Oitava Lista

MAT0206 – Análise Real
MAP0216 – Introdução à Análise Real

Prof. Daniel Victor Tausk
02/06/2012

A título de recordação, as definições e resultados vistos em aula foram colocados na lista.

Definição 1. Sejam $S \subset \mathbb{R}$ e $x \in \mathbb{R}$. Dizemos que x é um *ponto interior* de S se existe $\varepsilon > 0$ tal que $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\ \subset S$ e que x é um *ponto de aderência* de S se para todo $\varepsilon > 0$ vale que $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\ \cap S \neq \emptyset$. Denotamos por $\mathrm{int}(S)$ o conjunto dos pontos interiores de S e por $\overline{S}$ o conjunto dos pontos de aderência de S. O conjunto $\mathrm{int}(S)$ é chamado o *interior* de S e o conjunto $\overline{S}$ é chamado o *fecho* de S.

Exercício 1. Dado $S \subset \mathbb{R}$, mostre que $\mathrm{int}(S) \subset S$ e que $S \subset \overline{S}$.

Definição 2. Dizemos que um subconjunto S de $\mathbb{R}$ é *aberto* se $\mathrm{int}(S) = S$ (equivalentemente, S é aberto se para todo $x \in S$ existe $\varepsilon > 0$ tal que $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\ \subset S$) e que S é *fechado* se $\overline{S} = S$.

Exercício 2. Dados subconjuntos A, B de $\mathbb{R}$, mostre que se $A \subset B$ então $\mathrm{int}(A) \subset \mathrm{int}(B)$ e $\overline{A} \subset \overline{B}$.

Exercício 3. Mostre que:

(i) dados $a, b \in \mathbb{R}$ com $a < b$ então o intervalo aberto $]a, b[$ é um conjunto aberto e é igual ao interior do intervalo fechado $[a, b]$;

(ii) dado $a \in \mathbb{R}$ então os intervalos abertos $]-\infty, a[$ e $]a, +\infty[$ são conjuntos abertos e são iguais, respectivamente, aos interiores dos intervalos fechados $]-\infty, a]$ e $[a, +\infty[$.

Lembramos que os seguintes resultados foram demonstrados em aula:

(1) dado $S \subset \mathbb{R}$, então o complementar do fecho de S coincide com o interior do complementar de S;

(2) um subconjunto de $\mathbb{R}$ é fechado se e somente se o seu complementar for aberto;

(3) o conjunto vazio $\emptyset$ e a reta real $\mathbb{R}$ são ao mesmo tempo abertos e fechados;

(4) a união de uma família arbitrária de abertos é um aberto e a interseção de uma família finita (não vazia) de abertos é um aberto;

(5) a interseção de uma família (não vazia) arbitrária de fechados é um fechado e a união de uma família finita de fechados é um fechado;

(6) o interior de um conjunto $S \subset \mathbb{R}$ é aberto e é o maior aberto contido em S (ou seja, ele contém todo aberto contido em S);

(7) o fecho de um conjunto $S \subset \mathbb{R}$ é fechado e é o menor fechado que contém S (ou seja, ele está contido em todo fechado que contém S).

Exercício 4. Mostre que um subconjunto unitário de $\mathbb{R}$ é fechado. Conclua que todo subconjunto finito de $\mathbb{R}$ é fechado.

Exercício 5. Mostre que:

(i) dados $a, b \in \mathbb{R}$ com $a \leq b$ então o intervalo fechado $[a, b]$ é um conjunto fechado e que, se $a < b$, o intervalo fechado $[a, b]$ é o fecho do intervalo aberto $]a, b[$;

(ii) dado $a \in \mathbb{R}$ então os intervalos fechados $]-\infty, a]$ e $[a, +\infty[$ são conjuntos fechados e são iguais, respectivamente, aos fechos dos intervalos abertos $]-\infty, a[$ e $]a, +\infty[$.

Exercício 6. Mostre que se $U \subset \mathbb{R}$ é aberto e $F \subset \mathbb{R}$ é fechado então a diferença $U \setminus F$ é aberta e a diferença $F \setminus U$ é fechada. (Sugestão: note que a diferença $A \setminus B$ é igual à interseção de A com o complementar de B.)

Exercício 7. Mostre que o conjunto dos inteiros $\mathbb{Z}$ é fechado. Mais geralmente, mostre que qualquer subconjunto de $\mathbb{Z}$ é fechado.

Definição 3. Um subconjunto K de $\mathbb{R}$ é dito *compacto* se for ao mesmo tempo limitado e fechado.

Exercício 8. Seja $A \subset \mathbb{R}$. Mostre que se A admite supremo então $\sup A$ é um ponto de aderência de A. Similarmente, mostre que se A admite ínfimo então $\inf A$ é um ponto de aderência de A. Conclua que um subconjunto compacto não vazio de $\mathbb{R}$ possui máximo e mínimo.

Exercício 9. Dados subconjuntos A, B de $\mathbb{R}$, mostre que:

$$\mathrm{int}(A \cap B) = \mathrm{int}(A) \cap \mathrm{int}(B).$$

Mostre também que:

$$\mathrm{int}(A) \cup \mathrm{int}(B) \subset \mathrm{int}(A \cup B)$$

e encontre um exemplo em que $\mathrm{int}(A) \cup \mathrm{int}(B) \neq \mathrm{int}(A \cup B)$.

Exercício 10. Dados subconjuntos A, B de $\mathbb{R}$, mostre que:

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

Mostre também que:

$$\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$$

e encontre um exemplo em que $\overline{A \cap B} \neq \overline{A} \cap \overline{B}$.

Definição 4. Dado um subconjunto S de $\mathbb{R}$ e um ponto $x \in \mathbb{R}$, dizemos que x é um *ponto de fronteira* de S se para todo $\varepsilon > 0$ temos que:

$$]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\cap S \neq \emptyset \quad \text{e} \quad]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\cap S^{\mathrm{c}} \neq \emptyset,$$

onde $S^{\mathrm{c}} = \mathbb{R} \setminus S$ denota o complementar de S. A *fronteira* de S é o conjunto ∂S de todos os pontos de fronteira de S.

Exercício 11. Dado $S \subset \mathbb{R}$, mostre que a fronteira de S é igual à interseção do fecho de S com o fecho do complementar de S.

Exercício 12. Dado $S \subset \mathbb{R}$, mostre que S e S^{c} têm a mesma fronteira.

Exercício 13. Dado $S \subset \mathbb{R}$, mostre que para um ponto qualquer $x \in \mathbb{R}$ vale *exatamente uma* das três seguintes condições:

(i) x está no interior de S;
(ii) x está no interior de S^c;
(iii) x está na fronteira de S.

Em outras palavras, a reta $\mathbb{R}$ é igual à união disjunta de $\mathrm{int}(S)$, $\mathrm{int}(S^c)$ e ∂S. Mostre também que o fecho de S é igual à união de $\mathrm{int}(S)$ e ∂S. (Sugestão: recorde que o complementar do fecho de S é $\mathrm{int}(S^c)$.)

Exercício 14. Mostre que um subconjunto S de $\mathbb{R}$ é aberto se e somente se ∂S é disjunto de S e que S é fechado se e somente se $\partial S \subset S$. Conclua que S é ao mesmo tempo aberto e fechado se e somente se ∂S é vazio.

Exercício 15. Dado um subconjunto A de $\mathbb{R}$, defina:

$$-A = \big\{-x : x \in A\big\}.$$

Mostre que se A é aberto então $-A$ é aberto e que se A é fechado então $-A$ é fechado.

Exercício 16. O objetivo deste exercício é mostrar que se $A \subset \mathbb{R}$ é ao mesmo tempo aberto e fechado então A é vazio ou $A = \mathbb{R}$.

(a) Seja $A \subset \mathbb{R}$ aberto e fechado e suponha que $0 \in A$. Mostre que $[0, +\infty[\subset A$. (Sugestão: considere o conjunto:

$$S = \big\{t \in [0, +\infty[\,:\, [0, t] \subset A\big\}.$$

Note que S é não vazio, já que $[0, 0] = \{0\} \subset A$. Suponha por absurdo que S seja limitado superiormente e considere $s = \sup S$. Mostre primeiro que $[0, s[\subset A$ e use o fato que A é fechado para concluir que $[0, s] \subset A$. Depois, use o fato que A é aberto para obter uma contradição. Conclua que S não é limitado superiormente e deduza daí que $[0, +\infty[\subset A$.)

(b) Use o item (a) e o resultado do Exercício 15 para concluir que se $A \subset \mathbb{R}$ é aberto e fechado e $0 \in A$ então $]-\infty, 0] \subset A$. Conclua que, nessas condições, $A = \mathbb{R}$.

(c) Mostre que se $A \subset \mathbb{R}$ é aberto e fechado então $A = \mathbb{R}$ ou $A = \emptyset$. (Sugestão: note que $0 \in A$ ou $0 \in A^c$.)

Os seguintes resultados foram vistos em aula:

Proposição 1. *Sejam $S \subset \mathbb{R}$ e $x \in \mathbb{R}$. Então x é um ponto de aderência de S se e somente se x é o limite de uma seqüência em S.*

Corolário 1. *Um subconjunto S de $\mathbb{R}$ é fechado se e somente se o limite de qualquer seqüência em S que seja convergente está em S.*

Proposição 2. *Sejam $S \subset \mathbb{R}$ e $x \in \mathbb{R}$. Então x é um ponto interior de S se e somente se para toda seqüência $(x_n)_{n\geq 1}$ em $\mathbb{R}$ que converge para x, temos que $x_n \in S$ para n suficientemente grande (i.e., existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tal que $x_n \in S$, para todo $n \geq n_0$).*

Corolário 2. *Um subconjunto S de $\mathbb{R}$ é aberto se e somente se para toda seqüência convergente $(x_n)_{n\geq 1}$ em $\mathbb{R}$ tal que $\lim_{n\to+\infty} x_n \in S$, temos que $x_n \in S$ para n suficientemente grande.*

Proposição 3. *Um subconjunto K de $\mathbb{R}$ é compacto se e somente se toda seqüência em K possui uma subseqüência que converge em K (i.e., essa subseqüência converge e o seu limite está em K).*