Sétima Lista

MAT0206 – Análise Real
MAP0216 – Introdução à Análise Real

Prof. Daniel Victor Tausk
09/05/2012

Exercício 1. Seja $(a_n)_{n\geq 1}$ uma seqüência de números reais. Dado um inteiro $k \geq 0$, mostre que a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge se e somente se a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_{n+k}$ converge e que, quando ambas convergem, vale a igualdade:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{k} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n+k}.$$

Exercício 2. Mostre que se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é uma série convergente então:

$$\lim_{k\to+\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{n+k} = 0.$$

(Sugestão: use o resultado do Exercício 1.)

Exercício 3 (associatividade da soma de séries)**.** Seja $(a_n)_{n\geq 1}$ uma seqüência de números reais e seja $(n_k)_{k\geq 1}$ uma seqüência estritamente crescente de inteiros positivos tal que $n_1 = 1$. Para cada $k \in \mathbb{N}^*$, seja:

$$x_k = \sum_{i=n_k}^{n_{k+1}-1} a_i.$$

Mostre que se a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge então a série $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ também converge e:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{k=1}^{\infty} x_k.$$

Dê um exemplo em que a série $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ converge, mas a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ não converge.

Exercício 4. Seja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ uma série absolutamente convergente e seja $(F_k)_{k\geq 1}$ uma seqüência de subconjuntos finitos de $\mathbb{N}^*$ tal que:

(i) $F_k \subset F_{k+1}$, para todo $k \in \mathbb{N}^*$;
(ii) $\mathbb{N}^* = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k$.

Mostre que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{k\to+\infty} \sum_{n\in F_k} a_n.$$

(Sugestão: trate primeiro o caso em que $a_n \geq 0$ para todo n e depois use a decomposição $a_n = a_n^+ - a_n^-$.)

Exercício 5 (produto de séries)**.** Sejam $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ séries absolutamente convergentes e $(\alpha,\beta) : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ uma função bijetora. Mostre que a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\alpha(n)} b_{\beta(n)}$ é absolutamente convergente e que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\alpha(n)} b_{\beta(n)} = \Big(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\Big)\Big(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\Big). \tag{1}$$

(Sugestão: para $k \in \mathbb{N}^*$, considere o subconjunto finito F_k de $\mathbb{N}^*$ definido por:

$$F_k = \big\{n \in \mathbb{N}^* : \alpha(n) \le k \text{ e } \beta(n) \le k\big\} = (\alpha,\beta)^{-1}\big(\{1,\ldots,k\}^2\big).$$

Observe que:

$$\sum_{n \in F_k} |a_{\alpha(n)} b_{\beta(n)}| = \Big(\sum_{n=1}^{k} |a_n|\Big)\Big(\sum_{n=1}^{k} |b_n|\Big) \le \Big(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|\Big)\Big(\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|\Big) \tag{2}$$

e que:

$$\sum_{n \in F_k} a_{\alpha(n)} b_{\beta(n)} = \Big(\sum_{n=1}^{k} a_n\Big)\Big(\sum_{n=1}^{k} b_n\Big). \tag{3}$$

Use (2) para demonstrar a convergência absoluta da série $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\alpha(n)} b_{\beta(n)}$ e depois use (3) e o resultado do Exercício 4 para provar (1).)