Sétima Lista

MAT0216 – Cálculo Diferencial e Integral III

Prof. Daniel Victor Tausk

14/04/2019

Exercício 1. Dados $a, b, c > 0$, determine o volume do elipsóide

$$\Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1\Big\}$$

de semi-eixos a, b e c.

Exercício 2 (volume da bola em $\mathbb{R}^4$)**.** Seja $R > 0$ e considere a bola B em $\mathbb{R}^4$ de centro na origem e raio R, isto é:

$$B = \big\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x^2 + y^2 + z^2 + t^2 \leq R^2\big\}.$$

(a) Dado $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, descreva o corte bidimensional $B_{(x,y)}$ de B definido por

$$B_{(x,y)} = \big\{(z,t) \in \mathbb{R}^2 : (x,y,z,t) \in B\big\}.$$

(b) Descreva o conjunto:

$$D = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : B_{(x,y)} \text{ não é vazio}\big\}.$$

(c) Para $(x,y) \in D$, determine a área de $B_{(x,y)}$.

(d) Use o Teorema de Fubini para concluir que o volume de B é dado pela integral:

$$\mathrm{vol}(B) = \iint_D \text{área}(B_{(x,y)})\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

(e) Calcule a integral que aparece no item (d).

(f) Caso você fosse calcular o volume de B integrando os volumes dos cortes tridimensionais

$$B_t = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y,z,t) \in B\big\},$$

qual seria a integral que você deveria calcular? Note que essa integral seria bem mais trabalhosa de se calcular!

Definição 1. Seja $A \subset \mathbb{R}^3$ uma região do espaço onde há uma distribuição de matéria com densidade de massa por volume dada por uma certa função $\mu : A \to [0, +\infty[$. Seja $\vec{v} : A \to \mathbb{R}^3$ um campo de velocidades num certo instante de tempo t_0 para essa distribuição de matéria, isto é, para todo $q \in A$, $\vec{v}(q)$ é a velocidade vetorial no instante t_0 da partícula que está no ponto q. A *densidade de momento angular por volume* no instante t_0 para essa distribuição de matéria é a função $\mu_L : A \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$\mu_L(q) = q \wedge \mu_p(q),$$

para todo $q \in A$, em que a *densidade de momento por volume* no instante t_0 é a função $\mu_p : A \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$\mu_p(q) = \mu(q)\vec{v}(q),$$

para todo $q \in A$. O *momento angular total* no instante t_0 numa região (Jordan mensurável) $B \subset A$ é dado pela integral $\iiint_B \mu_L$ da densidade de momento angular μ_L na região B.

Exercício 3. Considere uma distribuição de matéria sobre o espaço $\mathbb{R}^3$ com densidade de massa por volume dada por $\mu(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Suponha que num certo instante de tempo t_0 essa distribuição de matéria tenha um campo de velocidades dado por $\vec{v}(x, y, z) = (-y, x, z)$, para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Calcule o momento angular total dessa distribuição de matéria no instante t_0 contido na bola B de centro na origem e raio 1.

Definição 2. Seja $\vec{E} : U \to \mathbb{R}^3$ um campo elétrico e seja $\vec{B} : U \to \mathbb{R}^3$ um campo magnético definidos num subconjunto U de $\mathbb{R}^3$ (estamos considerando aqui algum instante de tempo fixado). A *densidade de energia por volume* desse campo eletromagnético é a função $\mu_{\mathcal{E}} : U \to \mathbb{R}$ definida por

$$\mu_{\mathcal{E}}(q) = \frac{\epsilon_0}{2}\big(\|\vec{E}(q)\|^2 + c^2\|\vec{B}(q)\|^2\big),$$

para todo $q \in U$, em que c denota a velocidade da luz no vácuo e ϵ_0 é a constante de permissividade do vácuo[1]. A *densidade de momento por volume* desse campo eletromagnético é a função $\mu_{\mathfrak{p}} : U \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$\mu_{\mathfrak{p}}(q) = \epsilon_0\big(\vec{E}(q) \wedge \vec{B}(q)\big),$$

para todo $q \in U$ e a *densidade de momento angular por volume* desse campo eletromagnético é a função $\mu_L : U \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$\mu_L(q) = q \wedge \mu_{\mathfrak{p}}(q),$$

para todo $q \in U$. Dada uma região (Jordan mensurável) R contida em U, então a *energia total* do campo eletromagnético contida nessa região é dada pela integral $\iiint_R \mu_{\mathcal{E}}$, o *momento total* do campo eletromagnético contido nessa região é dado pela integral $\iiint_R \mu_{\mathfrak{p}}$ e o *momento angular total* do campo eletromagnético contido nessa região é dado pela integral $\iiint_R \mu_L$.

[1] A *constante de Coulomb* K que aparece na Lei de Coulomb é relacionada com ϵ_0 pela igualdade $K = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$.

Exercício 4. Considere um campo elétrico $\vec{E} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ e um campo magnético $\vec{B} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dados num certo instante de tempo $t \in \mathbb{R}$ por

$$\vec{E}(x,y,z) = A\cos(kz-\omega t)(1,0,0) \quad \text{e} \quad \vec{B}(x,y,z) = \frac{1}{c}A\cos(kz-\omega t)(0,1,0),$$

para todo $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, em que A e k são constantes reais positivas, $\omega = ck$ e c denota a velocidade da luz no vácuo. Essa é uma solução das equações de Maxwell no vácuo e ela representa uma onda eletromagnética plana propagando na direção do eixo z e linearmente polarizada na direção do eixo x. A amplitude é A, o comprimento de onda é $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ e a frequência é $f = \frac{\omega}{2\pi}$. Essa onda é justamente uma onda luminosa no vácuo, de modo que a velocidade de propagação é precisamente c. Dada uma região Jordan mensurável limitada R no plano $\mathbb{R}^2$, determine a energia total e o momento total desse campo eletromagnético contidos na caixa cilíndrica $R \times [0,\lambda] \subset \mathbb{R}^3$ no instante $t = 0$ em função da área de R. Determine também o momento angular total desse campo eletromagnético contido nessa mesma caixa cilíndrica no instante $t = 0$ em função da área de R e das coordenadas (x_0, y_0) do baricentro de R dadas por:

$$(x_0, y_0) = \frac{1}{\text{área}(R)} \iint_R (x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Exercício 5. O campo elétrico $\vec{E} : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^3$ produzido por uma carga pontual de valor $Q \in \mathbb{R}$ em repouso na origem é dado por

$$\vec{E}(x,y,z) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{(x,y,z)}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\,,$$

para todo $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ e o campo magnético produzido por essa carga é nulo. Dado $R > 0$, calcule a energia total desse campo elétrico na bola B de centro na origem e raio R e também a energia total desse campo elétrico no complementar de B.

Exercício 6. Considere uma distribuição uniforme de carga em repouso na bola B de centro na origem e raio $R > 0$ de $\mathbb{R}^3$, sendo $Q \in \mathbb{R}$ a carga total em B. O campo elétrico $\vec{E} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ produzido por essa distribuição de carga é dado por

$$\vec{E}(x,y,z) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^3}\,(x,y,z),$$

para todo $(x,y,z) \in B$ e

$$\vec{E}(x,y,z) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{(x,y,z)}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\,,$$

para todo $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ com $(x,y,z) \notin B$. O campo magnético produzido por essa distribuição de carga é nulo. Calcule a energia total desse campo elétrico na bola B e também a energia total desse campo elétrico em todo o espaço $\mathbb{R}^3$.

Sugestões

Exercício 1. Use a substituição de variáveis $x' = \frac{x}{a}$, $y' = \frac{y}{b}$, $z' = \frac{z}{c}$.

Exercício 2. (e) Use coordenadas polares.

Exercício 3. Use coordenadas esféricas.

Exercício 5. Use coordenadas esféricas.

Exercício 6. Use coordenadas esféricas.

Respostas

Exercício 1. O volume é $\frac{4}{3}\pi abc$.

Exercício 2. (a) Para $x^2 + y^2 \leq R^2$, o corte $B_{(x,y)}$ é um disco fechado de centro na origem e raio $\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ (esse disco reduz-se a um único ponto se $x^2 + y^2 = R^2$).

(b) D é um disco fechado de centro na origem e raio R.

(c) Para $(x, y) \in D$, a área de $B_{(x,y)}$ é $\pi(R^2 - x^2 - y^2)$.

(d) Temos:

$$\begin{aligned}\mathrm{vol}(B) = \iiiint_B 1 \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\mathrm{d}t &= \iint_D \Big(\iint_{B_{(x,y)}} 1 \, \mathrm{d}z\mathrm{d}t \Big) \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \iint_D \text{área}(B_{(x,y)}) \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

(e) Temos:

$$\begin{aligned}\iint_D \text{área}(B_{(x,y)}) \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \iint_D \pi(R^2 - x^2 - y^2) \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \int_0^R \Big(\int_0^{2\pi} \pi(R^2 - r^2) r \, \mathrm{d}\theta \Big) \mathrm{d}r = \frac{\pi^2 R^4}{2} \cdot\end{aligned}$$

(f) O corte tridimensional B_t é uma bola de centro na origem e raio $\sqrt{R^2 - t^2}$, para t no intervalo $[-R, R]$ (para outros valores de t ele é vazio). Temos que

$$\mathrm{vol}(B_t) = \frac{4}{3}\pi(R^2 - t^2)^{\frac{3}{2}}$$

para todo $t \in [-R, R]$ e, usando o Teorema de Fubini, concluímos que:

$$\mathrm{vol}(B) = \int_{-R}^{R} \frac{4}{3}\pi(R^2 - t^2)^{\frac{3}{2}} \, \mathrm{d}t.$$

Essa integral pode ser calculada por uma substituição trigonométrica, mas é consideravelmente mais trabalhosa do que a que calculamos no item (e). O resultado, evidentemente, é o mesmo.

Exercício 3. O momento angular total é dado por

$$\vec{L} = \iiint_B \mu_L, \tag{1}$$

em que $\mu_L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ é dada por:

$$\mu_L(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2)\big(z(y-x), -z(x+y), x^2+y^2\big),$$

para todo $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Usando coordenadas esféricas

$$x = \rho\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\phi, \quad y = \rho\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\phi, \quad z = \rho\cos\phi,$$
$$\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \rho^2\,\mathrm{sen}\,\phi\;\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi$$

para calcular a integral (1), obtemos $\vec{L} = (L_x, L_y, L_z)$, em que:

$$L_x = \int_0^1 \Big(\int_0^{2\pi} \Big(\int_0^{\pi} \rho^6 \cos\phi\;\mathrm{sen}^2\phi\,(\mathrm{sen}\,\theta - \cos\theta)\,\mathrm{d}\phi\Big)\,\mathrm{d}\theta\Big)\,\mathrm{d}\rho = 0,$$

$$L_y = \int_0^1 \Big(\int_0^{2\pi} \Big(\int_0^{\pi} -\rho^6 \cos\phi\;\mathrm{sen}^2\phi\,(\mathrm{sen}\,\theta + \cos\theta)\,\mathrm{d}\phi\Big)\,\mathrm{d}\theta\Big)\,\mathrm{d}\rho = 0,$$

$$L_z = \int_0^1 \Big(\int_0^{2\pi} \Big(\int_0^{\pi} \rho^6\,\mathrm{sen}^3\phi\;\mathrm{d}\phi\Big)\,\mathrm{d}\theta\Big)\,\mathrm{d}\rho = \frac{8\pi}{21}\,\cdot$$

Logo o momento angular total é $\vec{L} = \big(0, 0, \frac{8\pi}{21}\big)$.

Exercício 4. A densidade de energia por volume é dada por

$$\mu_{\mathcal{E}}(x,y,z) = \epsilon_0 A^2 \cos^2(kz),$$

para todo $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ e a energia total em $R \times [0,\lambda]$ é:

$$\iiint_{R\times[0,\lambda]} \mu_{\mathcal{E}}(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \frac{1}{2}\,\mathrm{área}(R)\epsilon_0 A^2\lambda.$$

A densidade de momento por volume é dada por

$$\mu_{\mathfrak{p}}(x,y,z) = \frac{\epsilon_0}{c} A^2 \cos^2(kz)(0,0,1),$$

para todo $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ e o momento total em $R \times [0,\lambda]$ é:

$$\iiint_{R\times[0,\lambda]} \mu_{\mathfrak{p}}(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \frac{1}{2}\,\mathrm{área}(R)\frac{\epsilon_0}{c} A^2\lambda(0,0,1).$$

A densidade de momento angular por volume é dada por

$$\mu_L(x,y,z) = \frac{\epsilon_0}{c} A^2 \cos^2(kz)(y,-x,0),$$

para todo $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ e o momento angular total em $R \times [0,\lambda]$ é:

$$\iiint_{R\times[0,\lambda]} \mu_L(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \frac{1}{2}\,\mathrm{área}(R)\frac{\epsilon_0}{c} A^2\lambda(y_0,-x_0,0).$$

Exercício 5. A densidade de energia por volume é dada por

$$\mu_{\mathcal{E}}(x,y,z) = \frac{Q^2}{32\pi^2\epsilon_0}\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^2}\,,$$

para todo $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$. A energia total em B é:

$$\iiint_B \mu_{\mathcal{E}}(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \frac{Q^2}{32\pi^2\epsilon_0}\int_0^R \Big(\int_0^{2\pi}\Big(\int_0^{\pi}\frac{\rho^2\operatorname{sen}\phi}{\rho^4}\,\mathrm{d}\phi\Big)\,\mathrm{d}\theta\Big)\,\mathrm{d}\rho$$
$$= +\infty$$

e a energia total no complementar de B é:

$$\frac{Q^2}{32\pi^2\epsilon_0}\int_R^{+\infty}\Big(\int_0^{2\pi}\Big(\int_0^{\pi}\frac{\rho^2\operatorname{sen}\phi}{\rho^4}\,\mathrm{d}\phi\Big)\,\mathrm{d}\theta\Big)\,\mathrm{d}\rho = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 R}\,.$$

Exercício 6. Fora de B, o campo elétrico coincide com o campo que estudamos no Exercício 5 e como calculamos lá, a energia total fora de B é $\frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 R}$. Para (x,y,z) em B, a densidade de energia por volume é dada por

$$\mu_{\mathcal{E}}(x,y,z) = \frac{Q^2}{32\pi^2\epsilon_0 R^6}(x^2+y^2+z^2)$$

e a energia total em B é dada por:

$$\frac{Q^2}{32\pi^2\epsilon_0 R^6}\int_0^R\Big(\int_0^{2\pi}\Big(\int_0^{\pi}\rho^4\operatorname{sen}\phi\,\mathrm{d}\phi\Big)\,\mathrm{d}\theta\Big)\,\mathrm{d}\rho = \frac{Q^2}{40\pi\epsilon_0 R}\,.$$

A energia total no espaço $\mathbb{R}^3$ é dada por:

$$\frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 R} + \frac{Q^2}{40\pi\epsilon_0 R} = \frac{3Q^2}{20\pi\epsilon_0 R}\,.$$