Sétima Lista

MAT0122 – Álgebra Linear I

Prof. Daniel Victor Tausk

17/06/2014

Exercício 1. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o operador linear tal que:

$$[T]_{\text{can}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

onde can denota a base canônica de $\mathbb{R}^3$. Determine, se existir, uma base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ tal que a matriz $[T]_{\mathcal{B}}$ seja diagonal. Exiba a matriz $[T]_{\mathcal{B}}$.

Exercício 2. Considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Determine uma expressão para A^n, onde n é um inteiro positivo.

Exercício 3. Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita e $T : V \to V$ um operador linear que possui um único autovalor $\lambda \in \mathbb{R}$. Mostre que T é diagonalizável se e somente se $T = \lambda \mathrm{I}$, onde $\mathrm{I} : V \to V$ denota o operador identidade.

Exercício 4. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ e considere o operador linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que:

$$[T]_{\text{can}} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & b \end{pmatrix},$$

onde can denota a base canônica de $\mathbb{R}^2$. Determine os valores de a e b para os quais T é diagonalizável.

Exercício 5. Considere as bases $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ de $P_2(\mathbb{R})$ definidas por:

$$\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}, \quad \mathcal{C} = \{1 + x, 1 - x^2, 1 + x^2\}.$$

Seja $T : P_2(R) \to P_2(R)$ o operador linear tal que:

$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Determine o polinômio característico de T e os autovalores de T.

Exercício 6. O *traço* de uma matriz quadrada $A \in M_n(\mathbb{R})$, denotado por $\operatorname{tr}(A)$, é a soma dos elementos da diagonal principal de A, isto é:

$$\operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} A_{ii}.$$

Mostre que se $A \in M_2(\mathbb{R})$, então:

$$\det(A - \lambda \mathrm{I}) = \lambda^2 - \operatorname{tr}(A)\lambda + \det(A), \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

onde I denota a matriz identidade 2×2.

Exercício 7. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ e considere o operador linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que:

$$[T]_{\mathrm{can}} = \begin{pmatrix} 0 & b \\ a & 0 \end{pmatrix},$$

onde can denota a base canônica de $\mathbb{R}^2$. Determine os valores de a e b para os quais T é diagonalizável.

Exercício 8. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ e considere o operador linear $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tal que:

$$[T]_{\mathrm{can}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ b & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & b \end{pmatrix},$$

onde can denota a base canônica de $\mathbb{R}^4$. Determine os valores de a e b para os quais T é diagonalizável.

Exercício 9. Dadas matrizes $A, B \in M_n(\mathbb{R})$, mostre que $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$. Use esse fato para mostrar que duas matrizes equivalentes têm o mesmo traço.

Exercício* 10. Sejam V um espaço vetorial e V_1 e V_2 subespaços de V. Mostre que as duas seguintes condições são equivalentes:

(a) todo $v \in V$ se escreve de modo único na forma $v = v_1 + v_2$, com $v_1 \in V_1$ e $v_2 \in V_2$;

(b) $V = V_1 + V_2$ e $V_1 \cap V_2 = \{0\}$.

Quando uma das (e portanto ambas as) condições equivalentes (a) e (b) são satisfeitas, escrevemos $V = V_1 \oplus V_2$ e dizemos que V é *soma direta* dos subespaços V_1 e V_2.

Solução do Exercício 1. Uma possível base $\mathcal{B}$ é:

$$\mathcal{B} = \big\{(1,1,0),(1,0,1),(0,-2,1)\big\},$$

e nesse caso:

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Solução do Exercício 2. Temos que:

$$A^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\big(3^n + (-1)^n\big) & \frac{1}{4}\big(3^n - (-1)^n\big) \\ 3^n - (-1)^n & \frac{1}{2}\big(3^n + (-1)^n\big) \end{pmatrix},$$

para todo inteiro positivo n.

Solução do Exercício 3. Se $T = \lambda\mathrm{I}$, então T é diagonalizável, já que para qualquer base $\mathcal{B}$ de V vale que $[T]_{\mathcal{B}}$ é igual a λ vezes a matriz identidade. Reciprocamente, se T é diagonalizável, então existe uma base $\mathcal{B}$ de V tal que $[T]_{\mathcal{B}}$ é uma matriz diagonal. Mas, sendo $[T]_{\mathcal{B}}$ uma matriz diagonal, vale que todos os elementos da diagonal principal de $[T]_{\mathcal{B}}$ são autovalores de T (sendo os elementos de $\mathcal{B}$ os autovetores correspondentes). Como λ é o único autovalor de T, temos que $[T]_{\mathcal{B}}$ é igual a λ vezes a matriz identidade. Mas então $T = \lambda\mathrm{I}$.

Solução do Exercício 4. Temos que T é diagonalizável se e somente se vale uma das seguintes condições:

(i) $b \neq 1$;
(ii) $b = 1$ e $a = 0$.

Solução do Exercício 5. O polinômio característico de T é:

$$p_T(\lambda) = -\lambda^3 - \lambda^2 + 2\lambda = \lambda(1-\lambda)(\lambda+2),$$

e portanto os seus autovalores são 0, 1 e -2.

Solução do Exercício 6. Escrevendo $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$, então:

$$\det(A - \lambda\mathrm{I}) = \begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = (a-\lambda)(d-\lambda) - bc = \lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad-bc),$$

sendo que $a + d = \mathrm{tr}(A)$ e $ad - bc = \det(A)$.

Solução do Exercício 7. T é diagonalizável se e somente se a e b são ambos positivos, ambos negativos ou ambos nulos.

Solução do Exercício 8. Temos que T é diagonalizável se e somente se $a \notin \{0,1\}$ e $b = 0$.

Solução do Exercício 9. Escrevendo $A = (a_{ij})_{n\times n}$, $B = (b_{ij})_{n\times n}$, temos:

$$\operatorname{tr}(AB) = \sum_{i=1}^{n} (AB)_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{ij}B_{ji}.$$

Trocando os nomes das variáveis i e j, obtemos:

$$\operatorname{tr}(AB) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} A_{ji}B_{ij};$$

trocando agora a ordem dos somatórios, vem:

$$\operatorname{tr}(AB) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} B_{ij}A_{ji} = \sum_{i=1}^{n} (BA)_{ii} = \operatorname{tr}(BA).$$

Sejam agora $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ matrizes equivalentes, isto é, existe uma matriz invertível $P \in M_n(\mathbb{R})$ tal que $B = PAP^{-1}$. Temos:

$$\operatorname{tr}(B) = \operatorname{tr}\big((PA)P^{-1}\big) = \operatorname{tr}\big(P^{-1}(PA)\big) = \operatorname{tr}(A),$$

onde na segunda igualdade usamos que $\operatorname{tr}(XY) = \operatorname{tr}(YX)$ com $X = PA$ e $Y = P^{-1}$.

Solução do Exercício 10. Suponha que (a) vale. Em particular, temos que todo $v \in V$ se escreve na forma $v = v_1 + v_2$, com $v_1 \in V_1$ e $v_2 \in V_2$. Assim, $V = V_1 + V_2$. Agora, dado $u \in V_1 \cap V_2$, temos que:

$$0 = 0 + 0 = u + (-u),$$

sendo $0 \in V_1$, $u \in V_1$, $0 \in V_2$ e $-u \in V_2$. Como $0 \in V$ deve se escrever de modo *único* na forma $0 = v_1 + v_2$, com $v_1 \in V_1$ e $v_2 \in V_2$, segue que $u = 0$ e $-u = 0$. Logo $V_1 \cap V_2 = \{0\}$. Isso prova (b). Suponha agora que (b) vale. Como $V = V_1 + V_2$, temos que todo $v \in V$ pode ser escrito na forma $v = v_1 + v_2$, com $v_1 \in V_1$ e $v_2 \in V_2$. Para demonstrar (a), resta então demonstrar a unicidade. Suponha então que:

$$v = v_1 + v_2 = v_1' + v_2',$$

com $v_1, v_1' \in V_1$ e $v_2, v_2' \in V_2$. Temos então:

$$v_1 - v_1' = v_2' - v_2.$$

Como $v_1 - v_1' \in V_1$ e $v_2' - v_2 \in V_2$, segue que $v_1 - v_1'$ e $v_2' - v_2$ estão em $V_1 \cap V_2 = \{0\}$. Logo:

$$v_1 - v_1' = 0, \quad v_2' - v_2 = 0,$$

isto é, $v_1 = v_1'$ e $v_2 = v_2'$.