Sétima Lista

MAT0311 – Cálculo Diferencial e Integral V

Prof. Daniel Victor Tausk

28/09/2013

Exercício 1. Seja (M, d) um espaço métrico. Mostre que se M possui apenas um número finito de componentes conexas então essas componentes conexas são abertas. (Sugestão: lembre que nós mostramos em aula que componentes conexas são sempre fechadas.)

Exercício 2. Seja (M, d) um espaço métrico. Mostre que se $A \subset M$ é aberto e fechado então A é igual a uma união de (algumas) componentes conexas de M. (Sugestão: mostre que se C é uma componente conexa de M então $C \subset A$ ou $C \cap A = \emptyset$.)

Exercício 3. Seja (M, d) um espaço métrico conexo. Se $\sim$ é uma relação de equivalência em M cujas classes de equivalência são abertas, mostre que $x \sim y$, para todos $x, y \in M$.

Definição 1. Um espaço métrico (M, d) é dito *localmente conexo* se para qualquer $x \in M$ e qualquer vizinhança V de x em M, existe uma vizinhança conexa W de x em M com $W \subset V$.

Exercício 4. Seja (M, d) um espaço métrico localmente conexo. Mostre que para qualquer $x \in M$ e qualquer vizinhança V de x em M, existe uma vizinhança conexa *aberta* W de x em M com $W \subset V$. (Sugestão: nós mostramos em aula que, num espaço localmente conexo, as componentes conexas de um aberto são abertas. Considere então as componentes conexas do interior de V.)

Exercício 5. Seja (M,d) um espaço métrico. Defina uma relação binária $\sim$ em M fazendo:

$$x \sim y \iff \text{existe uma função contínua } \gamma : [0,1] \to M \text{ com } \gamma(0) = x \text{ e } \gamma(1) = y,$$

para todos $x, y \in M$.

(a) Mostre que a relação binária $\sim$ é reflexiva (isto é, $x \sim x$, para todo $x \in M$) e simétrica (isto é, dados $x, y \in M$, se $x \sim y$ então $y \sim x$).

(b) Dadas funções contínuas $\gamma : [0,1] \to M$ e $\mu : [0,1] \to M$ tais que $\gamma(1) = \mu(0)$, defina a *concatenação* $\gamma \cdot \mu$ de γ com μ fazendo:

$$(\gamma \cdot \mu)(t) = \begin{cases} \gamma(2t), & \text{se } 0 \le t \le \frac{1}{2}, \\ \mu(2t-1), & \text{se } \frac{1}{2} \le t \le 1. \end{cases}$$

Mostre que $\gamma \cdot \mu$ é (bem definida e) contínua.

(c) Usando o resultado do item (b), mostre que a relação $\sim$ é transitiva (isto é, para todos $x, y, z \in M$, se $x \sim y$ e $y \sim z$ então $x \sim z$).

Exercício 6 (o "pente")**.** Seja:

$$M = \big[\big(\{0\} \cup \{\tfrac{1}{n} : n = 1, 2, \ldots\}\big) \times \mathbb{R}\big] \cup \big([0, +\infty[\times \{0\}\big)$$

munido da métrica induzida de uma das métricas usuais de $\mathbb{R}^2$.

(a) Mostre que M é conexo por caminhos (e portanto conexo).

(b) Seja $V = M \cap \big(\mathbb{R} \times]0, +\infty[\big)$ e seja W uma vizinhança de $(0,1)$ em M contida em V. Se $\pi_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ denota a primeira projeção, mostre que $\pi_1[W]$ não é um intervalo. Conclua que W não é conexo e que M não é localmente conexo.

Exercício 7.

(a) Sejam (M,d), (N,d') espaços métricos e $f : M \to N$ uma função uniformemente contínua. Mostre que se $(x_n)_{n\ge1}$ é uma seqüência de Cauchy em M então $\big(f(x_n)\big)_{n\ge1}$ é uma seqüência de Cauchy em N.

(b) Mostre que se d, d' são métricas uniformemente equivalentes num conjunto M então (M,d) é completo se e somente se (M,d') é completo.

(c) Seja $M = \big\{\frac{1}{n} : n = 1, 2, \ldots\big\}$. Sejam d a métrica em M obtida por restrição da métrica usual de $\mathbb{R}$ e d' a métrica zero-um em M. Mostre que d e d' são equivalentes, que (M,d') é completo, mas (M,d) não é completo.

Exercício 8. Sejam (M_i, d_i), $i = 1, \ldots, n$, espaços métricos e considere $M = \prod_{i=1}^n M_i$ munido de uma métrica produto. Denote por $\pi_i : M \to M_i$ a i-ésima projeção. Dada uma seqüência $(x_k)_{k\ge1}$ em M, mostre que $(x_k)_{k\ge1}$ é de Cauchy em M se e somente se $\big(\pi_i(x_k)\big)_{k\ge1}$ é de Cauchy em M_i, para todo $i = 1, \ldots, n$. Conclua que se (M_i, d_i) é completo para todo $i = 1, \ldots, n$ então M é completo.

Exercício 9. Sejam (M, d) um espaço métrico e D um subconjunto denso de M. Mostre que se toda seqüência de Cauchy em D é convergente em M então M é completo. (Sugestão: se $(x_n)_{n\geq 1}$ é uma seqüência de Cauchy em M então, para cada $n \geq 1$, escolha $y_n \in D$ com $d(x_n, y_n) < \frac{1}{n}$.)

Exercício* 10. Sejam X um conjunto e (M, d) um espaço métrico completo. Seja $\mathfrak{B}(X, M)$ o conjunto das funções limitadas $f : X \to M$, munido da métrica:

$$d_{\sup}(f, g) = \sup_{x\in X} d\big(f(x), g(x)\big), \quad f, g \in \mathfrak{B}(X, M).$$

(a) Se $(f_n)_{n\geq 1}$ é uma seqüência de Cauchy em $\mathfrak{B}(X, M)$, mostre que $\big(f_n(x)\big)_{n\geq 1}$ é uma seqüência de Cauchy em M, para todo $x \in X$. Conclua que a seqüência $(f_n)_{n\geq 1}$ converge pontualmente para uma função $f : X \to M$.

(b) Seja dado $\varepsilon > 0$ e seja $n_0 \geq 1$ tal que $d_{\sup}(f_n, f_m) < \varepsilon$, para todos $n, m \geq n_0$. Mostre que, se $n \geq n_0$, então $d\big(f_n(x), f(x)\big) \leq \varepsilon$, para todo $x \in X$.

(c) Usando o resultado do item (b), conclua que $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformemente para f e que a função f é limitada. Conclua que o espaço métrico $\mathfrak{B}(X, M)$ é completo.

Exercício* 11. Sejam (M, d), (N, d') espaços métricos, D um subconjunto denso de M e $f : D \to N$ uma função contínua. Assuma que para todo a em $M \setminus D$ o limite $\lim_{x\to a} f(x)$ exista e defina $F : M \to N$ fazendo $F(a) = f(a)$, se $a \in D$, e $F(a) = \lim_{x\to a} f(x)$, se $a \in M \setminus D$.

(a) Mostre que para todo $a \in M$ e para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, para todo $x \in D$, se $d(x, a) < \delta$ então $d'\big(f(x), F(a)\big) < \varepsilon$.

(b) Mostre que se $(x_n)_{n\geq 1}$ é uma seqüência em D que converge para um ponto $x \in M$ então $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = F(x)$.

(c) Sejam dados $a \in M$ e $\varepsilon > 0$. Tome $\delta > 0$ como no item (a). Mostre que, para todo $x \in M$, se $d(x, a) < \delta$ então $d'\big(F(x), F(a)\big) \leq \varepsilon$. (Sugestão: dado $x \in M$ com $d(x, a) < \delta$, considere uma seqüência $(x_n)_{n\geq 1}$ em D convergindo para x e observe que $d(x_n, a) < \delta$, para n suficientemente grande. Use o resultado do item (b).)

(d) Usando o resultado do item (c), conclua que F é contínua.

Exercício* 12. Sejam (M,d), (N,d') espaços métricos, D um subconjunto denso de M e $f : D \to N$ uma função uniformemente contínua. Assuma que N seja completo.

(a) Sejam $a \in M \setminus D$ e $(x_n)_{n\ge 1}$ uma seqüência em D convergindo para a. Em vista do resultado do item (a) do Exercício 7, a seqüência $\big(f(x_n)\big)_{n\ge 1}$ é de Cauchy (e portanto convergente) em N. Seja:
$$y = \lim_{n\to+\infty} f(x_n).$$
Mostre que $\lim_{x\to a} f(x) = y$.

(b) Usando o resultado do Exercício 11, conclua que existe uma função contínua $F : M \to N$ tal que $F|_D = f$. Mostre que F é uniformemente contínua.

(c) Mostre que se $f : D \to N$ for uma imersão isométrica (o que implica automaticamente que f é uniformemente contínua), então a sua extensão contínua $F : M \to N$ também será uma imersão isométrica.

Exercício 13** (o completamento)**.** Seja (M,d) um espaço métrico e denote por $\mathfrak{C}$ o conjunto de todas as seqüências de Cauchy em M. Defina uma relação binária $\sim$ em $\mathfrak{C}$ fazendo:
$$(x_n)_{n\ge 1} \sim (y_n)_{n\ge 1} \iff d(x_n,y_n) \longrightarrow 0, \quad (x_n)_{n\ge 1}, (y_n)_{n\ge 1} \in \mathfrak{C}.$$

(a) Mostre que $\sim$ é uma relação de equivalência em $\mathfrak{C}$.

(b) Dadas $(x_n)_{n\ge 1}, (y_n)_{n\ge 1} \in \mathfrak{C}$, mostre que o limite $\lim_{n\to+\infty} d(x_n,y_n)$ existe em $\mathbb{R}$. (Sugestão: use o resultado do item (a) do Exercício 7 e o resultado do Exercício 5 da Sexta Lista.)

(c) Seja $\widehat{M} = \mathfrak{C}/\!\sim$ o conjunto das classes de equivalência determinadas por $\sim$. Para $(x_n)_{n\ge 1}$ em $\mathfrak{C}$, denote por $[(x_n)_{n\ge 1}] \in \widehat{M}$ sua classe de equivalência. Mostre que existe uma aplicação $\hat{d} : \widehat{M} \times \widehat{M} \to \mathbb{R}$ tal que:
$$\hat{d}\big([(x_n)_{n\ge 1}], [(y_n)_{n\ge 1}]\big) = \lim_{n\to+\infty} d(x_n,y_n), \tag{1}$$
para todos $(x_n)_{n\ge 1}, (y_n)_{n\ge 1} \in \mathfrak{C}$. (Sugestão: você tem que mostrar que o lado direito de (1) não depende da escolha dos representantes das classes de equivalência.)

(d) Mostre que $\hat{d}$ é uma métrica em $\widehat{M}$.

(e) Defina $\phi : M \to \widehat{M}$ tomando, para cada $x \in M$, $\phi(x)$ igual à classe de equivalência da seqüência constante com todos os termos iguais a x. Mostre que ϕ é uma imersão isométrica.

(f) Mostre que a imagem de ϕ é densa em $\widehat{M}$. (Sugestão: mostre que para $(x_n)_{n\ge 1} \in \mathfrak{C}$, temos $[(x_n)_{n\ge 1}] = \lim_{n\to+\infty} \phi(x_n)$.)

(g) Mostre que toda seqüência de Cauchy em $\phi[M]$ é convergente em $\widehat{M}$. Conclua, usando o resultado do Exercício 9, que $(\widehat{M}, \hat{d})$ é completo.

Definição 2. Um *completamento* de um espaço métrico (M, d) é um par $\big((\widehat{M}, \hat{d}), \phi\big)$, sendo $(\widehat{M}, \hat{d})$ um espaço métrico completo e $\phi : M \to \widehat{M}$ uma imersão isométrica com imagem densa.

O resultado do Exercício 13 nos dá então que todo espaço métrico possui um completamento.

Exercício 14** (unicidade do completamento)**.** Sejam (M, d), $(\widehat{M_1}, \hat{d}_1)$, $(\widehat{M_2}, \hat{d}_2)$ espaços métricos, com $(\widehat{M_1}, \hat{d}_1)$, $(\widehat{M_2}, \hat{d}_2)$ completos. Sejam dadas imersões isométricas $\phi_1 : M \to \widehat{M_1}$, $\phi_2 : M \to \widehat{M_2}$, ambas com imagem densa.

(a) Usando o resultado do Exercício 12, mostre que existe uma imersão isométrica $\psi : \widehat{M_1} \to \widehat{M_2}$ tal que $\psi \circ \phi_1 = \phi_2$. (Sugestão: estenda a imersão isométrica $\phi_2 \circ \phi_1^{-1} : \phi_1[M] \to \widehat{M_2}$ para $\widehat{M_1}$.)

(b) Mostre que ψ é sobrejetora e é, portanto, uma isometria. (Sugestão: observe que a imagem de ψ é completa e contém a imagem de ϕ_2.)