Oitava Lista

MAT0112 – Vetores e Geometria

Prof. Daniel Victor Tausk
16/06/2018

Exercício 1. Seja $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ um sistema de coordenadas em E^3, em que $\mathcal{B}$ é uma base ortonormal de V^3. Considere a reta r dada pela equação simétrica

$$r : \frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{5} = \frac{2-z}{3}$$

no sistema de coordenadas Σ. Seja $P = (1, 3, 2)_\Sigma$.

(a) Determine a distância de P a r.

(b) Determine o ponto $Q \in r$ tal que $\overrightarrow{PQ}$ seja ortogonal a r.

(c) Determine o ponto R que é *simétrico a P em relação a r*, isto é, $\overrightarrow{PR}$ é ortogonal a r e o ponto médio entre P e R está em r.

Exercício 2. Seja $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ um sistema de coordenadas em E^3, em que $\mathcal{B}$ é uma base ortonormal de V^3. Considere o plano π dado pela equação geral

$$\pi : x - 2y + z = 4$$

no sistema de coordenadas Σ. Seja $P = (1, 1, -1)_\Sigma$.

(a) Determine a distância de P a π.

(b) Determine o ponto $Q \in \pi$ tal que $\overrightarrow{PQ}$ seja ortogonal a π.

(c) Determine o ponto R que é *simétrico a P em relação a π*, isto é, $\overrightarrow{PR}$ é ortogonal a π e o ponto médio entre P e R está em π.

Exercício 3. Seja $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ um sistema de coordenadas em E^3, em que $\mathcal{B}$ é uma base ortonormal de V^3. Considere as retas r e s dadas pelas equações vetoriais:

$$r : X = (-1, 0, 1)_\Sigma + \lambda(1, 1, 2)_\mathcal{B}, \quad \lambda \in \mathbb{R} \qquad \text{e}$$
$$s : X = (2, 1, 1)_\Sigma + \lambda(-1, 3, 2)_\mathcal{B}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

(a) Determine a distância entre r e s.

(b) Determine os pontos $P \in r$ e $Q \in s$ tais que o vetor $\overrightarrow{PQ}$ seja ortogonal a r e a s.

Exercício 4. Seja $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ um sistema de coordenadas em E^3, em que $\mathcal{B}$ é uma base ortonormal de V^3. Considere a reta r e o plano π dados pelas equações vetoriais:

$$r : X = (1, 1, 1)_\Sigma + \lambda(2, 1, 1)_\mathcal{B}, \quad \lambda \in \mathbb{R} \qquad \text{e}$$
$$\pi : X = (0, -1, 2)_\Sigma + \lambda(1, 1, 3)_\mathcal{B} + \mu(2, 1, 3)_\mathcal{B}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Determine os pontos $P \in r$ tais que $d(P, \pi) = 1$.

Exercício 5. Seja $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ um sistema de coordenadas em E^3, em que $\mathcal{B}$ é uma base ortonormal de V^3. Determine a distância entre as retas:

$$r : X = (3,1,7)_\Sigma + \lambda(2,1,3)_\mathcal{B}, \quad \lambda \in \mathbb{R} \qquad \text{e}$$
$$s : X = (2,1,3)_\Sigma + \lambda(4,2,6)_\mathcal{B}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Exercício 6. Sejam π um plano e $\Sigma_\pi = (O, \mathcal{B}_\pi)$ um sistema de coordenadas em π, em que $\mathcal{B}_\pi$ é ortonormal. Considere a elipse em π dada pela equação

$$16x^2 + 9y^2 - 64x - 18y = 71$$

no sistema Σ_π. Determine os semi-eixos, o centro e os focos dessa elipse.

Respostas

Exercício 1. (a) $\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{43}}$; (b) $Q = \left(\frac{58}{43}, \frac{111}{43}, \frac{71}{43}\right)_\Sigma$; (c) $R = \left(\frac{73}{43}, \frac{93}{43}, \frac{56}{43}\right)_\Sigma$.

Exercício 2. (a) $\sqrt{6}$; (b) $Q = (2, -1, 0)_\Sigma$; (c) $R = (3, -3, 1)_\Sigma$.

Exercício 3. (a) $\frac{4}{\sqrt{3}}$; (b) $P = \left(\frac{1}{6}, \frac{7}{6}, \frac{10}{3}\right)_\Sigma$, $Q = \left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, 2\right)_\Sigma$.

Exercício 4. $\left(\sqrt{10} - 6, \frac{\sqrt{10}-5}{2}, \frac{\sqrt{10}-5}{2}\right)_\Sigma$ e $\left(-\sqrt{10} - 6, \frac{-\sqrt{10}-5}{2}, \frac{-\sqrt{10}-5}{2}\right)_\Sigma$.

Exercício 5. $\sqrt{3}$.

Exercício 6. semi-eixos: 3 e 4; centro: $(2, 1)_{\Sigma_\pi}$;
focos: $(2, 1 + \sqrt{7})_{\Sigma_\pi}$ e $(2, 1 - \sqrt{7})_{\Sigma_\pi}$.