Sétima Lista

MAT5798 – Medida e Integração

Prof. Daniel Victor Tausk

26/05/2018

Exercício 1 (mais uma propriedade de lim inf e lim sup que eu esqueci de colocar na última lista)**.** Sejam $(a_n)_{n\geq 1}$ e $(b_n)_{n\geq 1}$ sequências em $\overline{\mathbb{R}}$. Mostre que se $a_n \leq b_n$ para todo n suficientemente grande, então:

$$\liminf_{n\to+\infty} a_n \leq \liminf_{n\to+\infty} b_n \quad \text{e} \quad \limsup_{n\to+\infty} a_n \leq \limsup_{n\to+\infty} b_n.$$

Conclua que se $c_1, c_2 \in \overline{\mathbb{R}}$ são tais que $c_1 \leq a_n \leq c_2$ para todo n suficientemente grande, então:

$$c_1 \leq \liminf_{n\to+\infty} a_n \leq \limsup_{n\to+\infty} a_n \leq c_2.$$

Exercício 2. Seja $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida com $\mu(X) < +\infty$ e seja $(f_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de funções mensuráveis $f_n : X \to \mathbb{R}$ que converge pontualmente para uma função (automaticamente mensurável) $f : X \to \mathbb{R}$. Suponha que exista $c \in \mathbb{R}$ tal que $|f_n(x)| \leq c$, para todo $n \geq 1$ e todo $x \in X$. Mostre que f é integrável, que f_n é integrável para todo n e que $\lim_{n\to+\infty} \int_X f_n \,\mathrm{d}\mu = \int_X f \,\mathrm{d}\mu$.

Exercício 3. Seja $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida com $\mu(X) < +\infty$ e seja $(f_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de funções mensuráveis $f_n : X \to \mathbb{R}$ que converge uniformemente para uma função (automaticamente mensurável) $f : X \to \mathbb{R}$. Suponha que f seja integrável. Mostre que f_n é integrável para todo n suficientemente grande e que $\lim_{n\to+\infty} \int_X f_n \,\mathrm{d}\mu = \int_X f \,\mathrm{d}\mu$.

Exercício 4. Sejam $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida, $(f_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de funções integráveis $f_n : X \to \mathbb{R}$ e suponha que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_X |f_n| \,\mathrm{d}\mu < +\infty.$$

Mostre que a série $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ é absolutamente convergente para quase todo $x \in X$ e que:

$$\int_X \sum_{n=1}^{\infty} f_n \,\mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n \,\mathrm{d}\mu.$$

Exercício 5. Sejam $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida, $(f_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de funções integráveis $f_n : X \to \mathbb{R}$ que converge pontualmente para uma função integrável $f : X \to \mathbb{R}$. Suponha que $\lim_{n\to+\infty} \int_X |f_n| \,\mathrm{d}\mu = \int_X |f| \,\mathrm{d}\mu$. Mostre que $\lim_{n\to+\infty} \int_X |f_n - f| \,\mathrm{d}\mu = 0$. (Sugestão: use o resultado do Exercício 11 da sexta lista.)

Exercício 6. Seja $\big((X_i, \mathcal{A}_i)\big)_{i\in I}$ uma família de espaços mensuráveis e, para cada $i \in I$, seja Y_i um subconjunto de X_i. Considere a σ-álgebra produto $\mathcal{A} = \bigotimes_{i\in I} \mathcal{A}_i$ de subconjuntos do espaço produto $X = \prod_{i\in I} X_i$ (veja Exercício 2 da quarta lista) e seja $Y = \prod_{i\in I} Y_i \subset X$. Mostre que:

$$\mathcal{A}|_Y = \bigotimes_{i\in I} \big(\mathcal{A}_i|_{Y_i}\big).$$

(Sugestão: seja $\mathcal{A}' = \bigotimes_{i\in I} \big(\mathcal{A}_i|_{Y_i}\big)$. A conclusão seguirá se você mostrar que a aplicação identidade $\mathrm{Id} : (Y, \mathcal{A}|_Y) \to (Y, \mathcal{A}')$ e sua inversa são aplicações mensuráveis. Para isso, você pode usar as propriedades das σ-álgebras induzidas que aparecem nos itens (b) dos Exercícios 1 e 2 da quarta lista.)

Exercício 7. Seja $\big\{U_n : n \geq 1\big\}$ uma base de abertos enumerável para a topologia Euclideana de $\mathbb{R}$ e seja $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função injetora.

(a) Dado um subconjunto qualquer A de $\mathbb{R}$, defina $V_n = \mathbb{R} \setminus \phi[U_n \cap A]$, para todo $n \geq 1$. Mostre que:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \big[\mathbb{R}^2 \setminus (U_n \times V_n)\big] = \big\{\big(x, \phi(x)\big) : x \in A\big\}.$$

(b) Mostre que se $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ denota a σ-álgebra de Borel de $\mathbb{R}$, então

$$\big\{\pi_1[C] : C \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \wp(\mathbb{R})\big\} = \wp(\mathbb{R}),$$

em que $\pi_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ denota a primeira projeção.

(c) Se $\nu : \wp(\mathbb{R}) \to [0, +\infty]$ denota a medida de contagem, mostre que existe $C \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \wp(\mathbb{R})$ tal que a função

$$\mathbb{R} \ni x \longmapsto \nu(C_x) \in \overline{\mathbb{R}} \tag{1}$$

não é mensurável, em que o domínio e o contradomínio de (1) estão munidos da σ-álgebra de Borel.

(d) Se $\mathcal{M}(\mathbb{R})$ denota a σ-álgebra de subconjuntos Lebesgue mensuráveis de $\mathbb{R}$, mostre que:

$$\big\{\pi_1[C] : C \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{M}(\mathbb{R})\big\} = \wp(\mathbb{R}).$$

(Sugestão: tome uma ϕ cuja imagem tenha medida de Lebesgue zero.)

Exercício 8. Considere os espaços de medida $\big(\mathbb{R}, \mathcal{M}(\mathbb{R}), \mathfrak{m}\big)$ e $\big(\mathbb{R}, \wp(\mathbb{R}), \nu\big)$, em que $\mathcal{M}(\mathbb{R})$ denota a σ-álgebra de conjuntos Lebesgue mensuráveis, $\mathfrak{m}$ denota a medida de Lebesgue e ν denota a medida de contagem. Considere o semi-anel

$$\mathcal{S} = \big\{A \times B : A \in \mathcal{M}(\mathbb{R}),\ B \in \wp(\mathbb{R})\big\}$$

e a medida $\rho : \mathcal{S} \to [0, +\infty]$ definida por

$$\rho(A \times B) = \mathfrak{m}(A)\nu(B),$$

para todos $A \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ e $B \in \wp(\mathbb{R})$. Denote por $\rho^* : \mathcal{M}(\mathbb{R}) \otimes \wp(\mathbb{R}) \to [0, +\infty]$ a extensão σ-aditiva de ρ dada pela restrição da medida exterior associada a ρ e por $\rho' : \mathcal{M}(\mathbb{R}) \otimes \wp(\mathbb{R}) \to [0, +\infty]$ a extensão σ-aditiva de ρ definida por

$$\rho'(C) = \int_{\mathbb{R}} \mathfrak{m}(C^y)\, \mathrm{d}\nu(y) = \sum_{y \in \mathbb{R}} \mathfrak{m}(C^y),$$

para todo $C \in \mathcal{M}(\mathbb{R}) \otimes \wp(\mathbb{R})$. Seja $\Delta = \big\{(x, x) : x \in \mathbb{R}\big\}$ a diagonal de $\mathbb{R}^2$. Note que:

$$\Delta \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2) = \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{M}(\mathbb{R}) \otimes \wp(\mathbb{R}).$$

Mostre que $\rho^*(\Delta) = +\infty$ e que $\rho'(\Delta) = 0$. (Sugestão: se Δ estiver coberto por uma quantidade enumerável de elementos de $\mathcal{S}$, então um deles é da forma $A \times B$ com $\mathfrak{m}(A) > 0$ e B infinito.)

Exercício 9 (a integral é a área embaixo do gráfico)**.** Seja $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida em que μ é σ-finita e considere uma função mensurável $f : X \to [0, +\infty]$. Seja:

$$G = \big\{(x, y) \in X \times \mathbb{R} : y \geq 0 \text{ e } y < f(x)\big\}.$$

Denote por $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ a σ-álgebra de Borel de $\mathbb{R}$ e por $\mathfrak{m} : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to [0, +\infty]$ a medida de Lebesgue.

(a) Mostre que $G \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

(b) Se $\rho = \mu \times \mathfrak{m}$, mostre que:

$$\rho(G) = \int_X f\, \mathrm{d}\mu.$$

Exercício 10. Sabe-se[1] que existe um conjunto não enumerável X e uma boa ordem $\leq$ em X tal que, para todo $x \in X$, vale que o conjunto

$$\{y \in X : y < x\}$$

dos predecessores de x é enumerável. Seja $\mathcal{A}$ a coleção formada pelos subconjuntos enumeráveis de X e pelos subconjuntos coenumeráveis (i.e., com complementar em X enumerável) de X. Defina $\mu : \mathcal{A} \to [0, 1]$ fazendo $\mu(A) = 0$, se A for enumerável e $\mu(A) = 1$, se A for coenumerável.

(a) Mostre que $\mathcal{A}$ é uma σ-álgebra de subconjuntos de X e que μ é uma medida.

(b) Seja $C = \{(x, y) \in X \times X : x < y\}$. Mostre que as integrais

$$\int_X \mu(C_x)\,\mathrm{d}\mu(x) \quad \text{e} \quad \int_X \mu(C^y)\,\mathrm{d}\mu(y)$$

estão bem-definidas e são distintas.

(c) Conclua que $C \notin \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$.

[1] Para quem estudou um pouquinho de ordinais isso é básico. Basta tomar X igual ao primeiro ordinal não enumerável.