Sexta Lista

MAT0311 – Cálculo Diferencial e Integral V

Prof. Daniel Victor Tausk
21/09/2013

Exercício 1. Sejam (M, d), (N, d') espaços métricos e $f : M \to N$ uma função. Dado $a \in M$, mostre que:

(a) se a é um ponto isolado de M (isto é, se $\{a\}$ é aberto em M) então f é contínua no ponto a;

(b) se a não é um ponto isolado de M (isto é, se a é um ponto de acumulação de M) então f é contínua no ponto a se e somente se $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Exercício 2. Sejam (M, d), (N, d') e (P, d'') espaços métricos, $f : D \to N$ uma função definida num subconjunto D de M e $g : E \to P$ uma função definida num subconjunto E de N. Suponha que $f[D] \subset E$. Seja $a \in M$ um ponto de acumulação de D e suponha que:

$$\lim_{x\to a} f(x) = b,$$

para algum $b \in N$.

(a) Se $b \in E$ e g é contínua no ponto b, mostre que:

$$\lim_{x\to a} g\big(f(x)\big) = g(b).$$

(b) Se a possui uma vizinhança V em M tal que $b \notin f\big[(V \cap D) \setminus \{a\}\big]$, mostre que b é um ponto de acumulação de E. Assumindo também que:

$$\lim_{y\to b} g(y) = L,$$

para algum $L \in P$, mostre que:

$$\lim_{x\to a} g\big(f(x)\big) = L.$$

Exercício 3. Sejam (M_i, d_i), $i = 1, \ldots, n$, espaços métricos e considere o produto cartesiano $M = \prod_{i=1}^n M_i$, isto é, o conjunto de todas as n-uplas $x = (x_1, \ldots, x_n)$ com $x_i \in M_i$, para todo $i = 1, \ldots, n$.

(a) Considere as funções $d : M \times M \to \mathbb{R}$, $d' : M \times M \to \mathbb{R}$, definidas por:

$$d(x,y) = \max\big\{d_i(x_i, y_i) : i = 1, \ldots, n\big\}, \quad d'(x,y) = \sum_{i=1}^n d_i(x_i, y_i),$$

para todos $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n) \in M$. Mostre que d e d' são métricas Lipschitz-equivalentes em M.

(b) Seja $\|\cdot\|$ uma norma em $\mathbb{R}^n$ que seja *monotônica*, isto é:

$$|u_i| \le |v_i|, \; i = 1, \ldots, n \Longrightarrow \|u\| \le \|v\|,$$

para quaisquer $u, v \in \mathbb{R}^n$. (Por exemplo, para todo $p \in [1, +\infty]$, a norma $\|\cdot\|_p$ é monotônica.) Mostre que a função $d_{\|\cdot\|} : M \times M \to \mathbb{R}$ definida por:

$$d_{\|\cdot\|}(x,y) = \Big\|\big(d_1(x_1,y_1), \ldots, d_n(x_n,y_n)\big)\Big\|, \quad x, y \in M,$$

é uma métrica em M. Mostre que se a norma $\|\cdot\|$ é Lipschitz-equivalente[1] à norma $\|\cdot\|_\infty$ então a métrica $d_{\|\cdot\|}$ é Lipschitz-equivalente à métrica d definida no item (a).

Sejam (M_i, d_i), $i = 1, \ldots, n$, espaços métricos. Qualquer métrica no produto $M = \prod_{i=1}^n M_i$ que seja Lipschitz-equivalente à métrica d definida no item (a) do Exercício 3 é chamada uma *métrica produto* em M. Por exemplo, para todo $p \in [1, +\infty]$, a métrica em $M = \mathbb{R}^n$ associada à norma $\|\cdot\|_p$ é uma métrica produto, se cada fator $M_i = \mathbb{R}$ está munido da métrica usual.

[1] Veremos mais adiante no curso que quaisquer duas normas num espaço vetorial de dimensão finita são Lipschitz-equivalentes. Assim, essa hipótese é sempre satisfeita.

Exercício 4. Sejam (M_i, d_i), $i = 1, \ldots, n$, espaços métricos e considere o produto cartesiano $M = \prod_{i=1}^n M_i$ munido de uma métrica produto d. Para cada $i = 1, \ldots, n$, denote por $\pi_i : M \to M_i$ a i-ésima projeção.

(a) Mostre que cada projeção π_i é Lipschitziana.
(b) Dada uma seqüência $(x_k)_{k \geq 1}$ em M e um ponto $x \in M$, mostre que $x_k \to x$ se e somente se $\pi_i(x_k) \to \pi_i(x)$, para todo $i = 1, \ldots, n$.
(c) Dado um espaço métrico (N, d'), uma função $f : N \to M$ e um ponto $a \in N$, mostre que f é contínua no ponto a se e somente se $\pi_i \circ f$ é contínua no ponto a, para todo $i = 1, \ldots, n$.
(d) Dado um espaço métrico (N, d') e uma função $f : N \to M$, mostre que f é uniformemente contínua se e somente se $\pi_i \circ f$ é uniformemente contínua, para todo $i = 1, \ldots, n$.
(e) Dado um espaço métrico (N, d') e uma função $f : N \to M$, mostre que f é Lipschitziana se e somente se $\pi_i \circ f$ é Lipschitziana, para todo $i = 1, \ldots, n$.
(f) Dado um espaço métrico (N, d'), uma função $f : D \to M$ definida num subconjunto D de N, um ponto de acumulação $a \in N$ de D e um ponto $y \in M$, mostre que $\lim_{x \to a} f(x) = y$ se e somente se $\lim_{x \to a} (\pi_i \circ f)(x) = \pi_i(y)$, para todo $i = 1, \ldots, n$.

Exercício 5. Seja (M, d) um espaço métrico. Se o produto $M \times M$ é munido de uma métrica produto e $\mathbb{R}$ é munido da métrica usual, mostre que a função $d : M \times M \to \mathbb{R}$ é Lipschitziana. (Sugestão: mostre que:

$$\big| d(x, y) - d(x', y') \big| \leq d(x, x') + d(y, y'),$$

para todos $x, y, x', y' \in M$.)

Exercício 6. Sejam (M, d) um espaço métrico e V um espaço vetorial real munido de uma norma $\| \cdot \|$.

(a) Mostre que se $f : M \to V$, $g : M \to V$, $\alpha : M \to \mathbb{R}$ são funções contínuas num ponto $a \in M$ então as funções:

$$f + g : M \ni x \longmapsto f(x) + g(x) \in V, \quad \alpha f : M \ni x \longmapsto \alpha(x) f(x) \in V$$

são contínuas no ponto a.

(b) Mostre que se $f : D \to V$, $g : D \to V$, $\alpha : D \to \mathbb{R}$ são funções definidas num subconjunto D de M, se $a \in M$ é um ponto de acumulação de D e se os limites $\lim_{x \to a} f(x)$, $\lim_{x \to a} g(x)$, $\lim_{x \to a} \alpha(x)$ existem então:

$$\lim_{x \to a} \big(f(x) + g(x) \big) = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x),$$
$$\lim_{x \to a} \big(\alpha(x) f(x) \big) = \lim_{x \to a} \alpha(x) \lim_{x \to a} f(x).$$

(Sugestão: use o resultado do Exercício 5 da Quarta Lista, o resultado dos itens (c) e (f) do Exercício 4 acima e o resultado do item (a) do Exercício 2 acima.)

Exercício 7. Seja (M, d) um espaço métrico. Se M é desconexo, mostre que existe uma função contínua $f : M \to \mathbb{R}$ tal que $f[M] = \{0, 1\}$. Conclua que o teorema do valor intermediário vale para um espaço métrico (M, d) (isto é, a imagem de toda função contínua $f : M \to \mathbb{R}$ é um intervalo) se e somente se M é conexo.

Exercício 8 (teorema de alfândega)**.** Sejam (M, d) um espaço métrico, A um subconjunto de M e C um subconjunto conexo de M tal que $C \cap A \neq \emptyset$ e $C \cap A^{\mathrm{c}} \neq \emptyset$. Mostre que $C \cap \partial A \neq \emptyset$.

Exercício 9 (produto de espaços conexos)**.** Sejam (M, d), (N, d') espaços métricos e considere o produto $M \times N$ munido de alguma métrica produto.

(a) Mostre que se M, N são não vazios e se $M \times N$ é conexo então M e N são conexos. (Sugestão: as projeções de $M \times N$ são sobrejetoras.)

(b) Mostre que se M e N são conexos então, para quaisquer $x \in M$, $y \in N$, os conjuntos:
$$M \times \{y\}, \quad \{x\} \times N, \quad C_{x,y} \stackrel{\text{def}}{=} \big(M \times \{y\}\big) \cup \big(\{x\} \times N\big)$$
são conexos.

(c) Mostre que se M e N são conexos então $M \times N$ é conexo. (Sugestão: $M \times N = \bigcup_{y \in N} C_{x,y}$, para todo $x \in M$.)

Exercício* 10. Considere o subconjunto S de $\mathbb{R}^2$ definido por:
$$S = \big\{(x, \operatorname{sen} \tfrac{1}{x}) : x > 0\big\} \cup \big(\{0\} \times [-1, 1]\big).$$
Consideramos $\mathbb{R}^2$ munido de uma das normais usuais e S munido da métrica induzida de $\mathbb{R}^2$. Vimos em aula que S é conexo. O objetivo deste exercício é mostrar que S não é conexo por caminhos. Suponha por absurdo que S seja conexo por caminhos. Então existe uma aplicação contínua:
$$\gamma = (\gamma_1, \gamma_2) : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
com imagem contida em S, tal que $\gamma_1(0) > 0$ e $\gamma_1(1) = 0$.

(a) Mostre que o conjunto:
$$\big\{t \in [0, 1] : \gamma_1(t) = 0\big\}$$
possui um mínimo t_0 e que $t_0 \in \,]0, 1]$. (Sugestão: observe que o ínfimo de um conjunto é um ponto de aderência desse conjunto e conclua que um subconjunto fechado, não vazio, limitado inferiormente de $\mathbb{R}$ possui mínimo.)

(b) Mostre que para todo $t \in [0, t_0[$ existem $t', t'' \in [t, t_0[$ tais que:
$$\gamma_2(t') = 1 \quad \text{e} \quad \gamma_2(t'') = -1.$$
(Sugestão: use o teorema do valor intermediário para a função γ_1 no intervalo $[t, t_0]$.)

(c) Mostre que existe uma seqüência $(t_n)_{n \geq 1}$ em $[0, t_0[$ tal que $t_n \to t_0$ e tal que $\gamma_2(t_n) = (-1)^n$, para todo $n \geq 1$. Obtenha uma contradição.

Exercício 11.** Uma *ordem parcial* num conjunto X é uma relação binária $\leq$ em X satisfazendo as seguintes condições:

(a) $x \leq x$, para todo $x \in X$ (reflexividade);
(b) para quaisquer $x, y \in X$, se $x \leq y$ e $y \leq x$ então $x = y$ (anti-simetria);
(c) para quaisquer $x, y, z \in X$, se $x \leq y$ e $y \leq z$ então $x \leq z$ (transitividade).

Para $x, y \in X$, escrevemos $x < y$ quando $x \leq y$ e $x \neq y$. Dizemos que $\leq$ é uma *ordem total* (ou *linear*) se for uma ordem parcial e, para quaisquer $x, y \in X$, temos $x \leq y$ ou $y \leq x$. Por exemplo, a relação de ordem usual dos números reais é uma ordem total. Se X é um conjunto munido de uma ordem total, dizemos que um subconjunto I de X é um *intervalo* se alguma das seguintes condições for satisfeita:

(i) existem $a, b \in X$ com $a < b$ tais que $I = \big\{x \in X : a < x \text{ e } x < b\big\}$, ou $I = \big\{x \in X : a \leq x \text{ e } x < b\big\}$, ou $I = \big\{x \in X : a < x \text{ e } x \leq b\big\}$ ou $I = \big\{x \in X : a \leq x \text{ e } x \leq b\big\}$;
(ii) existe $a \in X$ tal que $I = \big\{x \in X : x < a\big\}$, ou $I = \big\{x \in X : x \leq a\big\}$, ou $I = \big\{x \in X : a < x\big\}$ ou $I = \big\{x \in X : a \leq x\big\}$;
(iii) I é unitário, ou $I = \emptyset$ ou $I = X$.

Dizemos que um subconjunto I de X é *convexo* se para quaisquer $x, y, z \in X$, se $x, y \in I$, $x < z$ e $z < y$ então $z \in I$. Sejam X um conjunto munido de uma ordem total e I um subconjunto de X.

(a) Mostre que se I é um intervalo então I é convexo.
(b) Mostre que se $X = \mathbb{Q}$, munido da ordem total usual, então:
$$I = \big\{x \in \mathbb{Q} : x > 0 \text{ e } x^2 < 2\big\}$$
é convexo, mas não é um intervalo.
(c) Dizemos que X é *Dedekind-completo* se todo subconjunto não vazio limitado superiormente de X possui um supremo[2]. Por exemplo, $X = \mathbb{R}$, munido da ordem usual, é Dedekind-completo. Mostre que se X é Dedekind-completo então todo subconjunto convexo de X é um intervalo.

---

[2]Dado um subconjunto S de X, então uma *cota superior* (resp., *cota inferior*) de S é um elemento $x \in X$ tal que $y \leq x$ (resp., $x \leq y$) para todo $y \in S$. Dizemos que um subconjunto de X é *limitado superiormente* (resp., *limitado inferiormente*) se ele possui uma cota superior (resp., uma cota inferior). Um *elemento máximo* (resp., *elemento mínimo*) de S é um elemento de S que é uma cota superior (resp., uma cota inferior) de S. É fácil ver que elementos máximos e mínimos são únicos, quando existem. Dizemos que $x \in X$ é o *supremo* (resp., o *ínfimo*) de S se x é o menor elemento do conjunto das cotas superiores de S (resp., o maior elemento do conjunto das cotas inferiores de S). É fácil ver que se todo subconjunto não vazio limitado superiormente de X possui um supremo então todo subconjunto não vazio limitado inferiormente de X possui um ínfimo. De fato, se S é um subconjunto não vazio limitado inferiormente de X e se T é o conjunto das cotas inferiores de S então T é não vazio limitado superiormente e o supremo de T é o ínfimo de S.