# Nona Lista

**MAT0121 – Cálculo Diferencial e Integral II**

Prof. Daniel Victor Tausk
27/10/2018

**Exercício 1.** Em cada um dos itens abaixo, calcule as derivadas parciais da função $g$ em termos das derivadas parciais da função $f$ usando a regra da cadeia.

(a) $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por
$$g(x,y) = f\big(e^x y^2, \cos(x+y)\big),$$
para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, em que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é uma função diferenciável;

(b) $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por
$$g(\rho,\theta) = f(\rho\cos\theta, \rho\,\mathrm{sen}\,\theta),$$
para todo $(\rho,\theta) \in \mathbb{R}^2$, em que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é uma função diferenciável;

(c) $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por
$$g(x,y,z) = f(y, x+y+z),$$
para todo $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, em que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é uma função diferenciável;

(d) $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por
$$g(\rho,\theta,\phi) = f(\rho\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\phi, \rho\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\phi, \rho\cos\phi),$$
para todo $(\rho,\theta,\phi) \in \mathbb{R}^3$, em que $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ é uma função diferenciável;

(e) $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por
$$g(x,y) = f(y,x),$$
para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, em que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é uma função diferenciável;

(f) $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por
$$g(x,y) = f\big(f(y,x), f(x+y, x-y)\big),$$
para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, em que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é uma função diferenciável.

**Exercício 2.** Em cada um dos itens abaixo, encontre uma equação para o plano tangente à superfície $S$ dada no ponto $p \in S$ dado.

(a) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : xy = z^3\}$ e $p = (3, 9, 3)$;

(b) $S$ é o gráfico da função $f : ]0, +\infty[ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = x^y$, para todo $x > 0$ e todo $y \in \mathbb{R}$ e $p = (1, 1, 1)$;

(c) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : e^{x^2+y^2} = 1 + \operatorname{sen} z\}$ e $p = (0, 0, 2\pi)$.

**Exercício 3** (propriedade de reflexão da elipse)**.** Sejam $a, b > 0$ com $a > b$ e considere a elipse de equação

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Temos que os focos dessa elipse são $(-c, 0)$ e $(c, 0)$, em que $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ é a semi-distância focal. O objetivo deste exercício é mostrar que se a elipse for espelhada, então um raio de luz que sai de um foco e incide na elipse reflete e passa pelo outro foco. Para isso, recorde que a *lei de reflexão* para a luz diz que o ângulo de incidência é igual ao ângulo de reflexão, isto é, o raio de luz incidente e o raio de luz refletido possuem o mesmo ângulo com o vetor normal à superfície refletora. Tendo em vista essa lei física, ao resolver os itens abaixo você demonstrará a referida propriedade de reflexão para uma elipse. No que segue, $(x, y)$ denota o ponto fixado da elipse em que o raio de luz vai incidir.

(a) Encontre um vetor não nulo $\vec{n} \in \mathbb{R}^2$ que seja normal à elipse no ponto $(x, y)$.

(b) Considere os vetores $\vec{v} = (c, 0) - (x, y)$ e $\vec{w} = (-c, 0) - (x, y)$ (esses são os vetores diretores para o raio incidente e para o raio refletido). Verifique que $\|\vec{v}\| = e(p - x)$ e $\|\vec{w}\| = e(p + x)$, em que $e = \frac{c}{a}$ é a *excentricidade* da elipse e $p = \frac{a^2}{c}$. (A reta $x = p$ é chamada a *reta diretriz* da elipse[1] correspondente ao foco $(c, 0)$ e a reta $x = -p$ é a reta diretriz correspondente ao foco $(-c, 0)$.)

(c) Mostre que o ângulo entre o vetor $\vec{v}$ e o vetor $\vec{n}$ é igual ao ângulo entre o vetor $\vec{w}$ e o vetor $\vec{n}$. Para isso, note que você precisa verificar que $\frac{1}{\|\vec{v}\|}(\vec{v} \cdot \vec{n}) = \frac{1}{\|\vec{w}\|}(\vec{w} \cdot \vec{n})$.

[1] O que você está mostrando neste item é a seguinte caracterização da elipse: um ponto $(x, y)$ pertence à elipse se, e somente se, a distância de $(x, y)$ a um foco é igual ao produto da excentricidade da elipse pela distância de $(x, y)$ até a reta diretriz correspondente a esse foco.

**Exercício 4** (propriedade de reflexão da parábola)**.** Seja $a > 0$ e considere a parábola de equação

$$y = ax^2.$$

O foco dessa parábola é o ponto $(0, c)$, em que $c = \frac{1}{4a}$. O objetivo deste exercício é mostrar que se a parábola for espelhada, então um raio de luz que incide na parábola paralelamente ao eixo de simetria da parábola pelo lado que contém o foco reflete e passa pelo foco. Para isso, usamos a lei de reflexão da luz enunciada no Exercício 3. Tendo em vista essa lei física, ao resolver os itens abaixo você demonstrará a referida propriedade de reflexão para uma parábola. No que segue, $(x, y)$ denota o ponto fixado da parábola em que o raio de luz vai incidir.

(a) Encontre um vetor não nulo $\vec{n} \in \mathbb{R}^2$ que seja normal à parábola no ponto $(x, y)$.

(b) Considere os vetores $\vec{v} = (0, 1)$ e $\vec{w} = (0, c) - (x, y)$ (esses são os vetores diretores para o raio incidente e para o raio refletido). Verifique que $\|\vec{w}\| = y + c$. (O que você está verificando aqui é que a parábola é o conjunto dos pontos equidistantes ao foco e à reta diretriz; nesse caso, a reta diretriz possui equação $y = -c$.)

(c) Mostre que o ângulo entre o vetor $\vec{v}$ e o vetor $\vec{n}$ é igual ao ângulo entre o vetor $\vec{w}$ e o vetor $\vec{n}$. Para isso, note que você precisa verificar que $\frac{1}{\|\vec{v}\|}(\vec{v} \cdot \vec{n}) = \frac{1}{\|\vec{w}\|}(\vec{w} \cdot \vec{n})$.

**Definição.** Sejam $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ uma função de classe $C^1$ e $F : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ uma função contínua. Suponha que $\gamma$ descreva o movimento no espaço de uma partícula em função do tempo e que, para cada $t \in [a,b]$, $F(t)$ denote uma força que está agindo sobre essa partícula no instante $t$ (não necessariamente a força total, apenas uma de várias forças que podem estar agindo sobre a partícula). Temos que o *trabalho* realizado pela força $F$ na partícula durante o intervalo de tempo $[a,b]$ é definido pela integral[2]:

$$\int_a^b F(t) \cdot \gamma'(t) \, \mathrm{d}t.$$

**Exercício 5.** Seja $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ uma curva de classe $C^2$ que descreve o movimento no espaço de uma partícula de massa $m > 0$ em função do tempo. Para cada $t \in [a,b]$, a *energia cinética* dessa partícula no instante $t$ é definida por:

$$K(t) = \frac{1}{2}\, m\big(\gamma'(t) \cdot \gamma'(t)\big) = \frac{1}{2}\, m\|\gamma'(t)\|^2.$$

Denote por $F(t)$ a força total aplicada a essa partícula no instante $t$; pela Lei de Newton, temos:

$$F(t) = m\gamma''(t),$$

para todo $t \in [a,b]$.

(a) Mostre que $K'(t) = F(t) \cdot \gamma'(t)$, para todo $t \in [a,b]$.

(b) Conclua que o trabalho realizado por $F$ sobre a partícula no intervalo $[a,b]$ é igual à variação de energia cinética $K(b) - K(a)$.

[2] Em cursos mais elementares, em que não se fala em integral, trabalho é definido apenas para uma força $F$ constante (isto é, independente do tempo) como sendo o produto escalar do vetor $F$ pelo vetor de deslocamento $\gamma(b) - \gamma(a)$. Em geral, podemos pensar que o intervalo $[a,b]$ é subdividido em intervalos pequenos $[t, t + \Delta t]$ em que a força é aproximadamente constante e aí nesse intervalo o trabalho é aproximado pelo produto escalar $F(t) \cdot \big(\gamma(t + \Delta t) - \gamma(t)\big)$. Além do mais, nesse intervalo pequeno, o vetor de deslocamento $\gamma(t + \Delta t) - \gamma(t)$ pode ser aproximado por $\gamma'(t)\Delta t$ e portanto o trabalho nesse intervalo é aproximadamente $F(t) \cdot \gamma'(t)\Delta t$. Somando isso para todos os intervalos e fazendo $\Delta t \to 0$ obtemos a integral de Riemann $\int_a^b F(t) \cdot \gamma'(t) \, \mathrm{d}t$.

**Exercício 6.** Uma lei de força é dita *conservativa* se ela descreve uma força $F(q) \in \mathbb{R}^3$ agindo sobre uma partícula que depende apenas da posição $q \in \mathbb{R}^3$ da partícula e se, além do mais, essa força é dada pelo gradiente de uma função de classe $C^1$ a valores reais, isto é, existe uma função $V : D \to \mathbb{R}$ de classe $C^1$, com $D \subset \mathbb{R}^3$ um subconjunto aberto, tal que $F(q) = -\nabla V(q)$, para todo $q \in D$. A função $V$ é chamada um *potencial* para a lei de força conservativa em questão. Seja $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ uma função de classe $C^1$ que descreve o movimento no espaço em função do tempo de uma partícula sob ação de uma lei de força conservativa $F$ com potencial $V$. (A força $F$ não precisa ser a força total, possivelmente há outras forças agindo sobre a partícula.) A imagem de $\gamma$ deve estar contida no domínio $D$ da função potencial.

(a) Se $F(t) = -\nabla V\big(\gamma(t)\big)$ denota o valor da força $F$ no instante $t$, verifique que $(V \circ \gamma)'(t) = -F(t) \cdot \gamma'(t)$.

(b) Mostre que o trabalho realizado por $F$ sobre a partícula no intervalo de tempo $[a, b]$ é $V\big(\gamma(a)\big) - V\big(\gamma(b)\big)$.

**Exercício 7** (conservação de energia mecânica para um sistema com uma única partícula)**.** Seja $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ uma curva de classe $C^2$ que descreve o movimento no espaço de uma partícula de massa $m > 0$ em função do tempo. Suponha que a força total $F(t) = m\gamma''(t)$ agindo sobre a partícula em cada instante $t \in [a, b]$ esteja decomposta como $F(t) = F_{\text{cons}}(t) + F_{\text{diss}}(t)$, em que $F_{\text{cons}}(t)$ é proveniente de uma lei de força conservativa com potencial $V$, isto é, $F_{\text{cons}}(t) = -\nabla V\big(\gamma(t)\big)$, para todo $t \in [a, b]$. (Uma força que não é conservativa é normalmente chamada *força dissipativa*, daí o nome $F_{\text{diss}}$). A *energia mecânica total* no instante $t$ é definida por

$$E(t) = K(t) + V\big(\gamma(t)\big),$$

para todo $t \in [a, b]$, em que $K(t)$ denota a energia cinética (Exercício 5). Usando o resultado dos Exercícios 5 e 6, mostre que a variação de energia mecânica $E(b) - E(a)$ coincide com o trabalho realizado pela força $F_{\text{diss}}$ sobre a partícula no intervalo de tempo $[a, b]$. Em particular, se $F_{\text{diss}}$ não realiza trabalho (por exemplo, se $F_{\text{diss}} = 0$), então a energia mecânica total é conservada.

## Respostas

**Exercício 1.** Nas respostas abaixo, os apelidos usados para as variáveis de $f$ são $x$ e $y$ (ou $x$, $y$ e $z$), isto é, escrevemos $\partial_1 f = \frac{\partial f}{\partial x}$, $\partial_2 f = \frac{\partial f}{\partial y}$ e $\partial_3 f = \frac{\partial f}{\partial z}$ (quando houver a terceira variável). Esses apelidos são arbitrários e você poderia usar outros, desde que deixe claro quais são. Como apelidos para as variáveis de $g$, usamos as mesmas letras que aparecem na fórmula usada para definir $g$ no enunciado do exercício. Assim, por exemplo, no item (a) escrevemos $\partial_1 g = \frac{\partial g}{\partial x}$ e no item (b) escrevemos $\partial_1 g = \frac{\partial g}{\partial \rho}$. Novamente, outros apelidos poderiam ser usados (desde que se deixe claro quais são), mas é hábito usar as mesmas letras que aparecem na fórmula em que a função foi introduzida. Em alguns itens as variáveis de $f$ e de $g$ recebem os mesmos apelidos. Isso é normalmente evitado para não gerar confusão em situações (como aqui) em que se vai compor as funções, mas não está errado.

(a) as derivadas parciais de $g$ são:

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}\big(e^x y^2, \cos(x+y)\big)e^x y^2 - \frac{\partial f}{\partial y}\big(e^x y^2, \cos(x+y)\big)\operatorname{sen}(x+y),$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 2\frac{\partial f}{\partial x}\big(e^x y^2, \cos(x+y)\big)e^x y - \frac{\partial f}{\partial y}\big(e^x y^2, \cos(x+y)\big)\operatorname{sen}(x+y);$$

(b) as derivadas parciais de $g$ são:

$$\frac{\partial g}{\partial \rho}(\rho,\theta) = \frac{\partial f}{\partial x}(\rho\cos\theta, \rho\operatorname{sen}\theta)\cos\theta + \frac{\partial f}{\partial y}(\rho\cos\theta, \rho\operatorname{sen}\theta)\operatorname{sen}\theta,$$

$$\frac{\partial g}{\partial \theta}(\rho,\theta) = -\frac{\partial f}{\partial x}(\rho\cos\theta, \rho\operatorname{sen}\theta)\rho\operatorname{sen}\theta + \frac{\partial f}{\partial y}(\rho\cos\theta, \rho\operatorname{sen}\theta)\rho\cos\theta;$$

(c) as derivadas parciais de $g$ são:

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial y}(y, x+y+z),$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial x}(y, x+y+z) + \frac{\partial f}{\partial y}(y, x+y+z),$$

$$\frac{\partial g}{\partial z}(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial y}(y, x+y+z);$$

(d) as derivadas parciais de $g$ são:

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial \rho}(\rho,\theta,\phi) = {} & \frac{\partial f}{\partial x}(\rho\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\phi,\rho\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\phi,\rho\cos\phi)\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\phi \\ & + \frac{\partial f}{\partial y}(\rho\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\phi,\rho\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\phi,\rho\cos\phi)\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\phi \\ & + \frac{\partial f}{\partial z}(\rho\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\phi,\rho\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\phi,\rho\cos\phi)\cos\phi,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial \theta}(\rho,\theta,\phi) = {} & -\frac{\partial f}{\partial x}(\rho\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\phi,\rho\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\phi,\rho\cos\phi)\rho\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\phi \\ & + \frac{\partial f}{\partial y}(\rho\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\phi,\rho\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\phi,\rho\cos\phi)\rho\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\phi,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial \phi}(\rho,\theta,\phi) = {} & \frac{\partial f}{\partial x}(\rho\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\phi,\rho\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\phi,\rho\cos\phi)\rho\cos\theta\cos\phi \\ & + \frac{\partial f}{\partial y}(\rho\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\phi,\rho\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\phi,\rho\cos\phi)\rho\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\phi \\ & - \frac{\partial f}{\partial z}(\rho\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\phi,\rho\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\phi,\rho\cos\phi)\rho\,\mathrm{sen}\,\phi;\end{aligned}$$

(e) as derivadas parciais de $g$ são:

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(y,x), \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(y,x);$$

(f) as derivadas parciais de $g$ são:

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = {} & \frac{\partial f}{\partial x}\big(f(y,x),f(x+y,x-y)\big)\frac{\partial f}{\partial y}(y,x) \\ & + \frac{\partial f}{\partial y}\big(f(y,x),f(x+y,x-y)\big)\Big[\frac{\partial f}{\partial x}(x+y,x-y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x+y,x-y)\Big],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = {} & \frac{\partial f}{\partial x}\big(f(y,x),f(x+y,x-y)\big)\frac{\partial f}{\partial x}(y,x) \\ & + \frac{\partial f}{\partial y}\big(f(y,x),f(x+y,x-y)\big)\Big[\frac{\partial f}{\partial x}(x+y,x-y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x+y,x-y)\Big].\end{aligned}$$

**Exercício 2.** (a) $3x + y - 9z = -9$; (b) $x - z = 0$; (c) $z = 2\pi$.

**Exercício 3.** (a) $\vec{n} = \left(\frac{x}{a^2}, \frac{y}{b^2}\right)$ (ou um vetor não nulo paralelo a esse).

**Exercício 4.** (a) $\vec{n} = (2ax, -1)$ (ou um vetor não nulo paralelo a esse).