# Sétima Lista

**MAT0111 – Cálculo Diferencial e Integral I**

Prof. Daniel Victor Tausk

11/05/2013

**Exercício 1.** Seja dado um inteiro $n \geq 0$. Verifique que:

(a) o polinômio de Taylor de ordem $n$ da função $f(x) = e^x$ em torno da origem é:
$$\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!};$$

(b) o polinômio de Taylor de ordem $2n+2$ da função $f(x) = \operatorname{sen} x$ em torno da origem é:
$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!};$$

(c) o polinômio de Taylor de ordem $2n+1$ da função $f(x) = \cos x$ em torno da origem é:
$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!};$$

(d) o polinômio de Taylor de ordem $n+1$ da função $f(x) = \ln x$ em torno de 1 é:
$$\sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1} \frac{(x-1)^k}{k} = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \cdots + (-1)^n \frac{(x-1)^{n+1}}{n+1}.$$

**Exercício 2.**

(a) Usando um polinômio de Taylor da função $f(x) = \operatorname{sen} x$ em torno da origem, determine uma aproximação racional para $\operatorname{sen}\big(\frac{1}{10}\big)$ com erro menor do que $10^{-7}$.

(b) Usando um polinômio de Taylor da função $f(x) = \sqrt{x}$ em torno de 1, determine uma aproximação racional para $\sqrt{1{,}1}$ com erro menor do que $10^{-4}$.

**Exercício 3.** Usando um polinômio de Taylor da função $f(x) = \ln x$ em torno de 1, mostre que, para todo inteiro $n \geq 1$, vale que:

$$\ln 2 = \Big(\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\Big) + r_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} + r_n,$$

onde $|r_n| \leq \frac{1}{n+1}$, sendo $r_n > 0$ se $n$ é par e $r_n < 0$ se $n$ é ímpar.

Recordamos o seguinte resultado enunciado na aula de 10/05.

**Teorema 1.** *Sejam $n \geq 1$ um inteiro, $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo e $f : I \to \mathbb{R}$ uma função $n$ vezes derivável num ponto $a \in I$. Seja $p_n$ o polinômio de Taylor de $f$ de ordem $n$ em torno de $a$. Então:*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - p_n(x)}{(x-a)^n} = 0. \tag{1}$$

O próximo exercício contém um roteiro para você demonstrar um resultado que permite reconhecer se um ponto é um máximo ou um mínimo local de uma função, usando as derivadas de ordem superior da função nesse ponto.

**Exercício* 4.** Sejam $n \geq 1$ um inteiro, $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo e $f : I \to \mathbb{R}$ uma função $n$ vezes derivável num ponto $a \in I$. Suponha que:

$$f^{(i)}(a) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Usando o Teorema 1, mostre que podemos escrever $f$ na forma:

$$f(x) = f(a) + (x-a)^n u(x), \quad x \in I,$$

onde $u : I \to \mathbb{R}$ satisfaz:

$$\lim_{x \to a} u(x) = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

Use agora esse fato para mostrar que:

(a) se $f^{(n)}(a) > 0$ e $n$ é par então $a$ é um ponto de mínimo local estrito de $f$;

(b) se $f^{(n)}(a) < 0$ e $n$ é par então $a$ é um ponto de máximo local estrito de $f$;

(c) se $f^{(n)}(a) \neq 0$, $n$ é ímpar e $a$ é um ponto interior de $I$ então $a$ não é ponto de máximo local nem de mínimo local de $f$;

(d) se $f^{(n)}(a) \neq 0$, $n$ é ímpar e $a$ é uma extremidade de $I$, então $a$ é um ponto de máximo local estrito ou um ponto de mínimo local estrito de $f$. Analise qual dos casos ocorre, levando em conta o sinal de $f^{(n)}(a)$ e o fato de $a$ ser extremidade direita ou esquerda do intervalo $I$.

Note então que podemos reconhecer se $a$ é ponto de máximo ou mínimo local de uma função $f$ de classe $C^\infty$ num intervalo $I$, olhando para o primeiro inteiro positivo $n$ tal que $f^{(n)}(a) \neq 0$. Pode ocorrer, no entanto, que $f^{(n)}(a) = 0$ para todo inteiro positivo $n$ (mesmo que $f$ seja não constante — veja Exercício 7 abaixo) e nesse caso não é possível determinar se $a$ é ponto de máximo ou mínimo local de $f$ olhando apenas para as derivadas de $f$ no ponto $a$.

O objetivo do próximo exercício é o de demonstrar que o polinômio de Taylor $p_n$ é o único polinômio de grau menor ou igual a $n$ satisfazendo a condição (1) que aparece na tese do Teorema 1.

**Exercício* 5.**

(a) Seja $n \geq 0$ um inteiro e seja $P$ um polinômio de grau menor ou igual a $n$. Dado $a \in \mathbb{R}$, mostre que se:

$$\lim_{x \to a^+} \frac{P(x)}{(x-a)^n} = 0 \quad \text{ou} \quad \lim_{x \to a^-} \frac{P(x)}{(x-a)^n} = 0$$

então $P = 0$. (Sugestão: se $P \neq 0$, observe que podemos escrever $P$ na forma:

$$P(x) = (x-a)^i Q(x),$$

sendo $0 \leq i \leq n$ e $Q$ um polinômio tal que $Q(a) \neq 0$.)

(b) Sejam $n$, $I$, $f$, $a$ e $p_n$ como no enunciado do Teorema 1. Mostre que se $p$ é um polinômio de grau menor ou igual a $n$ tal que:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - p(x)}{(x-a)^n} = 0, \tag{2}$$

então $p = p_n$. (Sugestão: use (1), (2) e tome $P = p - p_n$ no item (a).)

**Exercício 6.** Considere a função $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \frac{1}{1-x},$$

para todo $x \neq 1$. Usando o resultado do item (b) do Exercício 5, mostre que, para todo inteiro $n \geq 0$, o polinômio de Taylor de ordem $n$ de $f$ em torno da origem é $p(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n$.

**Exercício** 7.** Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}}, & \text{se } x > 0, \\ 0, & \text{se } x \leq 0. \end{cases}$$

(a) Usando indução, mostre que para todo inteiro $n \geq 0$ existem polinômios $P_n$, $Q_n$, tais que, para todo $x > 0$, vale que $Q_n(x) \neq 0$ e que a $n$-ésima derivada de $f$ no ponto $x$ é dada por:

$$f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{Q_n(x)}\, e^{-\frac{1}{x}}.$$

(b) Mostre que, para todo inteiro $n \geq 0$, vale que:

$$\lim_{x \to 0} f^{(n)}(x) = 0.$$

(c) Use indução e o resultado do Exercício 8 da sexta lista para concluir que, para todo inteiro $n \geq 1$, $f$ é $n$ vezes derivável na origem e $f^{(n)}(0) = 0$.

(d) Conclua que $f$ é uma função de classe $C^\infty$ e que o polinômio de Taylor de $f$ de qualquer ordem em torno da origem é nulo. (No entanto, a função $f$ não é nula em nenhum intervalo em torno da origem!)