Sétima Lista

MAT0112 – Vetores e Geometria

Prof. Daniel Victor Tausk

09/06/2018

Exercício 1. Seja $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ um sistema de coordenadas em E^3 e seja π o plano de equação vetorial:

$$\pi : X = (-1, 3, 2)_\Sigma + \lambda(2, 1, 4)_\mathcal{B} + \mu(-1, 2, 1)_\mathcal{B}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Encontre uma equação geral para π no sistema de coordenadas Σ.

Exercício 2. Seja $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ um sistema de coordenadas em E^3. Encontre uma equação geral no sistema Σ para o plano π que passa pelos pontos $(-1, 1, 2)_\Sigma$, $(2, 1, 3)_\Sigma$ e $(1, 4, 2)_\Sigma$.

Exercício 3. Seja $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ um sistema de coordenadas em E^3. Determine em cada um dos itens abaixo a posição relativa entre o plano π e a reta r (i.e., decida se r está contida em π, se r é disjunta de π ou se r e π são concorrentes). Nos casos em que r e π forem concorrentes, determine o ponto de interseção entre r e π. As equações gerais dos planos e as equações simétricas das retas estão escritas no sistema Σ.

(a) $\pi : x - y + 3z = 1$; $r : X = (-1, 2, 1)_\Sigma + \lambda(3, 1, 4)_\mathcal{B}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

(b) $\pi : x + 2y + z = 4$; $r : X = (1, 0, 1)_\Sigma + \lambda(1, -2, 3)_\mathcal{B}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

(c) $\pi : x - y - 3z = 1$; $r : X = (2, 1, 0)_\Sigma + \lambda(2, -1, 1)_\mathcal{B}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

(d) $\pi : X = (-1, 2, 1)_\Sigma + \lambda(1, 3, 2)_\mathcal{B} + \mu(2, 1, 1)_\mathcal{B}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$;
$r : X = (3, 3, 1)_\Sigma + \lambda(-1, 4, 2)_\mathcal{B}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

(e) $\pi : 2x + y + 4z = 3$; $r : \frac{1-x}{3} = \frac{y-3}{2} = z - 1$.

Exercício 4. Seja $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ um sistema de coordenadas em E^3. Determine em cada um dos itens abaixo a posição relativa entre os planos π e π' (i.e., decida se π e π' são paralelos distintos, se π e π' são paralelos coincidentes ou se π e π' são concorrentes). Quando π e π' forem concorrentes, determine uma equação vetorial para a reta $\pi \cap \pi'$. As equações gerais dos planos estão escritas no sistema Σ.

(a) $\pi : x - y + 3z = 4$; $\pi' : 3x - 3y + 9z = 5$.

(b) $\pi : x + y + 2z = 6$; $\pi' : 3x + 3y + 6z = 18$.

(c) $\pi : 3x - y + 3z = 4$; $\pi' : 6x + y - 4z = 1$.

(d) $\pi : X = (-1, 0, 1)_\Sigma + \lambda(1, 3, 2)_\mathcal{B} + \mu(3, 3, 1)_\mathcal{B}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$;
$\pi' : X = (1, 1, 1)_\Sigma + \lambda(2, 1, 3)_\mathcal{B} + \mu(2, -1, 3)_\mathcal{B}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Exercício 5. Seja $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ um sistema de coordenadas em E^3. Considere o plano π cuja equação geral no sistema Σ é $x + 2y - 3z = 4$, a reta

$$r : X = (-1, 0, 2)_\Sigma + \lambda(1, 2, 1)_\mathcal{B}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

e o ponto $P = (3, 3, 1)_\Sigma$. Determine um ponto $Q \in r$ tal que o vetor $\overrightarrow{PQ}$ seja paralelo a π.

Exercício 6. Seja $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ um sistema de coordenadas em E^3, em que $\mathcal{B}$ é uma base ortonormal de V^3. Encontre uma equação vetorial para uma reta r que passe pelo ponto $(-1, 3, 2)_\Sigma$ e que seja normal ao plano cuja equação geral no sistema Σ é $2x - 5y + 3z = 4$.

Exercício 7. Seja $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ um sistema de coordenadas em E^3, em que $\mathcal{B}$ é uma base ortonormal de V^3. Encontre uma equação geral no sistema Σ para um plano π que seja normal ao vetor $(-1, 4, 2)_\mathcal{B}$ e que passe pelo ponto $(4, 7, 1)_\Sigma$.

Exercício 8. Sejam $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ e $\Sigma' = (O', \mathcal{B}')$ sistemas de coordenadas em E^3. Suponha que:

$$O' = (0, 0, 1)_\Sigma \quad \text{e} \quad \mathcal{B}' = \big\{(1, 0, 1)_\mathcal{B}, (0, 1, 1)_\mathcal{B}, (1, 0, -1)_\mathcal{B}\big\}.$$

Se $x - 2y + 3z = 4$ é a equação geral de um plano π no sistema de coordenadas Σ, determine uma equação geral para π no sistema de coordenadas Σ'.

Exercício* 9 (coordenadas do vetor normal a um plano em uma base arbitrária)**.** Seja $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ um sistema de coordenadas em E^3, em que $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$. Seja π um plano cuja equação geral no sistema Σ é $ax + by + cz = d$. Mostre que o vetor $\vec{n}$ cujas coordenadas na base $\mathcal{B}$ são dadas pela matriz coluna

$$g^{-1} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

é um vetor não nulo normal a π, em que a matriz g é definida por:

$$g = \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 & \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 & \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3 \\ \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_1 & \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2 & \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3 \\ \vec{e}_3 \cdot \vec{e}_1 & \vec{e}_3 \cdot \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \cdot \vec{e}_3 \end{pmatrix}.$$

(Sugestão: use o resultado do Exercício 7 da terceira lista para mostrar que o vetor $\vec{n}$ é normal a qualquer vetor $\vec{v}$ que seja paralelo a π.)

Respostas

Exercício 1. $7x + 6y - 5z = 1$.

Exercício 2. $-3x + 2y + 9z = 23$.

Exercício 3. (a) concorrentes; o ponto de interseção é $\left(-\frac{11}{14}, \frac{29}{14}, \frac{9}{7}\right)_\Sigma$.
(b) r e π são disjuntos.
(c) r está contida em π.
(d) concorrentes; o ponto de interseção é $(10, -25, -13)_\Sigma$.
(e) r e π são disjuntos.

Exercício 4. (a) paralelos distintos.
(b) paralelos coincidentes.
(c) concorrentes;
$\pi \cap \pi' : X = \left(\frac{5}{9}, -\frac{7}{3}, 0\right)_\Sigma + \lambda(1, 30, 9)_\mathcal{B},\ \lambda \in \mathbb{R}$.
(d) concorrentes;
$\pi \cap \pi' : X = \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{5}, 0\right)_\Sigma + \lambda(10, 24, 15)_\mathcal{B},\ \lambda \in \mathbb{R}$.

Exercício 5. $Q = \left(\frac{11}{2}, 13, \frac{17}{2}\right)_\Sigma$.

Exercício 6. $r : X = (-1, 3, 2)_\Sigma + \lambda(2, -5, 3)_\mathcal{B},\ \lambda \in \mathbb{R}$.

Exercício 7. $\pi : -x + 4y + 2z = 26$.

Exercício 8. $4x' + y' - 2z' = 1$.