Nona Lista

MAT0111 – Cálculo Diferencial e Integral I

Prof. Daniel Victor Tausk
15/06/2013

Exercício 1. Calcule as integrais indefinidas abaixo:

(a) $\displaystyle\int \frac{x^4+1}{x^2+2x+4}\,\mathrm{d}x;$

(b) $\displaystyle\int \frac{1+x}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x;$

(c) $\displaystyle\int \frac{x^3+1}{(x^2-3x+2)^2}\,\mathrm{d}x;$

(d) $\displaystyle\int \sqrt{1-4x-x^2}\,\mathrm{d}x;$

(e) $\displaystyle\int \operatorname{sen}(\ln x)\,\mathrm{d}x;$

(f) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}(2x)}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x;$

(g) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}.$

Exercício 2. Calcule a área da região do plano determinada pelas parábolas $y = x^2 + 2x + 5$ e $y = -x^2 + 12x - 3$.

Exercício 3. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \int_{\operatorname{sen} x}^{\cos x} y\Big(\int_1^y \sqrt{1+t^4}\,\mathrm{d}t\Big)\,\mathrm{d}y,$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Calcule $f'(x)$ e $f''(x)$.

Exercício 4. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$, com $a < b$, e seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função Riemann-integrável. Pode-se mostrar que também a função $|f|$ é Riemann-integrável. Assuma esse resultado e mostre que:

$$\Big|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\Big| \le \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

(Sugestão: note que $-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|$, para todo $x \in [a, b]$.)

Exercício* 5 (funções hiperbólicas)**.** As funções *seno hiperbólico* e *cosseno hiperbólico* são definidas respectivamente por:

$$\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

(a) Mostre que as derivadas das funções senh e cosh são dadas por:

$$\operatorname{senh}' x = \cosh x, \quad \cosh' x = \operatorname{senh} x,$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

(b) Esboce o gráfico da função senh. Em particular, mostre que a função $\operatorname{senh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é ímpar, bijetora e estritamente crescente.

(c) Esboce o gráfico da função cosh. Em particular, mostre que a função $\cosh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é par, positiva e possui um mínimo global estrito na origem. Mostre também que a restrição de cosh ao intervalo $[0, +\infty[$ é uma bijeção estritamente crescente sobre o intervalo $[1, +\infty[$.

(d) Mostre que:

$$\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1,$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

(e) Mostre que:

$$\begin{aligned}
\operatorname{senh}(x+y) &= \operatorname{senh} x \cosh y + \cosh x \operatorname{senh} y, \\
\cosh(x+y) &= \cosh x \cosh y + \operatorname{senh} x \operatorname{senh} y, \\
\operatorname{senh}(2x) &= 2 \operatorname{senh} x \cosh x, \\
\cosh(2x) &= \cosh^2 x + \operatorname{senh}^2 x, \\
\cosh^2 x &= \frac{\cosh(2x) + 1}{2}, \\
\operatorname{senh}^2 x &= \frac{\cosh(2x) - 1}{2},
\end{aligned}$$

para todos $x, y \in \mathbb{R}$.

(f) Mostre que a função inversa de $\operatorname{senh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dada por:

$$\operatorname{arcsenh} t = \ln\left(t + \sqrt{t^2 + 1}\right),$$

para todo $t \in \mathbb{R}$.

(g) Mostre que a função inversa de $\cosh|_{[0,+\infty[} : [0, +\infty[\to [1, +\infty[$ é dada por:

$$\operatorname{arccosh} t = \ln\left(t + \sqrt{t^2 - 1}\right),$$

para todo $t \geq 1$.

(h) Calcule a integral indefinida:

$$\int \sqrt{1 + t^2}\, \mathrm{d}t$$

usando a substituição $t = \operatorname{senh} x$.

(i) As funções *tangente hiperbólica* e *secante hiperbólica* são definidas respectivamente por:

$$\operatorname{tgh} x = \frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x}, \quad \operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x},$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Mostre que:

$$1 - \operatorname{tgh}^2 x = \operatorname{sech}^2 x,$$

para todo $x \in \mathbb{R}$ e que as derivadas das funções tgh e sech são dadas respectivamente por:

$$\operatorname{tgh}' x = \operatorname{sech}^2 x, \quad \operatorname{sech}' x = -\operatorname{tgh} x \operatorname{sech} x,$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

(j) Esboce o gráfico da função tgh. Em particular, mostre que tgh é uma bijeção ímpar estritamente crescente de $\mathbb{R}$ sobre $]-1,1[$. Mostre também que a função inversa de tgh é dada por:

$$\operatorname{arctgh} t = \frac{1}{2} \ln\Big(\frac{1+t}{1-t}\Big),$$

para todo $t \in\,]-1,1[$.

(k) Esboce o gráfico da função sech. Em particular, mostre que sech é uma função par, positiva, que possui um máximo global estrito na origem. Mostre também que $\operatorname{sech}|_{[0,+\infty[}$ é uma bijeção estritamente decrescente de $[0,+\infty[$ sobre $]0,1]$ e que sua inversa é dada por:

$$\operatorname{arcsech} t = \ln\Big(\frac{1+\sqrt{1-t^2}}{t}\Big),$$

para todo $t \in\,]0,1]$.

(l) As funções *cotangente hiperbólica* e *cossecante hiperbólica* são definidas respectivamente por:

$$\operatorname{cotgh} x = \frac{\cosh x}{\operatorname{senh} x}, \quad \operatorname{cossech} x = \frac{1}{\operatorname{senh} x},$$

para todo $x \neq 0$. Adapte os resultados dos itens (i), (j) e (k) para as funções cotgh e cossech.

Segue abaixo o enunciado completo do Teorema de Decomposição em Frações Parciais, que foi explicado em aula através de exemplos.

Teorema. *Sejam p, q polinômios com coeficientes reais, sendo o grau de p menor do que o grau de q. Suponha que:*

$$q(x) = \prod_{i=1}^{k} q_i(x)^{n_i},$$

onde k, n_1, ..., n_k são inteiros positivos e q_1, ..., q_k são polinômios dois a dois distintos com coeficientes reais, sendo que cada q_i é um polinômio de grau 1 ou um polinômio de grau 2 que não possui raízes reais. Então existem polinômios $u_{i,j}$, $i = 1, \dots, k$, $j = 1, \dots, n_i$, com coeficientes reais, sendo que $u_{i,j}$ possui grau menor[1] do que o grau de q_i, e vale a igualdade:

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n_i} \frac{u_{i,j}(x)}{q_i(x)^j}.$$

[1] Em outras palavras, se q_i tem grau 1 então $u_{i,j}$ é um polinômio constante e se q_i tem grau 2 então $u_{i,j}(x) = a_{i,j}x + b_{i,j}$, com $a_{i,j}, b_{i,j} \in \mathbb{R}$.

Resultado das integrais do Exercício 1:

(a) $\displaystyle\int \frac{x^4+1}{x^2+2x+4}\,\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} - x^2 + 4\ln(x^2+2x+4) - \frac{7}{\sqrt{3}}\,\operatorname{arctg}\Big(\frac{x+1}{\sqrt{3}}\Big);$

(b) $\displaystyle\int \frac{1+x}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\Big[\operatorname{arctg} x + \frac{x-1}{1+x^2}\Big];$

(c) $\displaystyle\int \frac{x^3+1}{(x^2-3x+2)^2}\,\mathrm{d}x = 7\ln|x-1| - 6\ln|x-2| - \frac{2}{x-1} - \frac{9}{x-2};$

(d) $\displaystyle\int \sqrt{1-4x-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{5}{2}\operatorname{arcsen}\Big(\frac{x+2}{\sqrt{5}}\Big) + \frac{1}{2}(x+2)\sqrt{1-4x-x^2};$

(e) $\displaystyle\int \operatorname{sen}(\ln x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\,x\big(\operatorname{sen}(\ln x) - \cos(\ln x)\big);$

(f) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}(2x)}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = -\ln\big(1+\cos^2 x\big);$

(g) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\Big(\frac{\sqrt{2}\,x}{\sqrt{1-x^2}}\Big).$