial u}(u, v) + t\frac{\partial\vec{n}}{\partial u}(u, v), \quad \frac{\partial\Psi}{\partial v}(u, v, t) = \frac{\partial\sigma}{\partial v}(u, v) + t\frac{\partial\vec{n}}{\partial v}(u, v)$$

$$\text{e} \quad \frac{\partial\Psi}{\partial t}(u, v, t) = \vec{n}(u, v).$$

(b) As colunas de $J\Psi(u, v, 0)$ são as derivadas parciais de Ψ no ponto $(u, v, 0)$. Usando o resultado do item (a), vemos que essas colunas são $\frac{\partial\sigma}{\partial u}(u, v)$, $\frac{\partial\sigma}{\partial v}(u, v)$ e $\vec{n}(u, v)$. Portanto o determinante de $J\Psi(u, v, 0)$ é igual ao produto misto

$$\Big(\frac{\partial\sigma}{\partial u}(u, v) \wedge \frac{\partial\sigma}{\partial v}(u, v)\Big) \cdot \vec{n}(u, v)$$

que é igual a $\big\|\frac{\partial\sigma}{\partial u}(u, v) \wedge \frac{\partial\sigma}{\partial v}(u, v)\big\|$. Note que o determinante de $J\Psi(u, v, 0)$ é diferente de zero, já que os vetores $\frac{\partial\sigma}{\partial u}(u, v)$ e $\frac{\partial\sigma}{\partial v}(u, v)$ são linearmente independentes, o que implica que o seu produto vetorial é não nulo.

(c) Como Ψ é de classe C^1 e a sua matriz Jacobiana em qualquer ponto de W é inversível, segue do Teorema da Função Inversa que a restrição de Ψ a W é localmente injetora. Temos que $K \times \{0\}$ é um subconjunto compacto de W e que a restrição de Ψ a $K \times \{0\}$ é injetora, já que $\Psi(u, v, 0) = \sigma(u, v)$ para todo $(u, v) \in U$ e σ é injetora. A Proposição 1 nos dá então um subconjunto aberto W' de W contendo $K \times \{0\}$ em que Ψ é injetora. Agora a Proposição 2 nos dá um subconjunto aberto V de $\mathbb{R}^2$ contendo K e um escalar $r > 0$ tais que $V \times \left]-r, r\right[$ está contido em W'.

(d) Segue do resultado do item (c) e do Teorema da Função Inversa que a restrição de Ψ a $V \times \left]-r, r\right[$ é um difeomorfismo de classe C^1 cuja imagem é algum subconjunto aberto de $\mathbb{R}^3$. Como $K \times [0, \varepsilon]$ é um subconjunto Jordan mensurável de $V \times \left]-r, r\right[$, podemos usar o Teorema de Mudança de Variáveis na integral para obter:

$$\begin{aligned}\operatorname{vol}\Big(\Psi\big[K \times [0, \varepsilon]\big]\Big) &= \iiint_{\Psi\left[K \times [0,\varepsilon]\right]} 1 \, \mathrm{d}x \mathrm{d}y \mathrm{d}z \\ &= \iiint_{K \times [0,\varepsilon]} \big| \det J\Psi(u, v, t) \big| \, \mathrm{d}u \mathrm{d}v \mathrm{d}t.\end{aligned}$$

(e) Usando o resultado do item (d) e o Teorema de Fubini, obtemos:

$$\operatorname{vol}\Big(\Psi\big[K \times [0, \varepsilon]\big]\Big) = \int_0^\varepsilon \Big(\iint_K \big| \det J\Psi(u, v, t) \big| \, \mathrm{d}u \mathrm{d}v \Big) \, \mathrm{d}t = \int_0^\varepsilon g(t) \, \mathrm{d}t,$$

em que $g : \left]-r, r\right[\to \mathbb{R}$ é definida por

$$g(t) = \iint_K \big| \det J\Psi(u, v, t) \big| \, \mathrm{d}u \mathrm{d}v,$$

para todo $t \in \left]-r, r\right[$. Segue da Proposição 3 que g é contínua e daí o segundo Teorema Fundamental do Cálculo nos dá:

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1}{\varepsilon} \operatorname{vol}\Big(\Psi\big[K \times [0, \varepsilon]\big]\Big) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon g(t) \, \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon} \int_0^\varepsilon g(t) \, \mathrm{d}t \bigg|_{\varepsilon=0} = g(0).$$

Usando o resultado do item (b) obtemos

$$\begin{aligned}g(0) = \iint_K \big| \det J\Psi(u, v, 0) \big| \, \mathrm{d}u \mathrm{d}v &= \iint_K \Big\| \frac{\partial \sigma}{\partial u}(u, v) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u, v) \Big\| \, \mathrm{d}u \mathrm{d}v \\ &= \text{área}\big(\sigma[K]\big),\end{aligned}$$

como queríamos.