Oitava Lista

MAT5798 – Medida e Integração

Prof. Daniel Victor Tausk

05/06/2018

Exercício 1. Seja $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida e seja $(f_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de funções mensuráveis $f_n : X \to \mathbb{R}$ que converge em medida para uma função mensurável $f : X \to \mathbb{R}$. Mostre que se F é um subconjunto fechado de $\mathbb{R}$ tal que $f_n(x) \in F$ para quase todo $x \in X$ e todo $n \geq 1$, então $f(x) \in F$ para quase todo $x \in X$.

Exercício 2. Seja $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida e sejam $(f_n)_{n\geq 1}$ e $(g_n)_{n\geq 1}$ sequências de funções mensuráveis $f_n : X \to \mathbb{R}$ e $g_n : X \to \mathbb{R}$. Suponha que $(f_n)_{n\geq 1}$ convirja em medida para uma função mensurável $f : X \to \mathbb{R}$ e que $(g_n)_{n\geq 1}$ convirja em medida para uma função mensurável $g : X \to \mathbb{R}$. Mostre que $(f_n + g_n)_{n\geq 1}$ converge em medida para $f + g$. Supondo que exista $M \in [0, +\infty[$ tal que $|f_n(x)| \leq M$ e $|g_n(x)| \leq M$ para quase todo $x \in X$ e todo $n \geq 1$, mostre que $(f_n g_n)_{n\geq 1}$ converge em medida para fg.

Exercício 3. Seja $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida com $\mu(X) < +\infty$. Seja $(f_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de funções mensuráveis $f_n : X \to \mathbb{R}$ e seja $f : X \to \mathbb{R}$ uma função mensurável. Mostre que as seguintes condições são equivalentes:

(i) $(f_n)_{n\geq 1}$ converge para f em medida;

(ii) toda subsequência de $(f_n)_{n\geq 1}$ possui uma subsequência que converge pontualmente quase sempre para f.

(Sugestão: para (ii)$\Rightarrow$(i), faça por absurdo e use o Teorema de Egoroff.)

Exercício* 4. Considere o intervalo $[0, 1]$ munido da σ-álgebra de Borel e da medida de Lebesgue. Seja $\mathfrak{F}$ o espaço vetorial de todas as funções mensuráveis $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$. Mostre que não existe uma topologia em $\mathfrak{F}$ cuja noção de convergência de sequências correspondente seja a convergência pontual quase sempre, i.e., não existe uma topologia em $\mathfrak{F}$ tal que para toda sequência $(f_n)_{n\geq 1}$ em $\mathfrak{F}$ e toda $f \in \mathfrak{F}$, valha que $(f_n)_{n\geq 1}$ converge para f com respeito a essa topologia se, e somente se, $(f_n)_{n\geq 1}$ converge pontualmente quase sempre para f. (Sugestão: dada uma sequência $(p_n)_{n\geq 1}$ num espaço topológico $\mathfrak{X}$ e um ponto $p \in \mathfrak{X}$, se toda subsequência de $(p_n)_{n\geq 1}$ possui uma subsequência que converge para p, então $(p_n)_{n\geq 1}$ converge para p. Use que existe uma sequência em $\mathfrak{F}$ que converge em medida para zero, mas não converge pontualmente quase sempre para zero. Use também a implicação (i)$\Rightarrow$(ii) mostrada no Exercício 3.)