Sétima Lista

MAT0121 – Cálculo Diferencial e Integral II

Prof. Daniel Victor Tausk

03/10/2018

Exercício 1. Esboce algumas curvas de nível das funções f definidas nos itens abaixo.

(a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2 + y$, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

(b) $f : D \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = \frac{1}{x-y}$, para todo $(x, y) \in D$, em que D é igual a $\big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq y\big\}$.

(c) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2 + 2xy + y^2$, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Exercício 2.

(a) Dado um ponto $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, verifique que o círculo obtido pela rotação de (x, y, z) em torno do eixo z corta o plano $y = 0$ nos pontos $\big(\sqrt{x^2 + y^2}, 0, z\big)$ e $\big(-\sqrt{x^2 + y^2}, 0, z\big)$.

(b) Seja $f :]0, +\infty[\times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função e considere o conjunto:

$$A = \big\{(x, 0, z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0 \text{ e } f(x, z) = 0\big\}.$$

Verifique que o subconjunto de $\mathbb{R}^3$ obtido pela rotação de A em torno do eixo z é:

$$\big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \neq (0, 0) \text{ e } f\big(\sqrt{x^2 + y^2}, z\big) = 0\big\}.$$

Exercício 3. Seja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x, y, z) = \big(\sqrt{x^2 + y^2} - 2\big)^2 + z^2,$$

para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Esboce a superfície de nível 1 de f.

Exercício 4. Esboce o gráfico da função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = 2x + 2y - x^2 - y^2,$$

para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Exercício 5. Calcule os limites abaixo, quando existirem.

(a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen}(xy)}{x^2+y^2}$;

(b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x-y}{x+y}$;

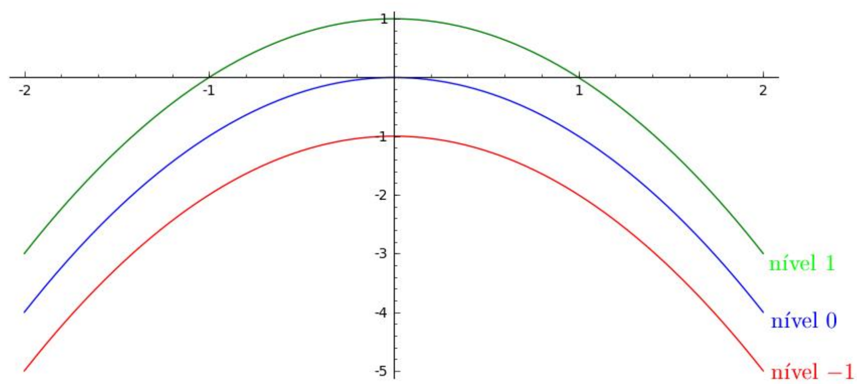
(c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3}{x^2+y^4}$;

(d) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y+\operatorname{sen}(xy^2)}{x^2+y^2}$;

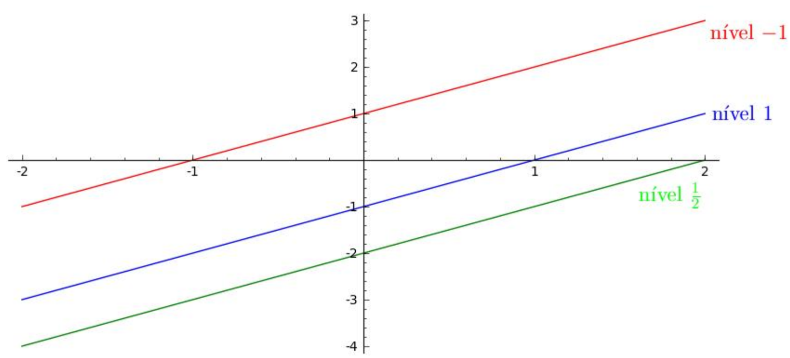
(e) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x+y^3}$.

Respostas

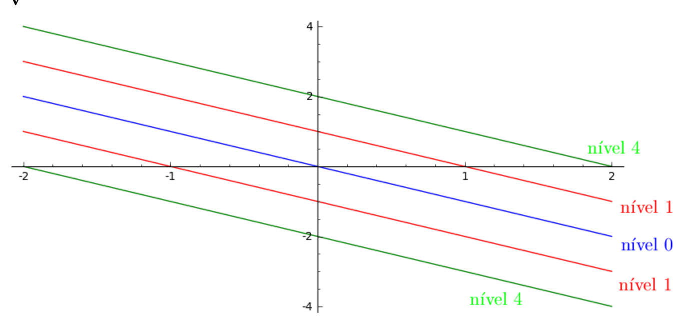
Exercício 1.
(a) Para cada $c \in \mathbb{R}$, a curva de nível c é a parábola $y = c - x^2$:



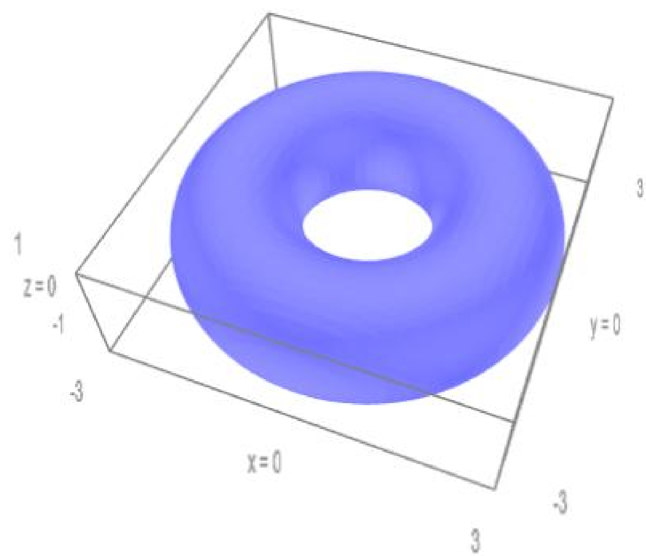
(b) A curva de nível 0 é vazia e para $c \neq 0$ a curva de nível c é a reta $y = x - \frac{1}{c}$:



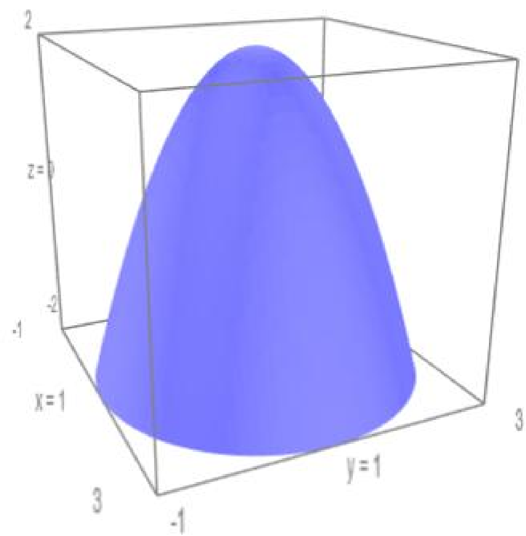
(c) Para $c < 0$, a curva de nível c é vazia; a curva de nível 0 é a reta $y = -x$; para $c > 0$, a curva de nível c é a união da reta $y = \sqrt{c} - x$ com a reta $y = -\sqrt{c} - x$:



Exercício 3. A superfície de nível é o toro obtido pela rotação em torno do eixo z do círculo no plano xz de centro $(2,0,0)$ e raio 1.



Exercício 4. O gráfico é um parabolóide circular "de boca para baixo" (assumindo o eixo z apontando para cima) e vértice no ponto $(1,1,2)$. Os cortes não vazios do gráfico por planos paralelos ao plano xy são círculos de centro $(1,1,z)$ e o corte do gráfico pelo plano $x=1$ é a parábola de equação $z=-(y-1)^2+2$.



Exercício 5. (a) não existe; (b) não existe; (c) 0; (d) 0; (e) não existe.