Oitava Lista

MAT0311 – Cálculo Diferencial e Integral V

Prof. Daniel Victor Tausk

05/10/2013

Exercício 1. Seja (M, d) um espaço métrico.

(a) Mostre que a união de uma família finita de subconjuntos compactos de M é compacta.

(b) Mostre que a interseção de uma família arbitrária (não vazia) de subconjuntos compactos de M é compacta. (Sugestão: recorde que um fechado de um espaço compacto é compacto.)

Exercício 2. Dizemos que uma família de conjuntos $(F_i)_{i\in I}$ tem a *propriedade da interseção finita* se para todo subconjunto finito não vazio J de I vale que $\bigcap_{i\in J} F_i \neq \emptyset$. Dado um espaço métrico não vazio (M, d), mostre que são equivalentes:

(a) M é compacto;

(b) para toda família não vazia de fechados $(F_i)_{i\in I}$ em M com a propriedade da interseção finita, vale que $\bigcap_{i\in I} F_i \neq \emptyset$.

(Sugestão: $\bigcap_{i\in I} F_i = \emptyset \Leftrightarrow M = \bigcup_{i\in I} F_i^{\mathrm{c}}$.)

Exercício 3. Sejam (M, d) um espaço métrico e $(F_n)_{n\geq 1}$ uma seqüência decrescente (isto é, $F_{n+1} \subset F_n$, para todo $n \geq 1$) de subconjuntos compactos não vazios de M. Mostre que $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \emptyset$. (Sugestão: use o resultado do Exercício 2 para o espaço métrico F_1.)

Definição 1. Um espaço métrico (M, d) é dito *totalmente limitado* se para todo $\varepsilon > 0$ existe uma cobertura finita $M = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ de M em que $\mathrm{diam}(A_i) < \varepsilon$, para todo $i = 1, \ldots, n$.

Exercício 4. Seja (M, d) um espaço métrico.

(a) Mostre que se M é totalmente limitado então todo subconjunto de M (munido da restrição de d) é totalmente limitado.

(b) Dado $\varepsilon > 0$, dizemos que um subconjunto D de M é ε-*denso* em M se para todo $x \in M$ existe $y \in D$ com $d(x, y) < \varepsilon$. Mostre que M é totalmente limitado se e somente se para todo $\varepsilon > 0$ existe um subconjunto finito ε-denso de M.

(c) Mostre que um subconjunto D de M é denso se e somente se ele é ε-denso, para todo $\varepsilon > 0$.

(d) Mostre que se M é totalmente limitado então M é separável (isto é, possui um subconjunto enumerável denso).

Exercício 5. Seja (M, d) um espaço métrico.

(a) Dado um subconjunto A de M, mostre que A e $\overline{A}$ têm o mesmo diâmetro. (Sugestão: todo elemento de $\overline{A}$ é limite de uma seqüência em A e a função $d : M \times M \to \mathbb{R}$ é contínua.)

(b) Mostre que M é totalmente limitado se e somente se para todo $\varepsilon > 0$ podemos cobrir M por um número finito de subconjuntos *fechados* de M com diâmetro menor do que ε.

(c) Mostre que se M possui um subconjunto denso D que (munido da métrica induzida) é totalmente limitado então M é totalmente limitado.

Exercício 6. Sejam (M, d), (N, d') espaços métricos e $f : M \to N$ uma função contínua. Mostre que se M é compacto então f é uniformemente contínua. (Sugestão: uma maneira fácil de resolver o exercício é fazer por absurdo e usar o fato que toda seqüência em M possui subseqüência convergente. Também é possível resolver o exercício usando coberturas abertas, mas há uma pequena dificuldade: tomando $\varepsilon > 0$, a continuidade de f em cada ponto $x \in M$ nos dá um $\delta_x > 0$. A tentativa mais óbvia para resolver o exercício seria considerar uma subcobertura finita de $\bigcup_{x \in M} \mathrm{B}(x, \delta_x)$, mas isso não vai funcionar. Você deve pegar uma subcobertura finita de $\bigcup_{x \in M} \mathrm{B}\big(x, \frac{1}{2}\delta_x\big)$.)

Exercício* 7. Sejam (M, d) um espaço métrico e $(U_i)_{i \in I}$ uma cobertura de M. Um *número de Lebesgue* para $(U_i)_{i \in I}$ é um número positivo δ tal que, para todo subconjunto A de M, se $\operatorname{diam}(A) < \delta$ então $A \subset U_i$, para algum $i \in I$. Mostre que se M é compacto e $(U_i)_{i \in I}$ é uma cobertura aberta não vazia de M então $(U_i)_{i \in I}$ possui um número de Lebesgue.

Definição 2. Seja (M, d) um espaço métrico. Dados um subconjunto A de M e um ponto $p \in M$, definimos a *distância de p até A* fazendo:

$$d(p, A) = \inf_{x \in A} d(p, x).$$

Se A e B são subconjuntos de M, definimos a *distância de A até B* fazendo:

$$d(A, B) = \inf_{\substack{x \in A \\ y \in B}} d(x, y).$$

Exercício 8. Sejam (M, d) um espaço métrico e A um subconjunto não vazio de M. Mostre que, dados $p, q \in M$, vale a desigualdade:

$$|d(p, A) - d(q, A)| \leq d(p, q).$$

(Sugestão: mostre primeiro que $d(p, A) \leq d(p, q) + d(q, A)$.) Conclua que a função:

$$d_A : M \ni p \longmapsto d(p, A) \in \mathbb{R}$$

é Lipschitziana (e portanto uniformemente contínua e contínua).

Exercício 9. Seja (M, d) um espaço métrico. Dados $A \subset M$ e $p \in M$, mostre que $p \in \overline{A}$ se e somente se $d(p, A) = 0$.

Exercício 10. Seja (M, d) um espaço métrico.

(a) Se K é um subconjunto compacto não vazio de M e $p \in M$, mostre que existe $x \in K$ com $d(p, x) = d(p, K)$.

(b) Se K e L são subconjuntos compactos não vazios de M, mostre que existem $x \in K$, $y \in L$ com $d(x, y) = d(K, L)$. (Sugestão: a função $d|_{K \times L}$ é contínua.)

Exercício 11. Seja (M, d) um espaço métrico.

(a) Se K é um subconjunto compacto de M, F é um subconjunto fechado de M e $K \cap F = \emptyset$, mostre que $d(K, F) > 0$. (Sugestão: segue do resultado do Exercício 8 que a função $d_F|_K : K \ni p \mapsto d(p, F) \in \mathbb{R}$ é contínua. Use o resultado do Exercício 9.)

(b) Seja $M = \mathbb{R}^2$ munido de uma de suas métricas usuais. Sejam:

$$F_1 = \mathbb{R} \times \{0\}, \quad F_2 = \big\{ \big(x, \tfrac{1}{x}\big) : x > 0 \big\}.$$

Mostre que F_1 e F_2 são fechados em M, que $F_1 \cap F_2 = \emptyset$, mas que $d(F_1, F_2) = 0$.

Como veremos no Exercício 12 a seguir, a hipótese de que K é compacto no Exercício 10 pode ser substituída pela hipótese de que K é fechado, no caso em que $M = \mathbb{R}^n$. No entanto, como veremos no Exercício 13, a hipótese de K ser compacto é realmente necessária se M for um espaço métrico arbitrário.

Exercício 12. Considere $\mathbb{R}^n$ munido de uma de suas métricas usuais e seja F um subconjunto fechado não vazio de $\mathbb{R}^n$.

(a) Dado $p \in \mathbb{R}^n$, mostre que existe $x \in F$ com $d(p, x) = d(p, F)$. (Sugestão: você pode substituir F pelo compacto $F \cap \mathrm{B}[p, r]$, onde $r > 0$ é grande o suficiente para que $F \cap \mathrm{B}[p, r] \neq \emptyset$.)

(b) Dado um subconjunto compacto não vazio K de $\mathbb{R}^n$, mostre que existem $p \in K$, $x \in F$ com $d(p, x) = d(K, F)$. (Sugestão: a continuidade da função d_F em K — veja Exercício 8 — nos dá $p \in K$ com $d(p, F) = d(K, F)$. Agora use o resultado do item (a).)

Exercício 13. Seja $M = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, munido da restrição da métrica usual de $\mathbb{R}$. Sejam $F = \,]0, 1]$ e $p = -1$. Mostre que F é fechado em M, mas não existe $x \in F$ com $d(p, x) = d(p, F)$.

Como se vê no Exercício 14 a seguir, mesmo no caso em que M é completo a hipótese de que K é compacto não pode ser substituída pela hipótese de que K é fechado no item (a) do Exercício 10.

Exercício* 14. Seja $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ uma seqüência em $\left]\frac{1}{2}, 1\right]$ convergindo para $\frac{1}{2}$. Seja $M = \{1, 2, \ldots\} \cup \{p\}$, onde p é qualquer elemento fora de $\{1, 2, \ldots\}$. Defina $d : M \times M \to \mathbb{R}$ fazendo:

(i) $d(x, x) = 0$, para todo $x \in M$;
(ii) $d(n, m) = 1$, para $n, m \in \{1, 2, \ldots\}$, $n \neq m$;
(iii) $d(n, p) = d(p, n) = \lambda_n$, para $n \in \{1, 2, \ldots\}$.

Mostre que:

(a) d é uma métrica em M;
(b) (M, d) é completo;
(c) $F = \{1, 2, \ldots\}$ é fechado em M;
(d) não existe $n \in F$ com $d(p, n) = d(p, F)$.