Sexta Lista

MAT5798 – Medida e Integração

Prof. Daniel Victor Tausk
19/05/2018

Exercício 1. Seja $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida e sejam $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ e $g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ funções mensuráveis. Mostre que:

(a) se g é quase integrável, $\int_X g \, \mathrm{d}\mu > -\infty$ e $f \geq g$, então f é quase integrável;

(b) se g é quase integrável, $\int_X g \, \mathrm{d}\mu < +\infty$ e $f \leq g$, então f é quase integrável.

Exercício 2. Sejam $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida e $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ uma função mensurável. Mostre que se f é quase integrável, então $f|_Y$ é quase integrável para todo $Y \in \mathcal{A}$.

Exercício 3. Sejam $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida e $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ uma função mensurável. Mostre que f é integrável se, e somente se, $|f|$ é integrável.

Exercício 4. Sejam $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida e $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ uma função quase integrável. Mostre que se $\int_X f \, \mathrm{d}\mu < +\infty$, então $f(x) < +\infty$ para quase todo $x \in X$ e que se $\int_X f \, \mathrm{d}\mu > -\infty$, então $f(x) > -\infty$ para quase todo $x \in X$. (Esse enunciado é um pouquinho melhor do que o enunciado da primeira parte do Exercício 5 da quinta lista.)

Exercício 5. Seja $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida e sejam $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ e $g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ funções quase integráveis. Assuma que a soma $\int_X f \, \mathrm{d}\mu + \int_X g \, \mathrm{d}\mu$ esteja bem-definida (i.e., não ocorre que um dos termos é $+\infty$ e o outro é $-\infty$). Mostre que a soma $f(x) + g(x)$ está bem-definida para quase todo $x \in X$.

Exercício 6. Sejam $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida e $f : X \to [0, +\infty]$ uma função mensurável. Mostre que $\int_X f \, \mathrm{d}\mu = 0$ se, e somente se, $f(x) = 0$ para quase todo $x \in X$. Apresente um exemplo em que $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ é uma função integrável com $\int_X f \, \mathrm{d}\mu = 0$, $\mu(X) > 0$ e $f(x) \neq 0$, para todo $x \in X$.

Exercício 7. Sejam $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida e $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ uma função quase integrável. Mostre que $\int_A f \, \mathrm{d}\mu = 0$ para todo $A \in \mathcal{A}$ se, e somente se, $f(x) = 0$ para quase todo $x \in X$.

Exercício 8. Sejam $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida, $(Y, \mathcal{B})$ um espaço mensurável e $f : X \to Y$ e $g : X \to Y$ funções. Suponha que a medida μ seja completa. Mostre que se f é mensurável e $f(x) = g(x)$ para quase todo $x \in X$, então g é mensurável. Dê um contra-exemplo para essa implicação no caso em que μ não é completa.

Exercício 9 (para quem não sabe mexer bem com $\liminf$ e $\limsup$)**.** Seja $(a_n)_{n\geq 1}$ uma sequência em $\overline{\mathbb{R}}$. Recorde que o $\liminf$ e o $\limsup$ dessa sequência são definidos respectivamente por:

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \sup_{n\geq 1} \inf_{k\geq n} a_k = \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geq n} a_k \quad \text{e}$$
$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \inf_{n\geq 1} \sup_{k\geq n} a_k = \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n} a_k.$$

(a) Seja $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Mostre que $\liminf_{n\to\infty} a_n \geq a$ se, e somente se, para todo $a' \in \overline{\mathbb{R}}$ com $a' < a$ vale que $a_n > a'$ para todo n suficientemente grande (isto é, existe $n_0 \geq 1$ tal que $a_n > a'$ para todo $n \geq n_0$).

(b) Seja $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Mostre que $\liminf_{n\to\infty} a_n \leq a$ se, e somente se, para todo $a' \in \overline{\mathbb{R}}$ com $a' > a$ vale que $a_n < a'$ para todo n arbitrariamente grande (isto é, para todo $n_0 \geq 1$ existe um $n \geq n_0$ tal que $a_n < a'$).

(c) Mostre que $\liminf_{n\to\infty} a_n$ é o menor valor de aderência[1] da sequência $(a_n)_{n\geq 1}$.

(d) Enuncie e prove as versões dos itens (a), (b) e (c) para $\limsup$.

(e) Mostre que $\liminf_{n\to+\infty} a_n \leq \limsup_{n\to+\infty} a_n$.

(f) Seja $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Mostre que $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ se, e somente se:

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n = a.$$

Exercício 10. Sejam $(a_n)_{n\geq 1}$ e $(b_n)_{n\geq 1}$ sequências em $\overline{\mathbb{R}}$ tais que a soma $a_n + b_n$ esteja bem-definida, para todo $n \geq 1$.

(a) Mostre que

$$\liminf_{n\to\infty} a_n + \liminf_{n\to\infty} b_n \leq \liminf_{n\to\infty} (a_n + b_n), \tag{1}$$

se a soma $\liminf_{n\to\infty} a_n + \liminf_{n\to\infty} b_n$ estiver bem-definida.

(b) Dado $c \in \mathbb{R}$, mostre que

$$\liminf_{n\to\infty} (c\, a_n) = c \liminf_{n\to\infty} a_n$$

para $c \geq 0$ e que

$$\liminf_{n\to\infty} (c\, a_n) = c \limsup_{n\to\infty} a_n$$

para $c \leq 0$.

(c) Mostre que vale a igualdade em (1) se $\lim_{n\to\infty} b_n$ existe e for finito. (Sugestão: use que $a_n = (a_n + b_n) + (-b_n)$.)

(d) Enuncie e prove as versões dos itens (a), (b) e (c) para $\limsup$.

---

[1] Recorde que um *valor de aderência* de uma sequência $(a_n)_{n\geq 1}$ num espaço topológico X é um elemento $a \in X$ tal que para toda vizinhança V de a, vale que $a_n \in V$ para n arbitrariamente grande. Quando a possui um sistema fundamental de vizinhanças enumerável (por exemplo, se X é metrizável), então a é um valor de aderência de $(a_n)_{n\geq 1}$ se, e somente se, a for um limite de alguma subsequência de $(a_n)_{n\geq 1}$.

Exercício 11 (teorema da convergência dominada generalizado)**.** Seja dado um espaço de medida $(X, \mathcal{A}, \mu)$. Sejam $(f_n)_{n\geq 1}$ e $(\phi_n)_{n\geq 1}$ sequências de funções mensuráveis convergindo pontualmente quase sempre para funções mensuráveis $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ e $\phi : X \to \overline{\mathbb{R}}$, respectivamente. Suponha que ϕ_n seja integrável e que $|f_n| \leq \phi_n$, para todo $n \geq 1$. Suponha também que ϕ seja integrável e que $\lim_{n\to+\infty} \int_X \phi_n \,\mathrm{d}\mu = \int_X \phi \,\mathrm{d}\mu$. Mostre que f_n é integrável para todo $n \geq 1$, que f é integrável e que $\lim_{n\to+\infty} \int_X f_n \,\mathrm{d}\mu = \int_X f \,\mathrm{d}\mu$.

Exercício 12. Sejam $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida, Y um espaço topológico, Z um subconjunto de Y, $y \in Y$ um ponto de acumulação de Z e $f : X \times Z \to \overline{\mathbb{R}}$ uma função. Assuma que:

(i) para todo $z \in Z$, a função $f(\cdot, z) : X \ni x \mapsto f(x, z) \in \overline{\mathbb{R}}$ é mensurável;
(ii) existe uma função integrável $\phi : X \to \overline{\mathbb{R}}$ tal que $|f(x, z)| \leq \phi(x)$, para todo $x \in X$ e todo $z \in Z$;
(iii) o limite $\lim_{z\to y} f(x, z)$ existe, para todo $x \in X$;
(iv) o ponto y possui um sistema fundamental de vizinhanças[2] enumerável em Y (isso vale automaticamente, por exemplo, se Y for metrizável).

Mostre que tudo que aparece na igualdade

$$\lim_{z\to y} \int_X f(x, z) \,\mathrm{d}\mu(x) = \int_X \big[\lim_{z\to y} f(x, z)\big] \,\mathrm{d}\mu(x)$$

está bem-definido e que a igualdade vale. Enuncie e prove um corolário desse resultado cuja tese diga que a função $g(z) = \int_X f(x, z) \,\mathrm{d}\mu(x)$ é contínua.

Exercício 13. Sejam $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida, $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo com mais de um ponto e $f : X \times I \to \mathbb{R}$ uma função. Assuma que:

(i) para todo $t \in I$, a função $f(\cdot, t) : X \ni x \mapsto f(x, t) \in \mathbb{R}$ é integrável;
(ii) para todo $x \in X$, a função $f(x, \cdot) : I \ni t \mapsto f(x, t) \in \mathbb{R}$ é derivável;
(iii) existe uma função integrável $\phi : X \to \overline{\mathbb{R}}$ tal que $\left|\frac{\partial f}{\partial t}(x, t)\right| \leq \phi(x)$, para todo $x \in X$ e todo $t \in I$.

Mostre que tudo que aparece na igualdade

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_X f(x, t) \,\mathrm{d}\mu(x) = \int_X \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) \,\mathrm{d}\mu(x)$$

está bem-definido e que a igualdade vale. (Sugestão: para verificar a hipótese de dominação que permitirá colocar o limite para dentro da integral, use o Teorema do Valor Médio e a hipótese (iii).)

---

[2] Recorde que um *sistema fundamental de vizinhanças* de um ponto y num espaço topológico Y é uma coleção de vizinhanças de y tal que qualquer vizinhança de y contém uma vizinhança da coleção. Quando y possui um sistema fundamental de vizinhanças enumerável, então uma igualdade do tipo $\lim_{z\to y} g(z) = L$ vale se, e somente se, vale que $\lim_{n\to\infty} g(z_n) = L$ para qualquer sequência $(z_n)_{n\geq 1}$ em $Y \setminus \{y\}$ no domínio de g que convirja para y.