Oitava Lista

MAT0216 – Cálculo Diferencial e Integral III

Prof. Daniel Victor Tausk

27/04/2019

Exercício 1. Considere um fluido preenchendo a bola B de centro na origem e raio 1 de $\mathbb{R}^3$ com densidade de massa por volume no instante $t = 0$ dada por:

$$\mu_0(x, y, z) = |z|,$$

para todo $(x, y, z) \in B$. A partícula desse fluido que no instante $t = 0$ está no ponto $(x, y, z) \in B$ move-se pelo espaço de modo que num instante de tempo $t \geq 0$ ela ocupa a posição:

$$\Psi_t(x, y, z) = (x + ty, (1 + t)y, z - tx^2). \tag{1}$$

Sejam $B_t = \Psi_t[B]$ a região ocupada por esse fluido no instante $t \geq 0$ e $\mu_t : B_t \to [0, +\infty[$ a função densidade de massa por volume do fluido no instante t.

(a) Verifique que para todo $t \geq 0$ a função $\Psi_t : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por (1) para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ é bijetora e obtenha uma fórmula explícita para sua função inversa Ψ_t^{-1}.

(b) Calcule o volume da região B_t ocupada pelo fluido num instante $t \geq 0$.

(c) Dados $t \geq 0$ e $(x, y, z) \in B$, determine o valor de μ_t no ponto $(x', y', z') = \Psi_t(x, y, z)$ em função de (x, y, z) e t.

(d) Dado $t \geq 0$, determine o valor de μ_t num ponto $(x', y', z') \in B_t$ arbitrário em função de (x', y', z') e t.

Definição 1. Uma *densidade de probabilidade* na reta real é uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ e tal que a integral $\int_{\mathbb{R}} f$ existe e é igual a 1. Uma densidade de probabilidade na reta real pode ser usada, por exemplo, para modelar algum experimento que produz como resultado um número real X em situações em que o experimento pode ser repetido muitas vezes de forma independente e os resultados obtidos nessas várias repetições exibem alguma regularidade estatística[1]. Dado um intervalo $I \subset \mathbb{R}$ (ou, mais geralmente, um subconjunto Jordan mensurável I de $\mathbb{R}$), então a integral $\int_I f$ é a probabilidade de que o resultado X do experimento pertença a I. O *valor esperado*[2] (ou *média*) dessa densidade de probabilidade é definido por

$$\mu = \int_{\mathbb{R}} x f(x)\,\mathrm{d}x,$$

caso essa integral exista. Essa integral é simplesmente a média dos valores x que o resultado do experimento pode assumir, ponderados por suas probabilidades. A *variância* da densidade de probabilidade f é definida por

$$\sigma^2 = \int_{\mathbb{R}} (x-\mu)^2 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Essa integral é a média dos quadrados $(x-\mu)^2$ dos desvios em relação à média μ dos valores x que o resultado do experimento pode assumir, ponderados pelas suas probabilidades. O número σ (que é a raiz quadrada da variância) é o *desvio padrão* dessa densidade de probabilidade. A variância (ou o desvio padrão) são medidas de dispersão da densidade de probabilidade: variância pequena significa que os resultados tendem a ficar muito próximos da média.

[1]Em teoria de probabilidades esse X é chamado uma *variável aleatória* e é representada no formalismo matemático como uma função a valores reais definida num espaço de probabilidade. Um *espaço de probabilidade* é um conjunto Ω em que está definida uma *medida de probabilidade* que associa a cada evento (representado no formalismo pelo conjunto dos elementos de Ω favoráveis a esse evento) a probabilidade de ele ocorrer. Diz-se que f é a *função densidade de probabilidade* da variável aleatória X. Nem toda variável aleatória admite uma densidade de probabilidade. Por exemplo, a distribuição de probabilidade de uma variável aleatória *discreta* (que incluem aquelas que só assumem um número finito de valores) é descrita simplesmente pela atribuição de probabilidades aos valores individuais que a variável assume. Nesse caso não há função densidade de probabilidade associada.

[2]Esse nome é um pouco infeliz. Não tem nada a ver com "um valor que esperamos obter", é apenas uma média.

Exercício 2 (distribuição Gaussiana)**.** Seja α uma constante positiva.

(a) Calcule as integrais:
$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\alpha x^2}\,\mathrm{d}x, \quad \int_{\mathbb{R}} x e^{-\alpha x^2}\,\mathrm{d}x \quad \text{e} \quad \int_{\mathbb{R}} x^2 e^{-\alpha x^2}\,\mathrm{d}x.$$

(b) Encontre uma constante $k \in \mathbb{R}$ tal que a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por
$$f(x) = k e^{-\alpha x^2},$$
para todo $x \in \mathbb{R}$, seja uma densidade de probabilidade.

(c) Tomando k como no item (b) e dado $\sigma > 0$, encontre um valor para α tal que a densidade de probabilidade f tenha desvio padrão σ.

(d) Seja $\mu \in \mathbb{R}$. Tomando k como no item (b) e α como no item (c), conclua que a função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por
$$g(x) = k e^{-\alpha (x-\mu)^2},$$
para todo $x \in \mathbb{R}$, é uma densidade de probabilidade com média μ e desvio padrão σ. Escreva explicitamente a fórmula para g, usando os valores de α e k obtidos nos itens anteriores. Essa densidade de probabilidade g é a famosa *distribuição Gaussiana* (ou *distribuição normal*) de média μ e desvio padrão σ.

Exercício 3. Considere um fio unidimensional em formato de hélice ocupando a região C de $\mathbb{R}^3$ definida por
$$C = \big\{(R\cos\theta, R\,\mathrm{sen}\,\theta, h\theta) : \theta \in [0, 2\pi n]\big\},$$
em que R e h são constantes reais positivas e n é um inteiro positivo dado.

(a) Esboce um desenho de C e explique o significado geométrico das constantes R, h e n.

(b) Suponha que a densidade de massa por comprimento de arco desse fio num ponto $(x, y, z) \in C$ seja dada por $\mu(x, y, z) = kz$, em que $k > 0$ é uma constante. Determine a massa total M do fio em função de R, h, n e k.

(c) Determine o centro de massa do fio em função de R, h, n e M.

O resultado do exercício a seguir nos diz que transformações lineares entram em integrais. Isso era de se esperar, já que transformações lineares entram em somatórias e integrais são limites de somatórias. Esse resultado será usado na solução do Exercício 5 logo adiante.

Exercício* 4. Seja $f : X \to \mathbb{R}^n$ uma função Riemann integrável definida num subconjunto Jordan mensurável X de $\mathbb{R}^m$. Se $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ é uma transformação linear, mostre que $T \circ f$ é Riemann integrável e que:
$$\int_X T \circ f = T\Big(\int_X f\Big).$$

O resultado do exercício a seguir torna rigoroso e generaliza o fato que o centro de massa de uma distribuição de matéria pertence a qualquer eixo de simetria dessa distribuição de matéria.

Exercício* 5. Seja $\mu : X \to [0, +\infty[$ uma função Riemann integrável definida num subconjunto Jordan mensurável X de $\mathbb{R}^n$ de modo que a integral $M = \int_X \mu$ seja finita e positiva. O *centro de massa* de X com respeito à função densidade de massa por volume μ é definido por:

$$\mathrm{CM}(X, \mu) = \frac{1}{M} \int_X \mu(x_1, \dots, x_n)(x_1, \dots, x_n)\, \mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_n.$$

Dada uma transformação afim bijetora $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, mostre que:

$$\mathrm{CM}\big(T[X], \mu \circ T^{-1}\big) = T\big(\mathrm{CM}(X, \mu)\big).$$

Conclua que se T é uma *simetria* da distribuição de matéria que há em X, isto é, se $T[X] = X$ e $\mu = \mu \circ T$, então o centro de massa $\mathrm{CM}(X, \mu)$ é um ponto fixo de T, isto é, $T\big(\mathrm{CM}(X, \mu)\big) = \mathrm{CM}(X, \mu)$.

Sugestões

Exercício 1. (a) Tome $(x', y', z') \in \mathbb{R}^3$ arbitrário e verifique que o sistema $\Psi_t(x, y, z) = (x', y', z')$ possui uma única solução $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

(c) Segue do resultado que você obteve no item (a) que Ψ_t é um difeomorfismo de classe C^∞. Segue daí que a densidade μ_t satisfaz a relação

$$\mu_t\big(\Psi_t(x, y, z)\big)\big|\det J\Psi_t(x, y, z)\big| = \mu_0(x, y, z),$$

para todo $(x, y, z) \in B$.

Exercício 2. (a) Para calcular $\int_{\mathbb{R}} x^2 e^{-\alpha x^2}\,\mathrm{d}x$ use integração por partes.

(d) Use a substituição de variáveis $x - \mu = y$.

Exercício 4. Se f_j, $j = 1, \dots, n$, denotam as funções coordenadas de f e se $(a_{ij})_{p \times n}$ é a matriz que representa T, então as funções coordenadas g_i, $i = 1, \dots, p$, de $g = T \circ f$ são dadas por $g_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} f_j$.

Exercício 5. Temos

$$\mathrm{CM}\big(T[X], \mu \circ T^{-1}\big) = \frac{1}{M'} \int_{T[X]} (\mu \circ T^{-1})(y_1, \dots, y_n)(y_1, \dots, y_n)\,\mathrm{d}y_1 \dots \mathrm{d}y_n,$$

com a massa total M' dada por:

$$M' = \int_{T[X]} (\mu \circ T^{-1})(y_1, \dots, y_n)\,\mathrm{d}y_1 \dots \mathrm{d}y_n.$$

Use a substituição da variáveis $(y_1, \dots, y_n) = T(x_1, \dots, x_n)$ para calcular as integrais acima. Pela definição de função afim, temos que $T(x) = T_0(x) + v$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$, sendo $T_0 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma transformação linear e $v \in \mathbb{R}^n$ fixado. Note que a matriz Jacobiana de T em qualquer ponto coincide com a matriz que representa a transformação linear T_0. Use o resultado do Exercício 4.

Respostas

Exercício 1. (a) Temos

$$\Psi_t^{-1}(x',y',z') = \left(x' - \frac{t}{1+t}\,y',\, \frac{1}{1+t}\,y',\, z' + t\Big(x' - \frac{t}{1+t}\,y'\Big)^2\right),$$

para todo $(x',y',z') \in \mathbb{R}^3$ e todo $t \geq 0$.

(b) Segue do item (a) que Ψ_t é um difeomorfismo de classe C^1 (na verdade, de classe C^∞) e portanto podemos usar o Teorema de Mudança de Variáveis para fazer a substituição

$$(x',y',z') = \Psi_t(x,y,z),$$
$$\mathrm{d}x'\mathrm{d}y'\mathrm{d}z' = \big|\det J\Psi_t(x,y,z)\big|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = (1+t)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

na integral $\iiint_{B_t} 1\,\mathrm{d}x'\mathrm{d}y'\mathrm{d}z'$ obtendo

$$\begin{aligned}\mathrm{vol}(B_t) = \iiint_{B_t} 1\,\mathrm{d}x'\mathrm{d}y'\mathrm{d}z' = \iiint_B (1+t)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z &= (1+t)\,\mathrm{vol}(B)\\ &= \frac{4}{3}\pi(1+t),\end{aligned}$$

para todo $t \geq 0$.

(c) Como Ψ_t é um difeomorfismo de classe C^1, temos

$$\mu_t\big(\Psi_t(x,y,z)\big)\big|\det J\Psi_t(x,y,z)\big| = \mu_0(x,y,z) = |z|,$$

com $\big|\det J\Psi_t(x,y,z)\big| = 1+t$ e portanto

$$\mu_t(x',y',z') = \frac{1}{1+t}\,|z|,$$

para todo $t \geq 0$, em que $(x',y',z') = \Psi_t(x,y,z)$.

(d) Basta usar a fórmula obtida no item (a) e substituir (x,y,z) por $\Psi_t^{-1}(x',y',z')$ na fórmula para μ_t obtida no item (c), o que nos dá:

$$\mu_t(x',y',z') = \frac{1}{1+t}\left|z' + t\Big(x' - \frac{t}{1+t}\,y'\Big)^2\right|.$$

Exercício 2. (a) Temos:

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\alpha x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}, \quad \int_{\mathbb{R}} x e^{-\alpha x^2}\,\mathrm{d}x = 0 \quad \text{e} \quad \int_{\mathbb{R}} x^2 e^{-\alpha x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\alpha}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\cdot$$

(b) $k = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}\cdot$

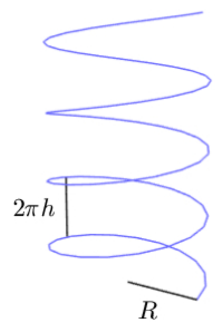
(c) $\alpha = \frac{1}{2\sigma^2}\cdot$

(d) Temos

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\,e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Exercício 3. (a) No esboço abaixo usamos $n = 4$ e o eixo z é vertical:



Temos que R é o raio da hélice (ou melhor, o raio do círculo que é a sombra da hélice no plano $z = 0$), h é uma medida de quão rápido a hélice sobe enquanto gira (um ponto se movendo sobre a hélice sobe $2\pi h$ a cada volta completa) e n é o número total de voltas.

(b) A massa total do fio é dada por:

$$M = \int_C \mu \,\mathrm{d}s = \int_0^{2\pi n} kh\theta\sqrt{R^2+h^2}\,\mathrm{d}\theta = 2\pi^2 n^2 kh\sqrt{R^2+h^2},$$

já que $\mathrm{d}s = \sqrt{R^2+h^2}\,\mathrm{d}\theta$.

(c) O centro de massa do fio é dado por:

$$\begin{aligned}\frac{1}{M}\int_C \mu(x,y,z)(x,y,z)\,\mathrm{d}s &= \frac{1}{M}\int_0^{2\pi n} kh\theta(R\cos\theta, R\,\mathrm{sen}\,\theta, h\theta)\sqrt{R^2+h^2}\,\mathrm{d}\theta\\ &= \frac{1}{2\pi^2 n^2}\int_0^{2\pi n}(R\theta\cos\theta, R\theta\,\mathrm{sen}\,\theta, h\theta^2)\,\mathrm{d}\theta\\ &= \Big(0, -\frac{R}{\pi n}, \frac{4\pi h n}{3}\Big).\end{aligned}$$

Exercício 4. Continuando o argumento iniciado na sugestão, devemos mostrar que g é Riemann integrável e que $\int_X g = T\big(\int_X f\big)$. Temos que g é Riemann integrável pois cada função coordenada de g é uma combinação linear das funções coordenadas de f, as quais são Riemann integráveis. Para verificar a igualdade $\int_X g = T\big(\int_X f\big)$, verificamos que a i-ésima coordenada de $\int_X g$ é igual à i-ésima coordenada de $T\big(\int_X f\big)$, para todo $i = 1,\ldots,p$. Temos que a i-ésima coordenada de $\int_X g$ é igual a $\int_X g_i$ e que

$$\int_X g_i = \int_X \sum_{j=1}^n a_{ij} f_j = \sum_{j=1}^n a_{ij}\int_X f_j,$$

sendo que $\sum_{j=1}^n a_{ij}\int_X f_j$ é precisamente a i-ésima coordenada de $T\big(\int_X f\big)$.

Exercício 5. Continuando o argumento iniciado na sugestão, calculamos primeiro a nova massa total M' usando a substituição de variáveis $(y_1, \ldots, y_n) = T(x_1, \ldots, x_n)$, notando que a matriz Jacobiana de T é a matriz A que representa a transformação linear T_0:

$$\begin{aligned} M' &= \int_{T[X]} (\mu \circ T^{-1})(y_1, \ldots, y_n) \, \mathrm{d}y_1 \ldots \mathrm{d}y_n \\ &= \int_X \mu(x_1, \ldots, x_n) |\det A| \, \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n \\ &= |\det A| M. \end{aligned}$$

Agora usamos a mesma substituição de variáveis para o cálculo do novo centro de massa

$$\begin{aligned} \mathrm{CM}\big(T[X], \mu \circ T^{-1}\big) &= \frac{1}{M'} \int_{T[X]} (\mu \circ T^{-1})(y_1, \ldots, y_n)(y_1, \ldots, y_n) \, \mathrm{d}y_1 \ldots \mathrm{d}y_n \\ &= \frac{1}{M'} \int_X \mu(x_1, \ldots, x_n) T(x_1, \ldots, x_n) |\det A| \, \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n \\ &= \frac{1}{M} \int_X \mu(x_1, \ldots, x_n) T(x_1, \ldots, x_n) \, \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n \\ &= \frac{1}{M} \int_X \mu(x_1, \ldots, x_n) \big(T_0(x_1, \ldots, x_n) + v\big) \, \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n \\ &= \frac{1}{M} T_0\Big(\int_X \mu(x_1, \ldots, x_n)(x_1, \ldots, x_n) \, \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n \Big) + v \\ &= T\big(\mathrm{CM}(X, \mu)\big), \end{aligned}$$

em que na penúltima igualdade usamos o resultado do Exercício 4 e o fato que $\int_X \mu(x_1, \ldots, x_n) v \, \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n = Mv$.