Sétima Lista

MAT0222 – Álgebra Linear II

Prof. Daniel Victor Tausk

28/05/2014

Exercício 1. Seja V um espaço vetorial sobre $K = \mathbb{R}$ ou $K = \mathbb{C}$ munido de um produto interno e seja $T : V \to V$ um operador linear que admite um adjunto $T^\dagger : V \to V$. Seja W um subespaço de V. Mostre que se W é T-invariante, então $W^\perp$ é $T^\dagger$-invariante. Conclua que se T é auto-adjunto e W é T-invariante, então $W^\perp$ também é T-invariante.

Exercício 2. Seja V um espaço vetorial sobre $K = \mathbb{R}$ ou $K = \mathbb{C}$ munido de um produto interno e seja $T : V \to V$ um operador linear que admite um adjunto $T^\dagger : V \to V$. Seja W um subespaço T-invariante de V tal que $V = W \oplus W^\perp$ e denote por $P : V \to W$ a projeção ortogonal[1]. Mostre que o operador $T|_W : W \to W$ admite um adjunto e que esse adjunto é $P \circ T^\dagger|_W : W \to W$.

[1] A hipótese de que $V = W \oplus W^\perp$ é necessária para garantir a existência de P, que é nada mais que a projeção em W correspondente à decomposição $V = W \oplus W^\perp$. A hipótese $V = W \oplus W^\perp$ é satisfeita, por exemplo, se $\dim(W) < +\infty$.

Exercício 3. Seja V o espaço vetorial real formado por todas as famílias quase nulas $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de números reais, indexadas no conjunto $\mathbb{Z}$ dos números inteiros; *quase nula* significa que o conjunto $\{n \in \mathbb{Z} : x_n \neq 0\}$ é finito. As operações de V são definidas da forma usual, isto é, coordenada por coordenada. Considere o espaço V munido do produto interno:

$$\langle x, y\rangle = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n y_n, \quad x = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}},\ y = (y_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in V.$$

Seja $R : V \to V$ o operador de *deslocamento para a direita* definido por:

$$[R(x)]_n = x_{n-1}, \quad n \in \mathbb{Z},\ x \in V,$$

e $L : V \to V$ o operador de *deslocamento para a esquerda* definido por:

$$[L(x)]_n = x_{n+1}, \quad n \in \mathbb{Z},\ x \in V.$$

Evidentemente, R é um isomorfismo e $R^{-1} = L$.

(a) Mostre que o operador L é o adjunto de R (e, portanto, R é o adjunto de L). Conclua que R e L são unitários e portanto normais.

(b) Seja W o subespaço de V formado pelas famílias $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in V$ tais que $x_n = 0$, para todo $n < 0$. Mostre que W é invariante por R, mas não por $R^\dagger = L$.

(c) Mostre que o adjunto de $R|_W : W \to W$ é o operador $L' : W \to W$ definido por:

$$[L'(x)]_n = \begin{cases} 0, & \text{se } n < 0, \\ x_{n+1}, & \text{se } n \geq 0, \end{cases}$$

para todo $x \in W$.

(d) Mostre que o operador $R|_W : W \to W$ não é normal.

Observação. Veremos depois que se V é um espaço vetorial de dimensão finita sobre $K = \mathbb{R}$ ou $K = \mathbb{C}$ munido de um produto interno e se $T : V \to V$ é um operador normal então todo subespaço T-invariante W de V é também $T^\dagger$-invariante (e, portanto, a restrição $T|_W : W \to W$ é também normal). Assim, exemplos como aquele apresentado no Exercício 3 só existem em dimensão infinita.