Oitava Lista

MAT0121 – Cálculo Diferencial e Integral II

Prof. Daniel Victor Tausk
10/10/2018

Exercício 1. Em cada um dos itens abaixo, calcule o vetor gradiente e todas as derivadas direcionais num ponto arbitrário do domínio da função diferenciável f dada.

(a) $f : \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\} \to \mathbb{R}$ definida por
$$f(x,y,z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$
para todo $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$;

(b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por
$$f(x,y) = \operatorname{sen}(xy) e^{x^2+y^2},$$
para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$;

(c) $f :]0,+\infty[\times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por
$$f(x,y) = x^y,$$
para todo $x > 0$ e todo $y \in \mathbb{R}$.

Exercício 2. Em cada um dos itens abaixo, calcule as derivadas direcionais na origem da função f dada (se existirem) e decida se f é contínua e se é diferenciável na origem.

(a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \dfrac{x^3 y^2}{x^4 + y^4}$, se $(x,y) \neq (0,0)$ e $f(0,0) = 0$;

(b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \dfrac{x^3 y}{x^6 + y^2}$, se $(x,y) \neq (0,0)$ e $f(0,0) = 0$;

(c) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \dfrac{xy^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, se $(x,y) \neq (0,0)$ e $f(0,0) = 0$;

(d) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \dfrac{2x^3 + 2xy^2 + y^3 \operatorname{sen} x}{x^2 + y^2}$, se $(x,y) \neq (0,0)$ e $f(0,0) = 0$;

(e) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \dfrac{x^3 y}{x^4 + y^2}$, se $(x,y) \neq (0,0)$ e $f(0,0) = 0$.

Respostas

Exercício 1.

(a) $\nabla f(x,y,z) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}(x,y,z)$ e

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}(xv_1+yv_2+zv_3),$$

em que $\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$;

(b) $\nabla f(x,y) = e^{x^2+y^2}\big(y\cos(xy)+2x\,\mathrm{sen}(xy), x\cos(xy)+2y\,\mathrm{sen}(xy)\big)$ e

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x,y) = e^{x^2+y^2}\big[\big(y\cos(xy)+2x\,\mathrm{sen}(xy)\big)v_1+\big(x\cos(xy)+2y\,\mathrm{sen}(xy)\big)v_2\big],$$

em que $\vec{v}=(v_1,v_2)$;

(c) $\nabla f(x,y) = (yx^{y-1}, x^y\ln x) = x^{y-1}(y, x\ln x)$ e

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x,y) = x^{y-1}(yv_1+xv_2\ln x),$$

em que $\vec{v}=(v_1,v_2)$.

Exercício 2.

(a) a derivada direcional $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0)$ é igual a

$$\frac{v_1^3v_2^2}{v_1^4+v_2^4},$$

se $\vec{v}=(v_1,v_2)\neq(0,0)$ e $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0)=0$, se $\vec{v}=(0,0)$; a função f é contínua, mas não é diferenciável na origem;

(b) a derivada direcional $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0)$ é nula, para todo $\vec{v}\in\mathbb{R}^2$; a função f não é contínua nem diferenciável na origem;

(c) a derivada direcional $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0)$ é nula, para todo $\vec{v}\in\mathbb{R}^2$; a função f é contínua e diferenciável na origem;

(d) a derivada direcional $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0)$ é igual a $2v_1$, para todo $\vec{v}=(v_1,v_2)$ em $\mathbb{R}^2$; a função f é contínua e diferenciável na origem;

(e) a derivada direcional $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0)$ é nula, para todo $\vec{v}\in\mathbb{R}^2$; a função f é contínua, mas não é diferenciável na origem.