Sexta Lista

MAT0222 – Álgebra Linear II

Prof. Daniel Victor Tausk
24/04/2014

Definição 1. Dado um espaço vetorial complexo $(V, +, \cdot)$, definimos em V uma nova multiplicação por escalares complexos $*$ fazendo:

$$\lambda * v = \bar{\lambda} \cdot v,$$

para todos $v \in V$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Temos que $(V, +, *)$ é também um espaço vetorial complexo (verifique!) e é chamado o *espaço vetorial conjugado* a $(V, +, \cdot)$. Como sempre, denotaremos a tripla $(V, +, \cdot)$ apenas por V e, nesse caso, a tripla $(V, +, *)$ será denotada por $\overline{V}$. Quando V é um espaço vetorial real, definimos $\overline{V} = V$.

Exercício 1. Se V é um espaço vetorial complexo, mostre que $\overline{\overline{V}} = V$.

Definição 2. Dados espaços vetoriais complexos V e W, dizemos que uma função $T : V \to W$ é *linear-conjugada* quando valem as seguintes condições:

(a) $T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2)$, para todos $v_1, v_2 \in V$;

(b) $T(\lambda v) = \bar{\lambda}\, T(v)$, para todos $\lambda \in \mathbb{C}$, $v \in V$.

Exercício 2. Sejam V, W espaços vetoriais complexos e $T : V \to W$ uma função. Mostre que:

(a) $T : V \to W$ é linear se e somente se $T : \overline{V} \to \overline{W}$ é linear;

(b) $T : V \to W$ é linear-conjugada se e somente se $T : V \to \overline{W}$ é linear;

(c) $T : V \to W$ é linear-conjugada se e somente se $T : \overline{V} \to W$ é linear.

Exercício 3. Seja V um espaço vetorial complexo. Mostre que:

(a) um subconjunto B de V é linearmente independente relativamente a V se e somente se for linearmente independente relativamente a $\overline{V}$;

(b) um subconjunto W de V é um subespaço relativamente a V se e somente se for um subespaço relativamente a $\overline{V}$ (note que o subespaço W de V, quando munido da estrutura de espaço vetorial induzida por $\overline{V}$, será o espaço $\overline{W}$);

(c) se S é um subconjunto de V, o subespaço gerado por S em V é igual ao subespaço gerado por S em $\overline{V}$;

(d) um subconjunto B de V é uma base de V se e somente se for uma base de $\overline{V}$;

(e) V e $\overline{V}$ têm a mesma dimensão.

Exercício 4. Seja V um espaço vetorial complexo e seja $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ uma base ordenada de V. Dado $v \in V$, denote por $[v]_{\mathcal{B},V} \in \mathbb{C}^n$ as coordenadas de v na base $\mathcal{B}$ relativamente ao espaço vetorial V e por $[v]_{\mathcal{B},\overline{V}} \in \mathbb{C}^n$ as coordenadas de v na base $\mathcal{B}$ relativamente ao espaço vetorial conjugado $\overline{V}$. Mostre que:

$$[v]_{\mathcal{B},\overline{V}} = \overline{[v]_{\mathcal{B},V}},$$

onde, para $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$, definimos $\bar{z} = (\overline{z_1}, \ldots, \overline{z_n})$.

Exercício 5. Sejam V e W espaços vetoriais complexos e $T : V \to W$ uma aplicação linear. Dadas bases ordenadas $\mathcal{B}$ de V e $\mathcal{C}$ de W, mostre que a matriz que representa a aplicação linear $T : \overline{V} \to \overline{W}$ com respeito às bases $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ é a conjugada da matriz que representa a aplicação linear $T : V \to W$ com respeito às bases $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$. A *conjugada* de uma matriz complexa $A = (a_{jk})_{m\times n}$ é definida por $\overline{A} = (\overline{a_{jk}})_{m\times n}$.

Exercício 6. Mostre que se $A \in M_{m\times n}(\mathbb{C})$, $B \in M_{n\times p}(\mathbb{C})$ são matrizes complexas, então $\overline{AB} = \overline{A}\,\overline{B}$.

Exercício 7. Seja V um espaço vetorial sobre $K = \mathbb{R}$ ou $K = \mathbb{C}$ munido de um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e seja $v \in V$.

(a) Mostre que se $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ é uma base ordenada ortogonal de V, então a j-ésima coordenada de v na base $\mathcal{B}$ é:

$$\frac{\langle v, e_j \rangle}{\langle e_j, e_j \rangle},$$

para todo $j = 1, \ldots, n$.

(b) Se W é um subespaço de V, $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_m)$ é uma base ordenada ortogonal de W e $w \in W$ é definido por:

$$w = \sum_{j=1}^{m} \frac{\langle v, e_j \rangle}{\langle e_j, e_j \rangle} e_j,$$

mostre que $v - w \in W^{\perp}$. Em outras palavras, $w = P(v)$, onde $P : V \to W$ é a projeção correspondente à decomposição em soma direta $V = W \oplus W^{\perp}$. (Recorde que P é chamada a *projeção ortogonal* de V em W.)

Definição 3. Seja V um espaço vetorial sobre $K = \mathbb{R}$ ou $K = \mathbb{C}$ munido de um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e seja $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ uma base ordenada de V. A *matriz que representa* $\langle \cdot, \cdot \rangle$ *na base* $\mathcal{B}$ é a matriz $G = (g_{jk})_{n\times n} \in M_n(K)$ definida por:

$$g_{jk} = \langle e_j, e_k \rangle, \quad j, k = 1, \ldots, n.$$

Note que no caso $K = \mathbb{R}$ o produto interno é uma aplicação bilinear e a matriz G é precisamente a matriz que representa essa aplicação bilinear na base $\mathcal{B}$ definida como no Exercício 2 da Primeira Lista. Note também que a base $\mathcal{B}$ é ortogonal se e somente se a matriz G é diagonal e que a base $\mathcal{B}$ é ortonormal se e somente se a matriz G é a matriz identidade.

Exercício 8. Seja V um espaço vetorial sobre $K = \mathbb{R}$ ou $K = \mathbb{C}$ munido de um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e seja $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ uma base ordenada de V. Seja $G = (g_{jk})_{n\times n}$ a matriz que representa o produto interno na base $\mathcal{B}$. Mostre que:

$$\langle v, w \rangle = \sum_{j,k=1}^{n} g_{jk}\, v_j\, \overline{w_k}, \tag{1}$$

para todos $v, w \in V$, onde $[v]_{\mathcal{B}} = (v_1, \ldots, v_n)$ e $[w]_{\mathcal{B}} = (w_1, \ldots, w_n)$. Escrevendo $[v]_{\mathcal{B}}$ e $[w]_{\mathcal{B}}$ como matrizes coluna, verifique também que a igualdade (1) é equivalente a:

$$\langle v, w \rangle = \big([v]_{\mathcal{B}}\big)^{\mathrm{t}}\, G\, \overline{[w]_{\mathcal{B}}}. \tag{2}$$

Como fica a igualdade (1) quando a base $\mathcal{B}$ é ortogonal? E quanto é ortonormal?

Exercício 9. Seja V um espaço vetorial sobre $K = \mathbb{R}$ ou $K = \mathbb{C}$ e seja $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ uma base ordenada de V. Seja $G = (g_{jk})_{n\times n} \in M_n(K)$ uma matriz. Para $v, w \in V$, defina $\langle v, w \rangle \in K$ pela fórmula (2) (ou, equivalentemente, pela fórmula (1)). Mostre que:

(a) $\langle e_j, e_k \rangle = g_{jk}$, para todos $j, k = 1, \ldots, n$;
(b) $\langle v + v', w \rangle = \langle v, w \rangle + \langle v', w \rangle$ e $\langle v, w + w' \rangle = \langle v, w \rangle + \langle v, w' \rangle$, para todos $v, v', w, w' \in V$;
(c) $\langle \lambda v, w \rangle = \lambda \langle v, w \rangle$ e $\langle v, \lambda w \rangle = \bar{\lambda} \langle v, w \rangle$, para todos $v, w \in V$, $\lambda \in K$;
(d) a igualdade $\langle v, w \rangle = \overline{\langle w, v \rangle}$ vale para quaisquer $v, w \in V$ se e somente se $G^{\mathrm{t}} = \overline{G}$.

Exercício 10. Sejam V e W espaços vetoriais sobre $K = \mathbb{R}$ ou $K = \mathbb{C}$ munidos de produtos internos $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$ e $\langle \cdot, \cdot \rangle_W$, respectivamente. Dada uma transformação linear $T : V \to W$, mostre que são equivalentes as seguintes condições:

(a) $\langle T(v_1), T(v_2) \rangle_W = \langle v_1, v_2 \rangle_V$, para todos $v_1, v_2 \in V$;
(b) $\langle T(v), T(v) \rangle_W = \langle v, v \rangle_V$, para todo $v \in V$.

(Sugestão: para provar que (b)$\Rightarrow$(a), tome $v = v_1 + v_2$ e, no caso $K = \mathbb{C}$, tome também $v = iv_1 + v_2$.)

Definição 4. Uma aplicação linear T satisfazendo as condições equivalentes (a) e (b) do enunciado do Exercício 10 é dita *unitária*; no caso $K = \mathbb{R}$ diz-se também que T é *ortogonal*.

Exercício 11. Seja V um espaço vetorial sobre $K = \mathbb{R}$ ou $K = \mathbb{C}$ munido de um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e seja $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ uma base ordenada de V. Denote por $R : V \to V^*$ a *aplicação de Riesz*:

$$R(v)(w) = \langle w, v \rangle, \quad v, w \in V.$$

Vimos em aula que a aplicação $R : \overline{V} \to V^*$ é linear.

(a) Mostre que se a base $\mathcal{B}$ é ortonormal então $\big(R(e_1), \ldots, R(e_n)\big)$ é a base dual de $\mathcal{B}$.

(b) Se $\mathcal{B}$ é uma base qualquer de V, $\mathcal{B}^*$ denota sua base dual e G denota a matriz que representa o produto interno com respeito a $\mathcal{B}$ (Definição 3), mostre que G é também a matriz que representa a aplicação linear $R : \overline{V} \to V^*$ com respeito às bases $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}^*$.

Definição 5. Sejam V e W espaços vetoriais sobre $K = \mathbb{R}$ ou $K = \mathbb{C}$ munidos de produtos internos $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$ e $\langle \cdot, \cdot \rangle_W$, respectivamente. Vimos em aula que, dada uma transformação linear $T : V \to W$, existe no máximo uma função $S : W \to V$ tal que:

$$\langle T(v), w \rangle_W = \langle v, S(w) \rangle_V,$$

para todos $v \in V$, $w \in W$. Vimos que S é linear quando existe e que S sempre existe quando V tem dimensão finita. Dizemos que S é a *transformação adjunta* de T e escrevemos $S = T^\dagger$. Quando $K = \mathbb{R}$ usa-se também a notação T^{t} em vez de $T^\dagger$ e diz-se que $T^{\mathrm{t}} = T^\dagger$ é a *aplicação transposta* de T. (Cuidado para não confundir com a aplicação $T^* : W^* \to V^*$, que também é chamada de aplicação transposta de T.)

Vimos que se $R^V : V \to V^*$, $R^W : W \to W^*$ denotam as aplicações de Riesz, então a transformação adjunta é caracterizada pela igualdade:

$$R^V \circ T^\dagger = T^* \circ R^W,$$

ou seja, pela comutatividade do diagrama:

$$\begin{tikzcd} W^* \arrow[r, "T^*"] & V^* \\ W \arrow[u, "R^W"] \arrow[r, "T^\dagger"'] & V \arrow[u, "R^V"'] \end{tikzcd}$$

Exercício 12. Sejam V e W espaços vetoriais sobre $K = \mathbb{R}$ ou $K = \mathbb{C}$ munidos de produtos internos $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$ e $\langle \cdot, \cdot \rangle_W$, respectivamente. Considere uma transformação linear $T : V \to W$ que admite uma adjunta $T^\dagger : W \to V$, isto é:

$$\langle T(v), w \rangle_W = \langle v, T^\dagger(w) \rangle_V,$$

para todos $v \in V$, $w \in W$. Verifique que vale também a igualdade:

$$\langle T^\dagger(w), v \rangle_V = \langle w, T(v) \rangle_W,$$

para todos $v \in V$, $w \in W$. Conclua que $T^\dagger$ admite uma adjunta e que ela coincide com T, isto é, $(T^\dagger)^\dagger = T$.

Exercício 13. Sejam V e W espaços vetoriais sobre $K = \mathbb{R}$ ou $K = \mathbb{C}$ munidos de produtos internos. Se V tem dimensão finita (de modo que toda aplicação linear $T : V \to W$ admite uma adjunta), mostre que a aplicação:

$$\mathrm{L}(V, W) \ni T \longmapsto T^{\dagger} \in \mathrm{L}(W, V)$$

é linear para $K = \mathbb{R}$ e linear-conjugada para $K = \mathbb{C}$.

Exercício 14. Sejam V e W espaços vetoriais sobre $K = \mathbb{R}$ ou $K = \mathbb{C}$ munidos de produtos internos. Dada uma transformação linear $T : V \to W$ que admite uma adjunta $T^{\dagger} : W \to V$, mostre que T é unitária (Definição 4) se e somente se $T^{\dagger} \circ T = \mathrm{Id}_V$.