Nona Lista

MAT0112 – Vetores e Geometria

Prof. Daniel Victor Tausk

23/06/2018

Exercício 1. Sejam π um plano e $\Sigma_\pi = (O, \mathcal{B}_\pi)$ um sistema de coordenadas em π, em que $\mathcal{B}_\pi$ é ortonormal. Considere a hipérbole em π dada pela equação

$$-x^2 + 4y^2 + 2x - 24y + 31 = 0$$

no sistema Σ_π. Determine os semi-eixos, o centro, os focos e as retas assíntotas a essa hipérbole.

Exercício 2. Sejam π um plano e $\Sigma_\pi = (O, \mathcal{B}_\pi)$ um sistema de coordenadas em π, em que $\mathcal{B}_\pi$ é ortonormal. Considere a parábola em π dada pela equação

$$3y^2 - 2x - 12y + 10 = 0$$

no sistema Σ_π. Determine o vértice, o foco, a reta diretriz e o eixo dessa parábola.

Exercício* 3 (descrição de uma cônica em termos de excentricidade e reta diretriz)**.** Sejam π um plano, $F \in \pi$ um ponto e $r \subset \pi$ uma reta que não passe por F. Seja dado um escalar $e > 0$. Note que, se $e = 1$, então o conjunto

$$\big\{P \in \pi : d(P,F) = e\, d(P,r)\big\} \tag{1}$$

é, por definição, uma parábola com foco F e reta diretriz r. No que segue, assumimos que $e \neq 1$ e vamos investigar o que ocorre com o conjunto (1) nesse caso. Considere um sistema de coordenadas $\Sigma_\pi = (O, \mathcal{B}_\pi)$ no plano π em que $\mathcal{B}_\pi$ é ortonormal e tal que o eixo das abscissas[1] de Σ_π passe por F e seja ortogonal a r. Nessas condições, temos que $F = (c, 0)_{\Sigma_\pi}$ para algum $c \in \mathbb{R}$ e que r é dada pela equação $x = p$ no sistema Σ_π, para algum $p \in \mathbb{R}$ com $p \neq c$.

(a) Verifique que o conjunto (1) é dado pela equação

$$(x - c)^2 + y^2 = e^2(x - p)^2 \tag{2}$$

no sistema de coordenadas Σ_π.

(b) Verifique que o termo em x na equação (2) se cancela se, e somente se, $e^2 p = c$.

(c) Mostre que o sistema de coordenadas Σ_π pode ser escolhido de modo que (além de $\mathcal{B}_\pi$ ser ortonormal e do eixo das abscissas passar por F e ser ortogonal a r) a condição $e^2 p = c$ seja satisfeita. Descreva a posição em que devemos colocar a origem O de Σ_π para que isso aconteça. Note que O e F serão necessariamente distintos, pois caso contrário $c = 0$ e $p = 0$, contrariando $F \notin r$.

---

[1] Isto é, o eixo que passa por O e que tem a direção e o sentido do primeiro vetor da base $\mathcal{B}_\pi$.

Exercício* 4 (continuação do Exercício 3)**.** Sejam π um plano, $F \in \pi$ um ponto e $r \subset \pi$ uma reta que não passe por F. Seja dado um escalar $e > 0$ com $e \neq 1$. Seja $\Sigma_\pi = (O, \mathcal{B}_\pi)$ um sistema de coordenadas em π escolhido como no item (c) do Exercício 3. Supomos também que $c > 0$ (o que pode ser obtido simplesmente escolhendo o sentido do eixo das abscissas de Σ_π igual ao sentido do vetor $\overrightarrow{OF}$).

(a) Suponha que $e < 1$. Verifique que a equação (2) é equivalente a

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{3}$$

em que $a > 0$ e $b > 0$ são definidos por:

$$a = \frac{c}{e} \quad \text{e} \quad b = \sqrt{a^2 - c^2}.$$

Conclua que o conjunto (1) é uma elipse com um dos focos em F e eixo maior ortogonal à reta r. Note que qualquer elipse (3) que não seja um círculo é da forma (1) se escolhermos F como sendo um dos focos, tomarmos $e = \frac{c}{a} \in \,]0, 1[$ e r como sendo a reta ortogonal ao eixo maior da elipse que está do mesmo lado do foco escolhido F em relação ao centro O da elipse e que satisfaz $d(r, O) = \frac{c}{e^2} = \frac{a}{e}$. O escalar e é chamado a *excentricidade* da elipse e a reta r a *reta diretriz* da elipse correspondente ao foco F.

(b) Suponha que $e > 1$. Verifique que a equação (2) é equivalente a

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{4}$$

em que $a > 0$ e $b > 0$ são definidos por:

$$a = \frac{c}{e} \quad \text{e} \quad b = \sqrt{c^2 - a^2}.$$

Conclua que o conjunto (1) é uma hipérbole com um dos focos em F e eixo maior (isto é, o eixo que contém os focos) ortogonal à reta r. Note que qualquer hipérbole (4) é da forma (1) se escolhermos F como sendo um dos focos, tomarmos $e = \frac{c}{a} \in \,]1, +\infty[$ e r como sendo a reta ortogonal ao eixo maior da hipérbole que está do mesmo lado do foco escolhido F em relação ao centro O da hipérbole e que satisfaz $d(r, O) = \frac{c}{e^2} = \frac{a}{e}$. O escalar e é chamado a *excentricidade* da hipérbole e a reta r a *reta diretriz* da hipérbole correspondente ao foco F.

Respostas

Exercício 1. semi-eixos: 1 e 2; centro: $(1,3)_{\Sigma_\pi}$;
focos: $(1,3+\sqrt{5})_{\Sigma_\pi}$ e $(1,3-\sqrt{5})_{\Sigma_\pi}$;
assíntotas: $x-2y+5=0$ e $x+2y-7=0$ no sistema Σ_π.

Exercício 2. vértice: $(-1,2)_{\Sigma_\pi}$; foco: $\big(-\frac{5}{6},2\big)_{\Sigma_\pi}$;
diretriz: $x=-\frac{7}{6}$ no sistema Σ_π;
eixo: $y=2$ no sistema Σ_π.

Exercício 3. (c) seja $s\subset\pi$ a reta ortogonal a r passando por F (que é onde devemos colocar o eixo das abscissas de Σ_π) e seja R o ponto na interseção de r e s. Se $e<1$, a origem de Σ_π deve ser escolhida como sendo o único ponto $O\in s$ tal que F esteja entre O e R e tal que:

$$d(O,F)=\frac{e^2}{1-e^2}\,d(F,R).$$

Se $e>1$, a origem de Σ_π deve ser escolhida como sendo o único ponto $O\in s$ tal que R esteja entre O e F e tal que:

$$d(O,R)=\frac{d(F,R)}{e^2-1}.$$

Note que a escolha do sentido para o eixo das abscissas é irrelevante, já que uma mudança nesse sentido troca ao mesmo tempo p por $-p$ e c por $-c$, o que mantém a condição $e^2p=c$ inalterada.