Nona Lista

MAT0206 – Análise Real
MAP0216 – Introdução à Análise Real

Prof. Daniel Victor Tausk

08/06/2012

A título de recordação, as definições e resultados vistos em aula foram colocados na lista.

Definição 1. Sejam $S \subset \mathbb{R}$ e $x \in \mathbb{R}$. Dizemos que x é um *ponto de acumulação* de S se para todo $\varepsilon > 0$, o conjunto:

$$\big( ]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\setminus \{x\} \big) \cap S = \big( ]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\cap S \big) \setminus \{x\}$$

é não vazio (em outras palavras, x é ponto de acumulação de S se para todo $\varepsilon > 0$ existe um elemento de S diferente de x em $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$). Denotamos por S' o conjunto dos pontos de acumulação de S.

Exercício 1. Dado $S \subset \mathbb{R}$, mostre que $S' \subset \overline{S}$.

Exercício 2. Dados $A, B \subset \mathbb{R}$, mostre que se $A \subset B$ então $A' \subset B'$.

Exercício 3. Dados $S \subset \mathbb{R}$ e $x \in \mathbb{R}$, mostre que x é um ponto de acumulação de S se e somente se x é um ponto de aderência de $S \setminus \{x\}$.

Definição 2. Seja $S \subset \mathbb{R}$. Um *ponto isolado* de S é um ponto $x \in S$ tal que existe $\varepsilon > 0$ com $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\cap S = \{x\}$. Dizemos que $S \subset \mathbb{R}$ é *discreto* se todos os seus pontos são isolados.

As duas seguintes proposições foram mostradas em aula.

Proposição 1. *Sejam $S \subset \mathbb{R}$ e $x \in \mathbb{R}$. Se $x \notin S$ então x é ponto de acumulação de S se e somente se x é ponto de aderência de S. Se $x \in S$ então (x é sempre ponto de aderência de S e) x é ponto de acumulação de S se e somente se x não é um ponto isolado de S.*

Proposição 2. *Se $S \subset \mathbb{R}$ e $x \in \mathbb{R}$ é um ponto de acumulação de S então, para todo $\varepsilon > 0$, o conjunto $S \cap]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$ é infinito.*

Exercício 4. Dado $S \subset \mathbb{R}$, mostre que $\overline{S} = S \cup S'$. Conclua que S é fechado se e somente se $S' \subset S$.

Exercício 5. Dado $S \subset \mathbb{R}$, mostre que S' é um conjunto fechado.

A seguinte proposição também foi vista em aula (e é uma conseqüência direta do resultado do Exercício 3 e do fato que pontos de aderência de um conjunto são os limites das seqüências convergentes cujos termos estão nesse conjunto).

Proposição 3. *Dados $S \subset \mathbb{R}$ e $x \in \mathbb{R}$ então x é um ponto de acumulação de S se e somente se x é o limite de uma seqüência convergente $(x_n)_{n\geq 1}$ tal que $x_n \in S \setminus \{x\}$ para todo $n \in \mathbb{N}^*$.*

Exercício 6. Dados $S \subset \mathbb{R}$ e $x \in \mathbb{R}$, mostre que x é um ponto de acumulação de S se e somente se existe uma seqüência injetora $(x_n)_{n\geq 1}$ em S que converge para x. (Sugestão: assumindo que x seja ponto de acumulação de S, para construir a seqüência injetora $(x_n)_{n\geq 1}$, use recursão: assuma que $x_1, \ldots, x_n \in S$, já foram construídos e são dois a dois distintos e distintos de x. Obtenha $x_{n+1} \in S$, distinto de x e de $x_1, \ldots, x_n$.)

Definição 3. Seja $f : D \to \mathbb{R}$ uma função cujo domínio D é um subconjunto de $\mathbb{R}$ e seja $a \in D'$ um ponto de acumulação de D. Dizemos que um número real $L \in \mathbb{R}$ é um *limite* de f no ponto a se para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que, para todo $x \in D$, vale que:

$$0 < |x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Vimos em aula que uma função f possui no máximo um limite L num dado ponto a; quando esse (único) limite existe, denotâmo-lo por $\lim_{x\to a} f(x)$. Quando escrevemos $\lim_{x\to a} f(x) = L$, queremos dizer que $\lim_{x\to a} f(x)$ existe e é igual a L, i.e., que L é um limite de f no ponto a.

Provamos em aula as proposições a seguir.

Proposição 4. *Sejam $f : D \to \mathbb{R}$ com $D \subset \mathbb{R}$, $a \in D'$ e $L \in \mathbb{R}$. Então $\lim_{x\to a} f(x) = L$ se e somente se para toda seqüência $(x_n)_{n\geq 1}$ em $D \setminus \{a\}$ com $x_n \to a$, vale que $f(x_n) \to L$.*

Proposição 5. *Sejam $f : D \to \mathbb{R}$, $g : D \to \mathbb{R}$ com $D \subset \mathbb{R}$ e seja $a \in D'$. Se os limites $\lim_{x\to a} f(x)$ e $\lim_{x\to a} g(x)$ existem então:*

$$\lim_{x\to a} \big(f(x) + g(x)\big) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x),$$
$$\lim_{x\to a} \big(f(x)g(x)\big) = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x).$$

Proposição 6. *Sejam $f : D \to \mathbb{R}$, $g : E \to \mathbb{R}$ com $D, E \subset \mathbb{R}$ e $f(D) \subset E$. Seja $a \in D'$. Suponha que $\lim_{x\to a} f(x)$ exista e denote esse limite por L. Suponha também que exista uma vizinhança V de a tal que:*

$$L \notin f\big((V \setminus \{a\}) \cap D\big),$$

ou seja, f não assume o valor L em $V \setminus \{a\}$. Então $L \in E'$. Além do mais, se o limite $\lim_{y\to L} g(y)$ existe então:

$$\lim_{x\to a} g\big(f(x)\big) = \lim_{y\to L} g(y).$$

Exercício 7. Seja $f : D \to \mathbb{R}$ com $D \subset \mathbb{R}$ e seja $E \subset D$. Dado $a \in E'$ (de modo que também $a \in D'$), mostre que se f possui limite no ponto a então a restrição $f|_E$ também possui limite no ponto a e ele coincide com o limite de f no ponto a. Mostre, através de um exemplo, que o limite de $f|_E$ no ponto a pode existir sem que o limite de f no ponto a exista.

Exercício 8. Sejam $f : D \to \mathbb{R}$ com $D \subset \mathbb{R}$ e $a \in D'$. Se V é uma vizinhança de a, tomando $E = D \cap V$, mostre que $a \in E'$. Mostre também que se $f|_E$ possui limite no ponto a então f também possui limite no ponto a (ou seja, nesse caso, vale a implicação que na situação mais geral considerada no Exercício 7 não valia).